

普通高等教育“十一五”国家级规划教材



全 国 高 等 学 校 自 动 化 专 业 系 列 教 材
教育部高等学校自动化专业教学指导分委员会牵头规划

Fundamental Modern Mathematics in Systems and Control

(Second Edition)

系统与控制中的近代数学基础

（第2版）

程代展　赵　寅　编著

Cheng Daizhan　Zhao Yin



清华大学出版社

作者简介

程代展　1970年毕业于清华大学，1981年于中国科学院研究生院获硕士学位，1985年于美国华盛顿大学获博士学位。从1990年起，任中科院系统所研究员。曾经担任过*Journal of Mathematical Systems Estimation and Control*，*Automatica*，*Asian Journal of Control*的Associate Editor，*International Journal of Robust and Nonlinear Control*的Subject Editor，国内杂志*Journal of Control Theory and Application*，《控制与决策》等多种学术刊物的主编、副主编、编辑；并曾经担任中国自动化协会控制理论专业委员会主任，IEEE　CSS北京分会主席。已经出版了12本专著/论著，发表了230余篇期刊论文和130余篇会议论文。他的研究方向有非线性控制系统、复杂系统、逻辑动态系统、博弈论等。

由于他对非线性系统控制理论及其应用的贡献，于2006年当选IEEE Fellow；2008年当选IFAC Fellow；2008年获国家自然科学二等奖；2011年获国际自动控制联合会（IFAC）颁发的Automatica　2008—2010最佳论文奖。

赵　寅　2008年毕业于清华大学，获数学与应用数学专业理学学士学位，2013年于中国科学院获系统建模与控制理论专业理学博士学位。从2013年起，任北京市十一学校数学教师。他的研究方向包括复杂系统、布尔网络的分析与控制、博弈论等。2011年获中国控制会议关肇直奖。

本书特色

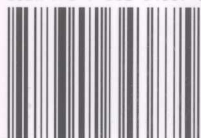
本书的目的是向自动化及相关学科的研究生、青年教师及科研人员介绍近代数学。选材以与系统控制关系密切的分析、代数及几何知识为主线，兼顾数学自身的内在逻辑与严谨性。内容包括：勒贝格测度与积分、泛函分析、概率论、随机过程、点集拓扑、抽象代数、代数拓扑、微分流形、李群与李代数、张量场、黎曼几何、辛几何、代数几何、图论、博弈论等近代数学的主要分支。作者希望本书能使仅具有工程数学基础的青年学者迅速掌握近代数学的工具，以满足阅读相关文献和从事自动化理论研究的需要。

除密切联系自动化学科的需求外，本书也注意为读者展示数学的百花园。例如，证明用尺规三等分任意角是不可能的，证明五次方程没有公式解，介绍什么是选择公理、Zorn引理、超限归纳法、连续统假定、罗素悖论、四色问题、费马大定理与椭圆曲线、庞加莱猜想、黎曼猜想……

读完这本书，你或许会发现，你登上了一个新的高度，有一个新的视野看世界……

清华大学出版社数字出版网站
WQBook 书文局泉
www.wqbook.com

ISBN 978-7-302-34387-5



9 787302 343875

定价：59.00元



普通高等教育“十一五”国家



全国高等学校自动化专业系列教材
教育部高等学校自动化专业教学指导分委员会牵头规划

Fundamental Modern Mathematics in Systems and Control
(Second Edition)

系统与控制中的近代数学基础
（第2版）

程代展　赵　寅　编著
Cheng Daizhan　Zhao Yin

清华大学出版社
北　京

内容简介

本书根据自动化学科系统科学与现代控制理论研究前沿的现状与需求介绍有关的近代数学的基础知识，内容包括实变函数与泛函分析、概率论、随机过程、抽象代数、拓扑学、微分流形与黎曼几何、代数几何、图论、博弈论等．作者致力于将理科专业的若干主要近代数学基础课程结合系统与控制理论深入浅出地综合成自动化专业的一门数学课程，这是一种探索．本书的内容强调数学学科自身的结构与严密性，同时，以系统科学与控制理论相关文献中出现和使用较多的数学工具为主，以满足阅读文献和从事系统与控制理论科学研究的需要．

本书的阅读对象为有志于理论研究的自动化及相近专业工科研究生及青年教师．

图书在版编目（CIP）数据

系统与控制中的近代数学基础/程代展，赵寅编著．--2版．--北京：清华大学出版社．2014
全国高等学校自动化专业系列教材
ISBN 978-7-302-34387-5

Ⅰ．①系…　Ⅱ．①程…　②赵…　Ⅲ．①高等数学—高等学校—教材　Ⅳ．①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 260127 号

责任编辑： 王一玲
封面设计： 傅瑞学
责任校对： 焦丽丽
责任印制： 宋　林

出版发行： 清华大学出版社
　网　　址： http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
　地　　址： 北京清华大学学研大厦 A 座　　**邮　　编：** 100084
　社 总 机： 010-62770175　　**邮　　购：** 010-62786544
　投稿与读者服务： 010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
　质 量 反 馈： 010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
　课 件 下 载： http://www.tup.com.cn，010-62795954
印 刷 者： 清华大学印刷厂
装 订 者： 三河市新茂装订有限公司
经　　销： 全国新华书店
开　　本： 175mm×245mm　　**印　　张：** 29.25　　**字　　数：** 706 千字
版　　次： 2007 年 7 月第 1 版　2014 年 5 月第 2 版　　**印　　次：** 2014 年 5 月第 1 次印刷
印　　数： 1～2000
定　　价： 59.00 元

产品编号：047803-01

出版说明

《全国高等学校自动化专业系列教材》 

为适应我国对高等学校自动化专业人才培养的需要，配合各高校教学改革的进程，创建一套符合自动化专业培养目标和教学改革要求的新型自动化专业系列教材，“教育部高等学校自动化专业教学指导分委员会”（简称“教指委”）联合了“中国自动化学会教育工作委员会”、“中国电工技术学会高校工业自动化教育专业委员会”、“中国系统仿真学会教育工作委员会”和“中国机械工业教育协会电气工程及自动化学科委员会”四个委员会，以教学创新为指导思想，以教材带动教学改革为方针，设立专项资助基金，采用全国公开招标方式，组织编写出版一套自动化专业系列教材——《全国高等学校自动化专业系列教材》.

本系列教材主要面向本科生，同时兼顾研究生；覆盖面包括专业基础课、专业核心课、专业选修课、实践环节课和专业综合训练课；重点突出自动化专业基础理论和前沿技术；以文字教材为主，适当包括多媒体教材；以主教材为主，适当包括习题集、实验指导书、教师参考书、多媒体课件、网络课程脚本等辅助教材；力求做到符合自动化专业培养目标、反映自动化专业教育改革方向、满足自动化专业教学需要；努力创造使之成为具有先进性、创新性、适用性和系统性的特色品牌教材.

本系列教材在“教指委”的领导下，从 2004 年起，通过招标机制，计划用 3～4 年时间出版 50 本左右教材，2006 年开始陆续出版问世. 为满足多层面、多类型的教学需求，同类教材可能出版多种版本.

本系列教材的主要读者群是自动化专业及相关专业的大学生和研究生，以及相关领域和部门的科学工作者和工程技术人员. 我们希望本系列教材既能为在校大学生和研究生的学习提供内容先进、论述系统和适于教学的教材或参考书，也能为广大科学工作者和工程技术人员的知识更新与继续学习提供适合的参考资料. 感谢使用本系列教材的广大教师、学生和科技工作者的热情支持，并欢迎提出批评和意见.

《全国高等学校自动化专业系列教材》编审委员会

2005 年 10 月于北京

《全国高等学校自动化专业系列教材》编审委员会

序

FOREWORD

自动化学科有着光荣的历史和重要的地位，20 世纪 50 年代我国政府就十分重视自动化学科的发展和自动化专业人才的培养. 五十多年来，自动化科学技术在众多领域发挥了重大作用，如航空、航天等，两弹一星的伟大工程就包含了许多自动化科学技术的成果. 自动化科学技术也改变了我国工业整体的面貌，不论是石油化工、电力、钢铁，还是轻工、建材、医药等领域都要用到自动化手段，在国防工业中自动化的作用更是巨大的. 现在，世界上有很多非常活跃的领域都离不开自动化技术，比如机器人、月球车等. 另外，自动化学科对一些交叉学科的发展同样起到了积极的促进作用，例如网络控制、量子控制、流媒体控制、生物信息学、系统生物学等学科就是在系统论、控制论、信息论的影响下得到不断的发展. 在整个世界已经进入信息时代的背景下，中国要完成工业化的任务还很重，或者说我们正处在后工业化的阶段. 因此，国家提出走新型工业化的道路和“信息化带动工业化，工业化促进信息化”的科学发展观，这对自动化科学技术的发展是一个前所未有的战略机遇.

机遇难得，人才更难得. 要发展自动化学科，人才是基础、是关键. 高等学校是人才培养的基地，或者说人才培养是高等学校的根本. 作为高等学校的领导和教师始终要把人才培养放在第一位，具体对自动化系或自动化学院的领导和教师来说，要时刻想着为国家关键行业和战线培养和输送优秀的自动化技术人才.

影响人才培养的因素很多，涉及教学改革的方方面面，包括如何拓宽专业口径、优化教学计划、增强教学柔性、强化通识教育、提高知识起点、降低专业重心、加强基础知识、强调专业实践等，其中构建融会贯通、紧密配合、有机联系的课程体系，编写有利于促进学生个性发展、培养学生创新能力的教材尤为重要. 清华大学吴澄院士领导的《全国高等学校自动化专业系列教材》编审委员会，根据自动化学科对自动化技术人才素质与能力的需求，充分吸取国外自动化教材的优势与特点，在全国范围内，以招标方式，组织编写了这套自动化专业系列教材，这对推动高等学校自动化专业发展与人才培养具有重要的意义. 这套系列教材的建设有新思路、新机制，适应了高等学校教学改革与发展的新形势，立足创建精品教材，重视实践

性环节在人才培养中的作用，采用了竞争机制，以激励和推动教材建设. 在此，我谨向参与本系列教材规划、组织、编写的老师致以诚挚的感谢，并希望该系列教材在全国高等学校自动化专业人才培养中发挥应有的作用.

吴启迪 教授

2005年10月于教育部

序

FOREWORD

《全国高等学校自动化专业系列教材》编审委员会在对国内外部分大学有关自动化专业的教材做深入调研的基础上，广泛听取了各方面的意见，以招标方式，组织编写了一套面向全国本科生（兼顾研究生）、体现自动化专业教材整体规划和课程体系、强调专业基础和理论联系实际的系列教材，自 2006 年起将陆续面世. 全套系列教材共 50 多本，涵盖了自动化学科的主要知识领域，大部分教材都配置了包括电子教案、多媒体课件、习题辅导、课程实验指导书等立体化教材配件. 此外，为强调落实“加强实践教育，培养创新人才”的教学改革思想，还特别规划了一组专业实验教程，包括《自动控制原理实验教程》、《运动控制实验教程》、《过程控制实验教程》、《检测技术实验教程》和《计算机控制系统实验教程》等.

自动化科学技术是一门应用性很强的学科，面对的是各种各样错综复杂的系统，控制对象可能是确定性的、也可能是随机性的，控制方法可能是常规控制、也可能需要优化控制. 这样的学科专业人才应该具有什么样的知识结构，又应该如何通过专业教材来体现，这正是“系列教材编审委员会”规划系列教材时所面临的问题. 为此，设立了《自动化专业课程体系结构研究》专项研究课题，成立了由清华大学萧德云教授负责，包括清华大学、上海交通大学、西安交通大学和东北大学等多所院校参与的联合研究小组，对自动化专业课程体系结构进行深入的研究，提出了按“控制理论与工程、控制系统与技术、系统理论与工程、信息处理与分析、计算机与网络、软件基础与工程、专业课程实验”等知识板块构建的课程体系结构. 以此为基础，组织规划了一套涵盖几十门自动化专业基础课程和专业课程的系列教材. 从基础理论到控制技术，从系统理论到工程实践，从计算机技术到信号处理，从设计分析到课程实验，涉及的知识单元多达数百个、知识点几千个，介入的学校 50 多所，参与的教授 120 多人，是一项庞大的系统工程. 从编制招标要求、公布招标公告，到组织投标和评审，最后商定教材大纲，凝聚着全国百余名教授的心血，为的是编写出版一套具有一定规模、富有特色的、既考虑研究型大学又考虑应用型大学的自动化专业创新型系列教材.

然而，如何进一步构建完善的自动化专业教材体系结构？如何建设基础知识与最新知识有机融合的教材？如何充分利用现代技术，适应现代大学生的接受习惯，改变教材单一形态，建设数字化、电子化、网络化等多元

形态、开放性的“广义教材”？等等，这些都还有待我们进行更深入的研究.

本套系列教材的出版，对更新自动化专业的知识体系、改善教学条件、创造个性化的教学环境，一定会起到积极的作用. 但是由于受各方面条件所限，本套教材从整体结构到每本书的知识组成都可能存在许多不当甚至谬误之处，还望使用本套教材的广大教师、学生及各界人士不吝批评指正.

吴澄 院士

2005 年 10 月于清华大学

第2版前言

PREFACE 

将近代数学的基本知识传授给仅具工科大学数学基础的年轻学子，是中国自动化学会教材委员会老师们提出的一个极具创意的构想. 我们有幸应邀去实践这一想法. 本书出版后，受到许多读者的欢迎. 北京航空航天大学的一位老师说，他们实验室是人手一册；一位清华大学自动化专业毕业的老学长几次来电话，说我们写这本书是"功德无量". 读者的错爱更让我们感到责任的重大. 由于第1版写作比较匆忙，似乎有许多未了的心愿，同时，一些年轻读者对本书的可读性提出一些批评. 鉴于初版已售罄，再版似成必然.

再版的主要修订包括以下几点：

(1) 增加概率论(第4章)和随机过程(第5章)，这部分内容不管是对自动化还是对信息、通信等相关专业都是极为重要的. 第1版写作时曾设想本系列教材中有一本与之平行的关于概率论与随机过程的书，现在经教材委员会同意将这一部分内容加入本书，使之融入近代数学整体框架之中，这增加了本书内容的完整性，也便于读者的方便掌握和使用.

(2) 增加离散数学方法(第12章)，内容包括图论与有限博弈，基本属于离散数学的一些内容. 原因有两点：①图与博弈虽不属纯粹数学的主流，却是目前系统与控制理论中应用最多或最热门的两个新工具；②离散数学本身的重要性. 文献[33]中曾提到："微积分在数学中一贯处于领袖地位，可以预见，有朝一日这种地位将被离散数学夺走."特别是在计算机高度发达的今天，离散数学越来越显示着自己的重要性.

(3) 增强可读性. 近代数学的各分支都有成熟的教材，将这些内容融合一体，让自动化及相关专业的研究生、青年教师或科技工作者在不太长的时间内学习和掌握这些内容，是一项艰巨的任务. 在第1版尝试的基础上，再版对全书内容做了较大调整，部分内容进行改写，增加例子和解释，重编习题，力图从读者角度出发，增强全书的可读性.

第4章的内容是基于测度的概率理论. 4.1节回顾经典概率理论，介绍古典概率方法与全概率公式等；4.2节介绍随机变量与分布函数的概念，并介绍正态分布、泊松分布及在数理统计中有用的一些概率分布；4.3节讨论随机变量的数字特征，包括期望、方差及相关不等式；4.4节研究条件数学期望及其相关性质；4.5节是随机变量序列的各种相关性及其强弱关系的比较；4.6节讲解大数定理和中心极限定理.

第5章讨论随机过程. 5.1节介绍离散时间鞅理论,包括停时、滤链与鞅收敛定理等,这些是讨论随机过程的基础; 5.2节讨论离散马尔科夫链,着重介绍马氏过程状态转移的性质; 5.3节是关于连续时间的随机过程,主要讨论Wiener过程; 5.4节介绍Itō积分,给出Itō积分和微分的公式; 5.5节介绍Kalman滤波,它是随机过程在信息和控制理论方面的重要应用.

第12章介绍图论与博弈论,之所以将博弈论归入离散数学方法,是因为我们只讨论策略有限博弈,在动态情况下将它转化为k值逻辑系统. 第12章内容包括: 12.1节讲解基本图论的概念与方法; 12.2节介绍图的扩展——超图,以及研究图和超图的一个新工具——拟阵; 12.3节是关于非合作博弈,主要以纳什均衡为中心; 12.4节讨论合作博弈,特别介绍了矩阵半张量在特征函数展开和Shapley值计算中的应用; 12.5节讨论网络演化博弈,介绍基本演化方程等,这节介绍的主要是我们自己的近期工作.

囿于作者的学识和眼界,面对这样一个任务深感力不从心,衷心希望有关专家和读者不吝赐教,将你们的批评指正反馈给我们. 让我们共同努力,以求实现本书的初衷: 为工科学生提供一本易于学习的近代数学综合教材.

作者感谢教材委员会萧德云教授的鼓励,感谢清华大学出版社的支持.

程代展

于中科院系统所,北京,2013年8月

第1版前言

PREFACE 

“数学是科学之母”，这是中学数学教师的一句口头禅. 这类说法是如此地深入人心，因此，数学的重要性大概是毋庸置疑的. 20 世纪杰出的哲学家和数学家罗素(Russell，1872—1970)说过：“任何一门学科，如果离开了严格的数学方法，就不能成为一门科学.”系统与控制理论作为一门应用数学的交叉学科分支与纯粹数学的关系更非一般. 在 2005 年布拉格召开的第 16 届 IFAC 世界大会上，现代控制理论的奠基人之一——卡尔曼(Kalman，1930—)教授——在其大会报告中说道：“回忆近一百年来系统理论的发展，一个无可争辩的事实是，在基本物理本质清楚之后系统理论的工程应用问题的成功或挫折都与其背后的相应纯粹数学问题的解决与否直接相关.”(Reviewing the evolution of system theory over the last 100 years, the inevitable conclusion is that affer the basic physical issues have been cleared up progress or failure in engineering research in system theory has been directly linked to progress or failure in solving the underlying purely mathematical problems.)这段话深刻地揭示了纯粹数学在系统与控制理论中的重要作用.

那么，系统与控制理论究竟需要哪些数学知识呢？中国现代控制理论的开拓者之一关肇直先生曾说过：“控制论是一门交叉学科，大家见仁见智，十八般武艺都可以往上使.”这生动地描述了系统与控制理论的另一个特点：由于系统模型的多样性，它与几乎所有的主要数学分支都有深刻的内在联系. 例如，动态系统与常微分方程、偏微分方程、拓扑动力学及微分动力学关系密切；非线性控制系统可以用微分流形、向量场等来刻画；研究卫星姿态及机器人运动等，李群及李代数理论是一个有效的工具；在随机系统及系统建模辨识的研究中概率论与随机过程起着决定性的作用；对于梁、板等弹性体的控制，泛函分析与算子理论是基础，甚至像数理逻辑或多值逻辑等纯粹数学分支也在模糊系统与控制中得到广泛的应用.

中国有两句老话，一句叫“艺不压身”；还有一句说：“工欲善其事，必先利其器”. 这对系统与控制理论的研究者而言尤显重要. 一个优秀的系统控制专家应当有一个宽阔的、坚实的数学基础，才能应对几乎无所不包的所谓“系统”和驾驭系统的控制理论，解决其背后复杂多样的数学问题. 几乎可以肯定地说，没有一门数学知识对系统控制理论研究是多余的.

然而,一个突出的矛盾是,自动化专业的研究生没有足够的时间和精力去专修一门门数学理论课程. 因此,怎么能在较短的时间内用较少的精力打下一个恰当的数学基础,为专业理论研究和日后的深造及发展创造一个良好的条件,这是一个迫切而富有挑战性的工作.

本书试图将近代数学的三个主要分支:分析、代数、几何的知识融合在一起,以理工科大学自动化本科学生的数学为基础,包括微积分、线性代数及常微分方程等初等数学知识为出发点,讲清近代数学的基本概念及在系统控制以及相近学科中大量使用的相关数学知识,使得有志于理论研究的研究生和青年学者在掌握了这些知识后,能够顺利地进入科研领域. 首先是能够在阅读本学科的前沿学术论文时,对其中使用的主要近代数学工具能够理解而不感到陌生;进而能够将这些知识应用于自己的学科研究中去,逐步使之成为自己得心应手的工具.

本书的主要内容如下:第1章是一个综述,介绍近代数学的学科结构和它在系统与控制中的应用;第2章介绍实分析的基础,内容包括实数理论、测度论与Lebesgue积分;第3章是关于泛函分析的基础内容,主要介绍赋范空间和有界线性算子的初步知识,还对Sobolev空间作了简单介绍;第4章的主要内容是点集拓扑,包括拓扑空间、可数性、分离原理、连通性、紧性、乘积空间与黏合空间;第5章是近世代数,主要讨论群、环和域这三种代数结构,作为综合和应用,较详细地介绍了伽罗瓦理论;第6章介绍代数拓扑的一些基础知识,重点是同伦与同调理论;第7章是微分几何,讨论了微分流形、向量场、张量场及李群、李代数等;第8章从张量和张量场出发,对黎曼几何和辛几何作了适当的介绍;第9章以线性控制系统为背景,对代数几何作了一个初步的介绍. 附录是笔者自创的“矩阵的半张量积”,它是普通矩阵乘法在不满足行列匹配条件时的推广,在本书中有几处简单运用.

在内容的选择上,以学科必要的基础知识及系统控制理论中涉及的程度为标准. 这自然会受到笔者主观兴趣与经历的影响. 为避免误导,希望说明两点:(1)随机过程、鞅理论等是随机系统与建模、滤波及信息处理等的重要工具,本书未论及是因为本丛书计划有这方面的专著. 因此,本书似应加一个小标题:确定性部分. (2)由于篇幅所限,笔者不得不忍痛割舍了一些同样有用的内容. 包括①微分拓扑,它对微分动力系统的分析是十分有用的工具;②变分法,它是优化及最优控制设计的有力工具;③微分对策,它是对抗性控制设计,包括鲁棒控制等中不可或缺的工具. 如果本书受欢迎,笔者会考虑再版时扩充这些内容.

另外,笔者尽可能对数学的历史、常识和一些前沿课题作一点适当的介绍. 例如,介绍了Zermole选择公理、Zorn引理、超限归纳法、连续统假定等数学知识;讨论分形几何与分数维的计算;证明了为什么用尺规三等分一个任意角是不可能的,为什么五次及五次以上方程不会有公式解;简单说明什么是冯康的辛算法,也对庞加莱猜想、费尔马大定理、四色问题、黎曼猜想等作一点解释.

在内容的组织上,本书照顾的仍是数学学科本身的逻辑性. 实际例子或解释比喻也许会使数学概念形象化,但只有真正掌握了数学内涵,才有可能将它应用于实

际问题."文化大革命"中清华大学流行一种说法,叫"一把锉刀捅破了窗户纸",意思是只要理解锉刀锉工件的过程就知道什么是微积分了.其实,这是将因果颠倒了.数学老师们先对微积分有了深刻理解,才能悟出锉刀的工作过程有微分和积分的内涵.因此,本书实质上是一本依数学自身演绎规则要求写成的数学书.它不要求你懂任何系统或控制的专门知识,任何一个具有工科大学数学基础的学生,只要对本书内容有兴趣,都可以读它.笔者仍然坚信,只有读懂了有关的数学知识,才有可能用它来解决问题.

在不失数学的学科严密性的同时,笔者力图用尽可能通俗的方法讲解这些近代数学的概念和方法,并编造和利用大量简单的例子来帮助理解数学概念.为了内容的相容性和可读性,许多证明也需要重新写过.实际上,这对笔者也是一个很大的挑战和艰难的工作.尽管作者做了许多努力,但无论如何,读者所面对的仍是艰深而庞杂的近代数学知识;要想在较短的时间内掌握它,绝对不是一件容易的事情.因此,这本书是为那些有志于从事理论研究而又肯下苦功的读者写的.

马克思说过:"在科学的探索中没有平坦大道可走,只有在崎岖小道的攀登上不畏劳苦的人,才有希望达到光辉的顶点."追求功名利禄确有捷径,成功者大有人在;而这本书指引的却是一条艰难的崎岖小道,但它或许会给你攀援登顶的机会.

本书第 2 章与第 3 章初稿大部分由中科院系统科学研究所冯德兴教授提供,冯德兴教授并负责全书的校核,特此致谢.齐洪胜博士协助本书的编排,一并致谢.

笔者感谢《全国高等学校自动化专业系列教材》编审委员会的鼓励和支持,特别是萧德云教授和王一玲编辑的热心帮助.

笔者才疏学浅,对数学也至多算一个"业余爱好者",勉为其难地承担了这样一个艰巨的工作,又无现成体例可循,疏漏错误难免,敬请读者和专家们批评指正.

程代展

于中科院系统所,北京,2007 年 1 月

符号说明

NOTATIONS



$\mathbb{C}$	复数域
$\mathbb{R}$	实数域
$\mathbb{Q}$	有理数域
$\mathbb{Z}$	整数环
$\mathbb{N}$	自然数集
$\mathbb{Z}_n$	模 n 整数 (环或域)
$A\Delta B$	集合 A, B 的对称差
$M_{m\times n}$	$m\times n$ 矩阵集
M_n	$n\times n$ 矩阵集
$\ltimes$	矩阵的左半张量积
$\mathrm{Re}\,\sigma(A)$	矩阵 A 的特征值的实部
$\mathrm{Hess}(h(x))$	$h(x)$ 的 Hessian 矩阵
$H<G$	H 是 G 的子群
$H\lhd G$	H 是 G 的正规子群
$GL(n,\mathbb{R})$	一般线性群
$gl(n,\mathbb{R})$	一般线性代数
$SL(n,\mathbb{R})$	特殊线性群
$sl(n,\mathbb{R})$	特殊线性代数
$SO(n,\mathbb{R})$	特殊正交线性群
$so(n,\mathbb{R})$	特殊正交线性代数
$Sp(n,\mathbb{R})$	辛群
$sp(n,\mathbb{R})$	辛代数
S_n	对称群
$[\cdot,\cdot]$	李括号
$(\ , \ )$	距　空间
$(x, \ )$	x, 　的距
$\|x\|$	x 的范数
$(X,\|\cdot\|)$	赋范空间
$B_r(x)$	以 x 为球心 r 为半径的开球
id_X	X 空间上的恒等映射
$(\Omega,\mathcal{F})$	可测空间
$(\Omega,\mathcal{F},P)$	概率空间
$P(A)$	A 的概率
$\mathcal{L}(X)$	赋范空间 X 上有界线性算子集
$H_k(X,F)$	X 在 F 上的 k 阶同调群

$f \simeq g$	两函数同伦
$f \simeq_A g$	两函数关于 A 同伦
$X \simeq Y$	两空间同伦
$\sigma_1 \sim \sigma_2$	两路径等价
$N \hookrightarrow M$	嵌入映射
$\mathrm{Obj}(C)$	范畴 C 的对象集
$\mathrm{Hom}(A, B)$	对象 A 到 B 的态射集
$\mathrm{conv}\{X\}$	X 的凸包
$\mathrm{aff}\{X\}$	由 X 生成的仿射集
$\ker(\pi)$	映射 π 的核
$\mathrm{im}(\pi)$	映射 π 的值域
$[p_0, p_1, \cdots, p_k]$	单纯形
$H^{m,p}(\Omega)$	$L^p(\Omega)$ 上的 m 阶 Sobolev 空间
$H^s(\Omega)$	s 阶 Sobolev 空间
$\mathrm{Hom}_K(V, W)$	V 到 W 的 K-态射集合
$\mathrm{Reg}(V, W)$	V 到 W 的正则映射集合
$\mathrm{Han}(n, K)$	次数为 n 的 Hankel 阵
$\mathrm{rank}(F)$	映射的秩
$\mathrm{ad}_f^k g$	向量场 g 对 f 的 k 次李导数
$L_f^k h$	函数 h 对 f 的 k 次李导数
$Id(i; k)$	指标集
DF	F 的微分
∇F	F 的梯度
F_*	微分同胚 F 的正向导出映射
F^*	微分同胚 F 的逆向导出映射
$\nabla_f g$	g 沿 f 的联络
$a\%b$	$\frac{a}{b}$ 的余
$[a]$	不大于 a 的最大整数
$T(N)$	流形 N 的切空间
$T^*(N)$	流形 N 的余切空间
$C^\infty(N)$	流形 N 上 C^∞ 函数
$C^\omega(N)$	流形 N 上的解析函数
$V(N)$	流形 N 上光滑向量场全体集合
$V^\omega(N)$	流形 N 上解析向量场全体集合
$\phi_X^t(x_0)$	X 的以 x_0 为初值的积分曲线
$T_t^s(N)$	全体 N 上 (s, t) 型张量场的集合
$\wedge$	协变张量的楔积
$\{\cdot, \cdot\}$	Poisson 括号



目录

CONTENTS

第1章



数学与系统控制

本章的目的是简要介绍数学、系统与控制理论以及两者之间的关系，使读者在进入具体问题的讨论之前先对我们研究的具体对象本身及其应用有一个整体的认识. 首先介绍数学和它的整体结构，使读者对数学学科和本书将接触到的一些主要学科分支及其相互关系有一个初步了解；然后介绍系统与控制理论；最后概述建模、控制与优化中的一些数学工具与方法. 不妨把本章看作本书的一个开场白，初学者可以走马观花地粗读一遍，不必深究细节，具体内容会在以后各章展开.

1.1 数学和它的学科结构

尽管本书的题目叫《系统与控制中的近代数学基础 (第 2 版)》，它在本质上还是一本数学的教科书，讲的是数学，而且是对工科学生而言较艰深的近代数学. “数学”是我们每个人从小学开始就接触到的一门课程，提到数学，大家都会感到似曾相识的熟悉. 但是如果有的人问一句：“什么是数学？”或“数学究竟是什么样子？”这可能会难倒包括笔者在内的许多人.

对于什么是数学，下面几个答案也许可以给我们一点启示[26]. 罗素在 20 世纪初对数学下了这样一个定义：“纯粹数学完全由这样一类论断组成，只要我们的假定是关于一般事物，而不是某些特殊的事物，那么我们的推理就构成数学. 因此，数学可以定义为这样一门学科，我们永远不知道其中所说的是什么，也不知道所学的内容是否正确.”

罗素的说法从极端的角度强调了数学的自身需要与其逻辑推理的重要性，它尽管曾一度被广为传播，但却很难被广泛接受为对数学的客观定义. 20 世纪 50 年代，苏联的一批有影响的数学家试图将现代数学的特征概括如下：“现代数学就是各种量之间的可能的关系，特别是各种变化着的量的相互联系的科学.”

从现代的观点看，将“量”作为数学的对象似乎有点狭. 因此，从 20 世纪 80 年代开始，一批美国学者试图对数学的定义作更符合时代的修正. 他们用“模式”(Pattern) 代替“量”，对数学的对象做了更广泛的推广：“数学这个领域可被称作模式的科学 (Science of Pattern)，其目的是要揭示从自然界和数学本身的抽象世界中所观察到的结构和对称性.”也许，我们应当接受这样一种说法：“数学本身是一个历史的概念，数学的内涵随时代的变化而变化，给数学下一个一劳永逸的定义是不可能的.”

对我们致力于系统控制及其工程应用研究的人来说，数学只是一个工具，我们用它来分析和解决问题. 因此，我们最感兴趣的是对我们有用的那些数学内容和方法. 当然，随

着高新科技的发展, 系统与控制中的一些新问题也会不断地对数学提出新的要求, 从而使原来以为无关的数学知识变得有用, 甚至可能要求发展新的数学工具. 由于系统科学与现代控制理论与数学有着极其密切的关系 (广义地说, 它们也是数学的一部分), 因此, 我们必须对数学的整体有所认识. 我们不妨再问一下, 数学的整体究竟是什么样子? 按照美国《数学评论》杂志的分类, 当今数学包括 60 个二级学科, 400 多个三级学科, 更细的分类则难以统计. 面对如此庞大的知识系统, 职业数学家越来越被限制于一两个专门领域. 庞加莱 (Poincaré, 1854–1912) 曾被称为 “最后一个数学通才”, 虽然, 比他稍晚的希尔伯特 (Hilbert, 1862–1943) 也跨过众多领域, 但这样的数学家毕竟是越来越难得了. 上面这段话摘自文献 [26], 它说明数学这个大厦的庞大和复杂. 但该书也指出: 正如希尔伯特曾在著名的巴黎演讲中指出: “数学科学是一个不可分割的整体, 它的生命力在于各个部分之间的联系”, 并提醒人们警惕 “数学被分割成许多孤立的分支” 的危险.

那么, 数学的整体结构大致是什么样子的呢? 就笔者所知, 没有一本书曾经给过一个完整的刻画, 虽然, 有不少书涉及到它的某些方面. 根据所读到的一些观点和自己的体会, 以下是笔者的一点管窥蠡测.

借鉴代数学的分类 (初等代数、高等代数、近世代数), 我们不妨把数学分为初等数学、高等数学、近代数学三个层次 (图 1.1.1).



图 1.1.1 数学的三个层次

初等数学主要包括初等代数、初等几何 (平面几何、立体几何、解析几何)、平面三角等, 大致为中学数学. 这些知识属于常识, 人人都必须知道. 高等数学主要指数学分析 (微积分是数学分析的简易本) 与线性代数, 当然这是一种不太严格的说法. 许多工程数学, 例如常微分方程、经典偏微分方程、经典概率论、初等复变函数等都属于这个范围, 它们的共同特点是以推导公式和应用公式进行计算为主. 一般工科学生都应掌握高等数学, 它们是进行工程设计与计算的基础.

本书所讨论的对象是近代数学基础, 它由一些近代数学分支组成, 它们是一些更深刻的知识和更犀利的工具, 并且它们也来自丰富的实际背景, 从而在许多学科领域特别是像系统与控制理论这样对数学的依赖性很强的学科中有大量的应用. 因此, 有志于理论研究的自动化专业的研究生必须对它有足够的了解.

按照一般的说法, 近代数学有三个主要组成部分: 代数、几何和分析. 当然, 许多重要数学分支是在这个基础上交叉发展形成的. 代数指的是近世代数 (也称抽象代数), 几何以拓扑学和微分几何为主, 分析指实分析、复分析与泛函分析. 在这三块基础上发展出来许多重要的交叉分支, 如概率论、随机过程、代数拓扑、微分拓扑、李群、李代数、代数几何、概率论、随机过程等 (图 1.1.2).

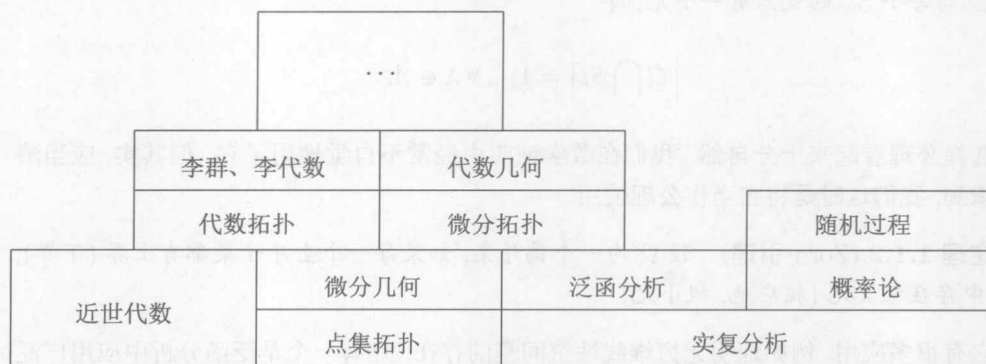


图 1.1.2 近代数学

本书讨论的主要对象是图 1.1.2 中的几个主要近代数学分支, 强调它们的基本概念及其与系统控制直接相关的内容. 本书力图以系统与控制理论为导向, 将这些近代数学的相关内容作为一个不可分割的整体进行讨论.

由于篇幅所限, 还有一些在自动控制及其相关领域应用广泛的一些近代数学工具未能收入本书, 例如变分法、逻辑与布尔代数、图论、博弈论等.

在结束本节之前, 我们对有关集合的序的问题作一点介绍. 相关的公理是近代数学中的一个工具, 但很难把它们归到哪一个数学分支.

定义 1.1.1 设 X 是一个集合, 在 X 的元素间定义一个关系 $\prec$, 它满足:

(1) (自反性) 对任一 $x \in X$, 则 $x \prec x$;

(2) (对称性) 如果 $x \prec y$ 且 $y \prec x$, 则 $x = y$;

(3) (传递性) 如果 $x \prec y$ 且 $y \prec c$, 则 $x \prec c$.

那么 $\prec$ 称为 X 上的一个序, X 称为一个偏序集.

定义 1.1.2 设 X 是一个偏序集, $\prec$ 为 X 上序. 如果对任意两个元素 $x, y \in X$, 或者 $x \prec y$ 或者 $y \prec x$, 那么 X 称为一个全序集.

例 1.1.1 (1) 在一组人群中, 按血缘排辈分: $\cdots \prec$ 孙子、孙女 $\prec$ 儿子、女儿 $\prec$ 父亲、母亲 $\prec \cdots$. 这是一个偏序集.

(2) 考虑 $[a, b]$ 上的连续函数集合 $C[a, b]$, $f(x) \prec g(x)$, 如果 $f(x) - g(x) \geqslant 0, \forall x \in [a, b]$, 那么 $C[a, b]$ 是一个偏序集.

(3) 自然数集 $\mathbb{N}$、整数集 $\mathbb{Z}$、有理数集 $\mathbb{Q}$、实数集 $\mathbb{R}$ 依大小均为全序集. $\mathbb{C}$ 是偏序集, 它只在子集 $\mathbb{R}$ 上有大小. □

定理 1.1.1 (Zermole 选择公理) 设 $\{S_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ 为某些集合的集合族, 则可以从每一个 S_λ 中选出一个元 $s_\lambda \in S_\lambda$. 换言之, 存在

$$C \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda,$$

使得 C 与每个 S_λ 的交只有一个元, 即

$$\left| C \bigcap S_\lambda \right| = 1, \quad \forall \lambda \in \Lambda.$$

选择公理看起来十分自然. 我们在数学证明中经常不自觉地用了它. 但其实, 应当清醒意识到, 我们这时是将它当作公理使用.

定理 1.1.2 (Zorn 引理) 设 Ω 为一个偏序集, 如果每一个全序子集都有上界 (下界), 则 Ω 中存在极大元 (相应地, 极小元).

它有很多应用, 例如证明无穷维线性空间基的存在. 还有一个是泛函分析中应用广泛的泛函延拓定理. 注意, 引理也是一个公理.

定理 1.1.3 (超限归纳法) 设 T 为一个全序集, 一个命题, 如果 (1) 它对某个 $t_0 \in T$ 对; (2) 如果它对所有 $t_0 \prec t \prec c$ 对, 则能推出它对 c 也对, 那么这个命题对所有的 $t \succ t_0$ 都对.

超限归纳法显然是对数学归纳法的一个推广. 当取 T 为自然数集时, 超限归纳法就变成了普通的数学归纳法了.

最后, Zermole 选择公理、Zorn 引理和超限归纳法这三个命题被证明是等价的, 而且它们在已有数学框架下是不能证明它对错的. 数学中通常将它们作为公理来用.

1.2 系统与控制理论

从 20 世纪中后期开始, “系统科学” 在一段时期里成为一个很热门的话题, 它仿佛是一门包罗万象的科学, 一切学科都可以看作是它的子学科. 因为每一个学科似乎都以某种或某一类系统作为自己的研究对象. 首作者曾在 20 世纪 80 年代中从美国华盛顿大学系统科学与数学系得到博士学位, 但如今却越来越对 “系统科学” 心存疑惑. 系统学方面的研究也许已经有了许多进展, 但它还缺乏作为自然科学的一门学科所必要的基本框架和实质性的理论成果. 因此, 尽管它有许多合理和创新性的思维及某些实践的支持, 至今, 它仍然不能称为一门成熟的学科. 我国著名科学家钱学森为创建系统学作出了巨大努力[30], 但看来系统学的创建还是一个长时间的艰巨任务.

本书提到的系统只是作为控制的对象来讨论的, 强调的是控制系统. 控制系统主要指的是动力系统, 它可能是机械系统、电力系统、化工过程等具体的工程系统, 也可能是带有更多复杂特征的多主体系统、混沌系统等. 系统的描述仅限于微分方程 (包括常微分方程、偏微分方程、随机微分方程) 和差分方程.

还有一类系统, 状态空间只能取有限值, 例如布尔网络与布尔控制网络[63], 演化博弈[105]等, 它们的动力学模型不能用微分或差分方程表示, 只能用逻辑或多值逻辑动态系统来表示. 这类系统在生物学、经济学以及社会行为的研究日形重要, 也因篇幅所限, 本书几无涉及.

控制理论实际上是自动化的理论, 因此, 将本书称为自动化或控制理论中的近代数学基础也许更确切一些. 自动化技术是人类在漫长的经济与军事活动中创造出来的. 早在两千多年前, 我们的祖先就发明了指南车, 依靠一套齿轮系统的负反馈作用, 不管车子怎样转弯, 车上的 "仙人" 始终手指南方. 1788 年瓦特发明了离心式调速器, 这是一个典型的自动控制装置, 它能稳定蒸汽机的转数, 从而使其得到广泛的工业应用. 20 世纪 30 年代, 由于电力工业的兴起, 信号处理和电力系统的稳定性研究得到迅速发展. 这时, 出现了奈奎斯特 (Nyquist) 稳定性判据 (或称奈奎斯特频率法), 它至今仍在控制理论及工程设计中使用. 这种方法后来被推广到非线性系统, 发展成为一种新的方法, 称为描述函数法或谐波平衡法.

在 20 世纪 40 年代到 60 年代, 由于自动化技术的发展, 控制系统的概念已逐步形成. 维纳 (Wiener) 因其在 1948 年出版的《控制论》[114] 一书被视为控制论的创始人之一. 该书详细刻画了在机械运动 (如航行) 及动物行为中的反馈及自适应控制行为等, 强调控制与信息的关系. 这本书被认为是第一本关于控制理论的专著. 我国著名科学家钱学森 1954 年在美国出版了《工程控制论》[112], 它创造性地将数学方法应用于工程系统, 特别是力学系统的控制中去, 为控制论成为一门严格的学科体系作出了重要贡献.

大致地说, 一个控制系统可以看作是一个黑匣子 (图 1.2.1).

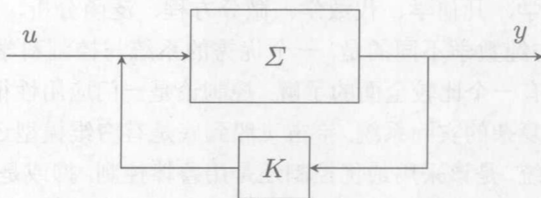


图 1.2.1 控制系统

在图 1.2.1 中, u 是输入, y 是输出. 控制设计的目的就是找出适当的输入, 使得输出满足我们的要求. 如果在系统中有一条从输出 y 到输入 u 的通道, 见图 1.2.1 中的 K 通道. 这说明输出的信息可以被 "反馈" 到输入端. 有 K 通道的控制被称为反馈控制, 这种控制特别重要, 它可以用输出信息来自动调节系统. 因此, 控制论的前身也称为调节原理. 实际上, 指南车和瓦特调速器都是属于这类调节系统. 大致地说, 在 20 世纪 50 至 60 年代之前, 自动化所面对的对象还比较简单, 从控制论的角度看它们所要处理的控制系统多半只有单一的输入和单一的输出, 称为单输入单输出系统. 研究方法主要是频域法, 即从系统的输入频率和输出频率的关系, 研究系统的频率响应, 从而了解系统结构进而设计出系统的控制律.

导弹和航天事业的发展是控制理论发展的一个重要推动力. 无论是导弹或卫星都只能携带有限燃料, 因此, 用最小的能量, 推动最大质量的装备, 准确到达目的地成了控制理

论面临的最为严峻的挑战. 这形成了后来称之为 “能控性” 和最优控制问题.

为了解决这些问题, 1956 年前苏联学者庞特里亚金 (Pontryagin) 发现了极大值原理, 给出最优控制的必要条件. 同年美国学者贝尔曼 (Bellman) 发展了动态规划原理, 用以解决有约束的最优控制问题. 1960 年前后美国学者卡尔曼 (Kalman) 提出了状态空间方法, 给出了系统能控、能观测等新概念, 使对控制系统的研究从频域走向时域.

20 世纪 60 年代以后的控制理论被称为现代控制理论. 庞特里亚金的极大值原理、贝尔曼的动态规划和卡尔曼的状态空间方法以及卡尔曼滤波，被称为现代控制理论三个代表性工作. 现代控制理论以“多输入多输出”、“ 状态空间方法” 等为标志, 以泛函分析、随机过程、微分几何等近代数学为工具, 在几十年的时间里发展成为一门有坚实的理论基础和广泛工程应用背景的学科体系, 它的理论在航空、航天、导弹制导、汽车和机器人控制以及电力、化工、机械制造等工业过程中得到广泛而成功的应用.

1.3　建模、控制与优化中的数学方法

自动化及其理论基础—系统与控制理论—通常被视为一门应用数学学科. 之所以如此, 是因为一方面数学的理论与方法是其理论研究的基本工具和手段; 同时, 它对许多相关数学学科的理论有许多创造和发展. 另一方面, 它强烈的应用背景和工程导向性使其有别于纯粹数学. 当然这并不是说, 一个优秀的系统与控制专家所应掌握的数学工具就比一个数学家少, 而是有其特点. 下面我们引用文献 [17] 中的一段话: “控制理论发展到今天, 恐怕没有一位系统与控制专家能够同时掌握控制理论的所有前沿分支, 正如当今一个数学家很难同时是拓扑学、几何学、代数学、微分方程、泛函分析、概率统计、数论等各方面的专家. 但是, 与纯数学不同的是, 一个优秀的系统与控制科学家, 应该能对不同的控制理论与控制方法有一个比较全面的了解. 控制论是一门应用性很强的科学理论, 它面对的是各种各样错综复杂的实际系统. 宇宙飞船到底是有穷维模型还是无穷维模型, 是随机系统还是确定性系统, 是该采用最优控制还是用鲁棒控制, 抑或是多种模型和多种控制手段的综合, 不可能有现成的答案. 模型的刻画, 控制手段的选择, 都是控制工程师自己的事情. 这种以问题为导向, 以解决问题为目标的研究路线, 要求系统与控制的理论工作者和工程师面对需求或实际对象, 有宽阔的知识面, 对本学科各个重要分支的理论和方法有一个全面综合的了解. 这也是我们对研究生, 特别是对那些有志在系统与控制科学的理论与应用研究方面, 实现其人生宏伟理想的博士研究生们的要求和期盼.”

本节的目的是对系统与控制理论中用到的那些主要数学工具和如何使用这些工具做一个概括性的介绍, 使读者有一个初步的了解. 这里涉及到的多数数学概念和方法, 将在本书以后的各章节讲述, 所以初读时可以不求甚解. 如有兴趣可在读过全书或书中相关章节后再回过头来看这一节.

1.3.1　系统建模

回忆图 1.2.1, 那里有个黑框子, 称为系统 (Σ). 所谓状态空间方法, 就是给出这个黑框子的动力学模型. 本书讨论的这个系统, 它的动力学模型一般用微分方程来描述. 如何

由一个实际物理过程得出它的动力学模型, 这个过程称为建模. 建模是系统分析与控制的基础.

建模的方法, 细说起来有很多, 但主要有两种: 一种是经验建模, 一种是根据物理规律建模. 系统与控制理论中研究的主要是动态模型, 它通常用微分方程或差分方程来描述. 下面举几个例子.

例 1.3.1　考虑海洋中鲸鱼的数量, 如果数量低于一定的水平, 那么数量会继续减少, 直到物种灭绝; 如果数量大于环境所能容纳的数量, 那么由于环境所能提供的食物等的不足, 也会使鲸鱼数量减少. 试建立鲸鱼数量的模型.

记鲸鱼的数量为 $a(t)$, 其中 t 为时间, 例如, 以年为单位. 种群最小量为 m, 即当种群太小时, 该种群会逐渐消亡. 那么假定增长速度 $\frac{\mathrm{d}a(t)}{\mathrm{d}t}$ 正比于 $a(t)-m$ 是合理的. 即当 $a(t)-m>0$ 时种群数量增加, 而当 $a(t)-m<0$ 时减少. 此外, 设环境所容纳的最大的数量为 M, 即当数量太大时, 环境难以提供足够的食物等, 故种群数会减少. 因此, 可假定增长速度正比于 $M-a(t)$. 于是可以得到以下经验模型

$$\dot{a}(t)=k(M-a(t))(a(t)-m), \tag{1.3.1}$$

这里 $k>0$ 为比例系数. 当考虑连续时间的动态过程时, 就会得到这类微分方程. 如果考虑离散时间, 用 $a(i)$ 表示鲸鱼数量, 其中 $i=1,2,\cdots$ 表示年份, 那么类似的讨论可以得到如下用差分方程表示的离散模型

$$a(i+1)=a(i)+k(M-a(i))(a(i)-m). \tag{1.3.2}$$

那么, 如何确定式 (1.3.1) 或式 (1.3.2) 中的参数 k、M 和 m 呢? 通常是根据测量或观测数据, 利用恰当的数学工具来确定. 例如, 可以用最小二乘的方法即均方误差最小的方法来确定. 由于测量值通常是离散的, 我们以离散模型为例: 设我们测量 $N+1$ 年的海洋鲸鱼数目为 $a(i)$, $i=1,2,\cdots,N+1$, 其计算值与实际值的差的平方记作 $E(k,M,m)$, 即

$$E(k,M,m)=\sum_{i=1}^{N}\left[a(i+1)-a(i)-k(M-a(i))(a(i)-m)\right]^2, \tag{1.3.3}$$

于是, k、M、m 的最优估计值的计算可转化为如下的优化问题

$$\min_{k,M,m} E(k,M,m). \tag{1.3.4}$$

求式 (1.3.4) 的最优解的方法很多, 例如梯度法求最优解等. □

下面的例子描述两种生物形成的生物链的演化过程, 对模型的更多讨论可见文献 [16].

例 1.3.2　考虑捕食者-食饵模型 (即著名的 Lotka-Volterra 模型). 它是关于捕食者与食饵的两个物种数量关系的动态模型. 以须鲸和磷虾为例, 记磷虾数量为 $x(t)$, 须鲸数

量为 $y(t)$. 如果没有须鲸, 磷虾的增长与其现有数量成正比. 因此

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = ax, \quad a > 0. \tag{1.3.5}$$

这里, a 是比例系数, 但须鲸的存在会减少这个比例系数. 因此式 (1.3.5) 可修正为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = (a - by)x, \quad a, b > 0. \tag{1.3.6}$$

这里, b 代表须鲸的捕食能力. 反过来如果没有磷虾, 则假设须鲸的减少与其现有数量是成正比

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -mx, \quad m > 0. \tag{1.3.7}$$

这里 m 为比例系数, 反映了减少速度. 但由于有磷虾存在, 这个比例系数会减少, 因此式 (1.3.7) 应修正为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = (-m + nx)y, \quad m, n > 0. \tag{1.3.8}$$

这里 n 代表磷虾的存活能力. 将式 (1.3.6) 及式 (1.3.8) 放到一起得到如下的方程

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = (a - by)x, \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = (-m + nx)y, \quad a, b, m, n > 0. \end{cases} \tag{1.3.9}$$

它就是一个捕食者-食饵的动力学模型.

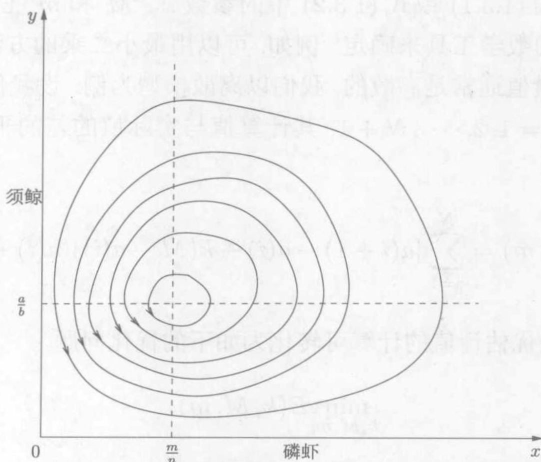


图 1.3.1 捕食者-食饵模型的周期轨线

容易检验, 式 (1.3.9) 有两个平衡点 (图 1.3.1), 一个是不稳定平衡点 (0,0), 这是我们不感兴趣的; 另一个平衡点是 $(\frac{m}{n}, \frac{a}{b})$. 可以证明[16], 这是一个稳定但不渐近稳定的平衡点, 系统在这个平衡点附近的轨线为周期轨线. □

以上的两个例子都是根据经验而假定系统演化的动态规律, 从而得到微分或差分方程. 这种建模方法很重要, 在实际系统建模中应用很广, 但根据实际观测数据检验预先设定的模型的合理性是十分重要的.

根据已知物理学规律建模是另一种重要建模方法. 下面给出一个根据力学定律建模的例子, 关于这个例子的详细讨论可见文献 [56].

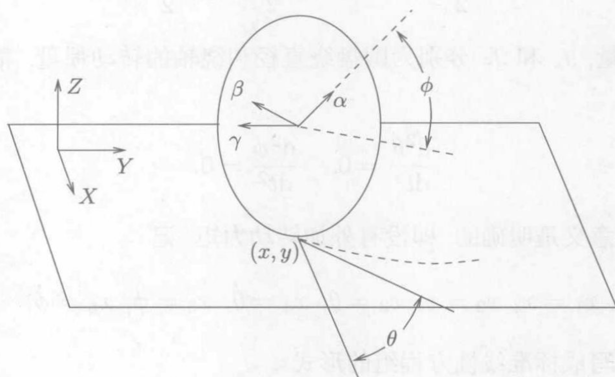


图 1.3.2 滚动的圆盘

例 1.3.3 考虑平面上一个滚动的圆盘 (图 1.3.2). 设圆盘半径为 ρ, 圆盘与地面垂直, X-Y-Z 为地面固定直角坐标, Z 与地面垂直, α-β-γ 为固定于圆盘上的直角坐标, γ 平行于平面, 这保证圆盘与地面垂直. 圆盘在 X-Y-Z 平面上滚动. 切点坐标为 (x,y), 圆盘转过的角度为 ϕ, 转动轨线切方向与 X 轴正方向交角为 θ. 显然, 圆盘的状态可以用广义坐标 (x,y,θ,ϕ) 唯一确定.

一般, 我们把动力系统状态所处的空间称为状态空间. 那么, 对滚动圆盘而言, 什么是它的状态空间呢? 既然状态可由四个独立变量来描述, 一个很直观而合理的想法是, 状态空间是 $\mathbb{R}^4$. 但如果仔细分析, 这里有不合理的地方: 后两个坐标变量 θ,ϕ 与前两个坐标变量 x,y 是不同的, x 或 y 可以取任意实数值, 但 θ 或 ϕ 只能取, 譬如 $[0,2\pi)$, 否则, 一意性将被破坏. 那么, 将状态空间设成 $\mathbb{R}^2\times[0,2\pi)^2$ 行不行呢? 如果不管 "几何形状", 那么确实每个点对应了圆盘的一个状态. 但如果考虑几何形状, 这个表达又不行了, 因为在 $[0,2\pi)$ 中, 如果一个点 $p\to 2\pi$, 它不可能接近 "0", 而对实际变量 θ 或 ϕ, $\theta\to 2\pi$ 意味着 $\theta\to 0$. 这实际上涉及到状态空间或集合上的拓扑结构问题, 这个问题将在本书以后章节详细讨论. 将单位圆周记作 S^1, 那么, 直观地说, θ 或 ϕ 是在 S^1 上变化的, 这就避免了前面提到的尴尬局面. 因此, 我们可以说, 对于上述滚动的圆盘, 状态空间可为 $\mathbb{R}^2\times S^1\times S^1$. 当然, 这样我们又会遇到如何在 S^1 上定义坐标和微分关系等, 这就变成微分几何所要讨论的课题, 这也是本书最核心的内容之一.

我们暂时将这些严格化的工作放在一边, 继续考虑建模问题.

设圆盘无滑动地滚动, 则由线速度可知

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \rho\dot{\phi}\cos(\theta), \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \rho\dot{\phi}\sin(\theta). \end{cases} \tag{1.3.10}$$

圆盘的动能是

$$K = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}J_s\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}J_r\dot{\phi}^2, \tag{1.3.11}$$

这里 M 为圆盘质量, J_s 和 J_r 分别为圆盘绕直径和绕轴的转动惯量. 根据能量守恒律可以得到[56]

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = 0, \quad \frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}t^2} = 0. \tag{1.3.12}$$

这两个式子的物理意义是明确的, 即没有外加转动力矩. 记

$$x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = \theta,\ x_4 = \dot{\theta},\ x_5 = \phi,\ x_6 = \dot{\phi},$$

那么动态系统可以写成标准线性方程组的形式

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \rho x_6\cos(x_3), \\ \dot{x}_2 = \rho x_6\sin(x_3), \\ \dot{x}_3 = x_4, \\ \dot{x}_4 = 0, \\ \dot{x}_5 = x_6, \\ \dot{x}_6 = 0. \end{cases} \tag{1.3.13}$$

现在, 如果假定转盘上装有电动机, 它可以产生绕直径和绕轴的转动惯量, 分别记作 u_1、u_2, 它们可以看作系统的控制. 于是上述系统就变为控制系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \rho x_6\cos(x_3), \\ \dot{x}_2 = \rho x_6\sin(x_3), \\ \dot{x}_3 = x_4, \\ \dot{x}_4 = u_1, \\ \dot{x}_5 = x_6, \\ \dot{x}_6 = u_2. \end{cases} \tag{1.3.14}$$

在结束本例子前, 我们希望将固定坐标 X-Y-Z 与活动坐标 α-β-γ 联系起来. 准确地说, 希望通过一个空间旋转将两个坐标方向变成一致的, 这就相当于找一个正交矩阵 T $(\det(T) = 1)$ 使得

$$(\alpha, \beta, \gamma) = T(X, Y, Z),$$

($\det(T)=1$ 可保证坐标轴旋转方向不变), 记

$$SO(3,\mathbb{R})=\left\{T\in M_{3\times 3}\,\middle|\,T^{\mathrm{T}}T=I_3,\ \text{且}\ \det(T)=1\right\},$$

它称为特殊正交群, 它是一个李群, 李群是一个很重要的概念, 我们以后会讨论到.

实际上, 由于圆盘运动时垂直于平面, 这里的旋转只能是一些特殊的集合, 实际上, 不难推出

$$J:=\left\{\begin{bmatrix}\cos(\phi)\cos(\theta) & \sin(\phi)\cos(\theta) & \sin(\theta)\\ \cos(\phi)\sin(\theta) & \sin(\phi)\sin(\theta) & -\cos(\theta)\\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) & 0\end{bmatrix}\,\middle|\,\theta\in\mathbb{R},\phi\in\mathbb{R}\right\}.$$

J 是 $SO(3,\mathbb{R})$ 的李子群. □

系统辨识可看作一类特殊的建模问题, 它假定模型的结构已知, 但具体参数不知道. 因此, 要通过系统的输入输出值来确定系统的参数.

例 1.3.4　设一个未知系统的输入 $u(i)\in\mathbb{R}^m$ 与状态 $x(i)\in\mathbb{R}^n$ 具有线性关系, 即

$$x(i+1)=Ax(i)+Bu(i),\quad i=1,2,\cdots \tag{1.3.15}$$

我们希望从一组输入 — 状态值来估计出参数 A, B. 设矩阵 $W=(w_{ij})\in M_{p\times q}$, 我们用 $V_c(W)$ 表示它的列展开, 即

$$V_c(W)=(w_{1,1},w_{2,1},\cdots,w_{p,1},\cdots,w_{1,q},w_{2,q},\cdots,w_{p,q})^{\mathrm{T}}.$$

那么, 容易证明

$$x(i+1)=(x(i)^{\mathrm{T}},u(i)^{\mathrm{T}})\ltimes\begin{bmatrix}V_c(A)\\ V_c(B)\end{bmatrix}.$$

这里 $\ltimes$ 是矩阵的半张量积, 参见附录 A (详见文献 [12]). 设有 $N+1$ 组观测量, 记

$$W=\begin{bmatrix}x(2)\\ \vdots\\ x(N+1)\end{bmatrix},\quad H=\begin{bmatrix}x(1)^{\mathrm{T}} & u(1)^{\mathrm{T}}\\ \vdots & \\ x(N)^{\mathrm{T}} & u(N)^{\mathrm{T}}\end{bmatrix},\quad Y=\begin{bmatrix}V_c(A)\\ V_c(B)\end{bmatrix},$$

则有

$$W=HY.$$

设列满秩, 则得参数的最小二乘估计值

$$\hat{Y}=(H^{\mathrm{T}}H)^{-1}H^{\mathrm{T}}\ltimes W. \tag{1.3.16}$$

这里, 半张量积的使用大大简化了计算. □

与建模辨识密切相关的一个问题是滤波及预测问题, 在系统具有随机噪声的情况下, 它希望从系统的输出值直接得到状态的最好估计. 下面给出一个简单例子.

例 1.3.5 (卡尔曼滤波[81]) 考虑线性离散系统

$$\begin{cases} x(k+1) = \varPhi(k+1,k)x(k) + \varGamma(k+1,k)w(k), \\ z(k+1) = H(k+1)x(k+1) + v(k+1). \end{cases} \tag{1.3.17}$$

这里 $x(k) \in \mathbb{R}^n$ 为系统状态, $z(k) \in \mathbb{R}^m$ 为系统观测输出, $w(k) \in \mathbb{R}^p$ 为系统噪声, $v(k) \in \mathbb{R}^m$ 为观测噪声.

设系统噪声 $w(k)$ 和观测噪声 $v(k)$ 均为零均值白噪声, 满足

$$\begin{cases} E[w(k)] = 0, \\ E[v(k)] = 0, \\ E[w(k)w^{\mathrm{T}}(j)] = Q(k)\delta_{k,j}, \\ E[v(k)v^{\mathrm{T}}(j)] = R(k)\delta_{k,j}, \\ E[w(k)v^{\mathrm{T}}(j)] = 0. \end{cases} \tag{1.3.18}$$

初始状态的均值及方差为

$$\begin{cases} E[x(0)] = m_x(0), \\ E[(x(0) - m_x(0))(x(0) - m_x(0))^{\mathrm{T}}] = P_x(0). \end{cases} \tag{1.3.19}$$

$x(0)$ 与 $w(k)$ 及 $v(k)$ 都不相关, 即

$$E[x(0)w^{\mathrm{T}}(k)] = 0; \quad E[x(0)v^{\mathrm{T}}(k)] = 0. \tag{1.3.20}$$

利用正交投影的方法, 即 $x(j)$ 基于前 k 次观测 $z^k = [z(1), \cdots, z(k)]^{\mathrm{T}}$ 的线性最小方差估计应为 $x(j)$ 在 z^k 上的正交投影, 即

$$x(j|k) = E[x(j) \mid z^k]. \tag{1.3.21}$$

利用和内积空间正交分解的一些简单运算, 即可得到如下的最优滤波估计 $x(k|k)$ 的递推关系式

$$\begin{cases} x(k|k) = \varPhi(k,k-1)x(k-1|k-1) + K(k) \\ \qquad \times [z(k) - H(k)\varPhi(k,k-1)x(k-1|k-1)], \\ K(k) = P(k|k-1)H^{\mathrm{T}}(k)[H(k)P(k|k-1)H^{\mathrm{T}}(k) + R(k)]^{-1}, \\ P(k|k-1) = \varPhi(k,k-1)P(k-1|k-1)\varPhi^{\mathrm{T}}(k,k-1) \\ \qquad + \varGamma(k,k-1)Q(k-1)\varGamma^{\mathrm{T}}(k,k-1), \\ P(k|k) = [I_n - K(k)H(k)]P(k|k-1), \quad k = 0,1,\cdots. \end{cases} \tag{1.3.22}$$

这个递推滤波算法也称为卡尔曼滤波器. 这里, $P(\cdot|\cdot)$ 是估计误差的协方差阵, 即 $P(k|k-1)$ 是一步预测误差的协方差阵, $P(k|k)$ 是滤波估计误差的协方差阵.

对于多步预测, 我们有如下的最优滤波估计

$$x(k|j)=\varPhi(k,j)x(j|j), \tag{1.3.23}$$

这里 $\varPhi(k,j)$ 是系统转移阵, 即

$$\varPhi(k,j)=\varPhi(k,k-1)\varPhi(k-1,k-2)\cdots\varPhi(j+1,j).$$

多步预测误差的协方差阵为

$$\begin{aligned}P(k|j)=&\varPhi(k,k-1)P(k-1|j)\varPhi^{\mathrm{T}}(k,k-1)\\&+\varGamma(k,k-1)Q(k-1)\varGamma^{\mathrm{T}}(k,k-1).\end{aligned} \tag{1.3.24}$$

□

关于卡尔曼滤波, 将在第 5 章进一步讨论.

从以上几个例子可以看出, 在动力系统建模及模型辨识等问题中, 要解决的问题本质上都是数学问题, 而它涉及到的数学工具包括微分方程与微分动力系统理论、微分流形、李群李代数、概率与随机过程、函数空间与泛函分析等.

下面给出一个分布参数控制系统的例子, 详见文献 [106] 或文献 [17].

例 1.3.6　考虑人口的演化问题, 设 $P(a,t)$ 为在时间 t 的年龄为 a 的人口密度, $D(a)$ 和 $B(a)$ 分别为年龄为 a 的人群的死亡率与生育率, $P_0(a)$ 为人口初始分布密度, m 为最大存活年龄. 那么可以得到下面的人口演化模型[106]

$$\begin{cases}\frac{\partial P(a,t)}{\partial t}+\frac{\partial P(a,t)}{\partial t}+D(a)P(a,t)=0,\\P(0,t)=\int_0^m B(a)P(a,t)\,\mathrm{d}a,\quad t>0,\\P(a,0)=P_0(a),\quad 0\leqslant a\leqslant m.\end{cases} \tag{1.3.25}$$

我们设死亡率与生育率满足以下条件

$$\begin{aligned}&D(a)\geqslant 0,\quad a\in[0,m];\\&\textstyle\int_0^a D(s)\,\mathrm{d}s<\infty,\quad \forall a\in[0,m);\\&\textstyle\int_0^m D(s)\,\mathrm{d}s=\infty.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&B(a)\geqslant 0,\quad a\in[0,m];\\&B(\cdot)\in C[0,m];\\&\mathrm{Supp}(B)=[a_1,a_2]\subset(0,m).\end{aligned}$$

这里 $C[0,m]$ 为区间 $[0,m]$ 上的连续函数集合; $\mathrm{Supp}(\cdot)$ 指一个函数的支集, 即使得函数值不为零的自变量的集合; $[a_1,a_2]$ 为妇女的生育时间段.

定义 $(0,m)$ 上的可积函数集合为

$$L^1(0,m)=\left\{f(t):(0,m)\to\mathbb{R}\,\middle|\,\int_0^m|f(s)|\,\mathrm{d}s<\infty\right\}.$$

可以证明, 这是一个 Banach 空间. 作为系数在 $\mathbb{R}$ 上的线性空间, 它是无穷维的. 现在 $P(a,t)$ 可以看作在 $L^1(0,m)$ 上演化的变量, 即 $P(\cdot,t) \in L^1(0,m)$. 对比有穷维系统状态变量 $x(t) \in \mathbb{R}^n$, 可以清楚地看出为什么把这类系统称为无穷维系统了.

为了研究的方便, 我们可以将系统 (1.3.25) 写成算子形式. 在 $L^1(0,m)$ 上定义线性算子 A 如下

$$A\varphi = -\varphi'(a) - D(a)\varphi(a),$$

其定义域为

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ \varphi \in L^1(0,m) \;\middle|\; A\varphi \in L^1(0,m),\ \varphi(0) = \int_0^m B(s)\varphi(s)\,\mathrm{d}s \right\}.$$

那么, 系统 (1.3.25) 就可以写成以下的发展方程的形式

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = AP, \quad P(0) = P_0. \tag{1.3.26}$$

可以证明, 这里 A 生成一个 $L^1(0,m)$ 上的 C_0 半群. 所谓 Banach 空间 X 上的一个 C_0 半群是指一个单参数有界线性算子族 $T(t): X \to X,\ t \in \{0,\infty\}$ 满足 (1) $T(0) = I$ (I 为恒等算子); (2) $T(t+s) = T(t)T(s)$; (3) $\lim_{t\to 0^+} \|T(t)x - x\| = 0, \forall\, x \in X$.

这里, A 十分类似于线性系统中的系数矩阵, 在式 (1.3.26) 形式下, 许多算子分析的工具都可以用来研究系统了.

当然, 这个系统像是没有控制的动态系统, 但实际上 $B(a)$ 可以看作一个控制, 计划生育等手段就是通过改变生育率来控制人口增长的. □

在上述例子中所有的积分都是 Lebesgue 积分; 另外, 我们还可以看到, 在分布参数系统的研究中, Banach 空间、线性算子等泛函分析的基本概念和工具是基本的研究手段.

前面我们分别以线性系统、非线性系统和分布参数系统中的个别问题为例, 指出近代数学在其中的作用. 实际上, 在复杂系统的控制问题中, 可能要求各种近代数学工具的综合应用.

量子控制是近年来量子物理学、量子化学及控制论等学科的共同热点, 我们以它为例说明其对多种近代数学工具的依赖.

例 1.3.7 量子力学断言, 一个微观粒子总可以用一个称为波函数的复值函数 $\varPsi(r,t)$ 来完全描述, 这里 r 是位置坐标向量, t 是时间.

波函数经归一化后满足

$$\int_M \varPsi^*(r,t)\,\varPsi(r,t)\,\mathrm{d}r = 1. \tag{1.3.27}$$

这里 M 是粒子所在空间. $\varPsi^*(r,t)\,\varPsi(r,t)$ 是一个概率密度函数, 它表示在 r 处找出粒子的概率.

波函数满足的动力学方程是如下的 Schrödinger 方程

$$i\hbar\frac{\partial \varPsi(r,t)}{\partial t} = \hat{H}\,\varPsi(r,t), \tag{1.3.28}$$

这里 $\hat{H}$ 是体系的哈密顿量 H 所对应的哈密顿算子.

为求解 Schrödinger 方程作变量分离

$$\Psi(r,t)=\Psi(r)f(t).$$

代入 Schrödinger 方程, 则得

$$f(t)=\mathrm{e}^{-(i/\hbar)Et},$$

这里 $\hbar$ 是普朗克常数, E 为另一常数, 表示量子系统的能量. 于是有

$$\Psi(r,t)=\Psi(r)\mathrm{e}^{-(i/\hbar)Et}. \tag{1.3.29}$$

$\Psi(r)$ 描述的态称为定态.

在量子力学中每一个可观测力学量 A 都对应一个算符 $\hat{A}$, A 的平均值为

$$\bar{A}_{\Psi}=\frac{\int\Psi^*(r)\hat{A}\Psi(r)\,\mathrm{d}r}{\int\Psi^*(r)\Psi(r)\,\mathrm{d}r}. \tag{1.3.30}$$

在有外部控制时, 哈密顿量会变为

$$H=H_0+\sum_{j=1}^{m}H_ju_j,$$

这里 H_0 是内部哈密顿量, u_j 是外部控制量, $H_e=\sum_{j=1}^{m}H_ju_j$ 是外部哈密顿量. 代入 Schrödinger 方程即可得到双线性形的量子控制系统

$$i\hbar\frac{\partial\Psi(r,t)}{\partial t}=\left(\hat{H}_0+\sum_{j=1}^{m}\hat{H}_ju_j\right)\Psi(r,t). \tag{1.3.31}$$

□

从上例的简单介绍中可以看出, 概率论、泛函分析与算子理论等在量子控制中均十分重要. 由于篇幅所限, 我们未能提到的是, 无论是量子通信或量子计算, 真正重要的是有限量子态, 如最简单的双态的量子比特. 这时, 李群李代数成了基本工具[10].

近代数学工具在控制中的应用可以说几乎无处不在. 最近一个出色的结果是, 用黎曼几何的方法解决变系统波动方程的长期未能解决控制问题[117], 它是应用近代数学工具解决较艰深的控制问题的一个成功的范例.

1.3.2 系统控制

在实际工作中, 建模是控制理论中要解决的第一个问题, 可以说它是属于认识世界的范畴. 控制论更重要的目的是要设计控制, 使系统按我们的意愿演化, 属于改造世界的范畴.

先从一个例子看什么是控制问题.

例 1.3.8 回忆例 1.3.2. 根据模型 (1.3.9), 不难看出两个物种的数量呈周期性变化, 且都不会灭绝. 进而可以证明, 其平均值为

$$\bar{x} = \frac{m}{n}, \quad \bar{y} = \frac{a}{b}. \tag{1.3.32}$$

下面考虑控制问题, 控制是指人类的捕捉. 设对磷虾和须鲸的捕捉速度 (单位时间捕捉量) 分别为 u_1 和 u_2, 那么动态系统 (1.3.9) 变为一个控制系统

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = (a - by)x - u_1, \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = (-m + nx)y - u_2, \quad a, b, m, n > 0. \end{cases} \tag{1.3.33}$$

假定我们只捕磷虾, 且根据磷虾的当前数量决定捕捉量, 即

$$u_1 = \gamma x, \quad u_2 = 0.$$

这里 $0 < \gamma < a$. 于是式 (1.3.33) 变为

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = ((a - \gamma) - by)x, \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = (-m + nx)y. \end{cases} \tag{1.3.34}$$

于是

$$\bar{x} = \frac{m}{n}, \quad \bar{y} = \frac{a - \gamma}{b}.$$

即捕捉磷虾不会减少磷虾, 而只会减少须鲸.

下面考虑两个控制问题: 即不仅捕捉磷虾也捕捉须鲸, 这时令

$$u_1 = \gamma x, \quad u_2 = \mu y.$$

这里 $\mu > 0$. 于是式 (1.3.33) 变为

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = ((a - \gamma) - by)x, \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = (-(m + \mu) + nx)y. \end{cases} \tag{1.3.35}$$

于是

$$\bar{x} = \frac{m + \mu}{n}, \quad \bar{y} = \frac{a - \gamma}{b}.$$

即磷虾量不减反增, 而须鲸的数量与单捕磷虾的情况一样. □

下面举几个控制系统的问题来看看它们会涉及到哪些近代数学的工具.

一个连续时间定常线性系统可以描述成

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \quad x \in \mathbb{R}^n, \, u \in \mathbb{R}^m, \\ y = Cx, \qquad\qquad y \in \mathbb{R}^p. \end{cases} \tag{1.3.36}$$

这里, $u = (u_1, \cdots, u_m)^{\mathrm{T}}$ 是系统的输入即控制; $y = (y_1, \cdots, y_p)^{\mathrm{T}}$ 是系统的输出; A、B、C 为适当维数的矩阵.

下面我们考虑线性系统的刻画.

例 1.3.9 一个连续时间线性系统 (1.3.36) 可以由 (A,B,C) 三个矩阵来确定. 因此, 一个简单的想法是, 所有的 (n 维状态, m 维输入, p 维输出) 线性系统构成一个 $\mathbb{R}^{n\times n}\times\mathbb{R}^{n\times m}\times\mathbb{R}^{p\times n}$, 即 $\mathbb{R}^{n(n+m+p)}:=\mathbb{R}^k$ $(k=n(n+m+p))$ 维线性空间. 那么, 我们可以用 $\mathbb{R}^k$ 上的距离定义两个系统的接近程度, 用拓扑学的语言来说, 就是用 $\mathbb{R}^k$ 上的距离导出的拓扑来定义线性系统集的拓扑. 这种定义是否合理呢? 显然它不是很合理, 因为, 对于一个控制系统, 我们关心的应当是它的输入输出关系, 状态只是一种刻画方式. 对一个实际系统, 从某种意义上说, 状态变量是人为规定的, 我们可以用不同的状态变量来刻画同一个系统. 一个熟知的事实是, 为了某种目的, 我们可以对系统作坐标变换, 即坐标变换不会改变系统. 设 $z=Tx$ 为一线性坐标变换, 那么系统 (A,B,C) 在 z 坐标下变为 $(T^{-1}AT,T^{-1}B,CT)$, 这两个系统应当是等价的. 我们将所有 $\mathbb{R}^n$ 空间上的坐标变换 T 的集合记作 $GL(n,\mathbb{R})$, 它实际上是一个李群, 称为一般线性群.

两个线性系统 (A,B,C) 及 (D,E,F) 是等价的, 或者说, 它们刻画的是同一个系统, 记作

$$(A,B,C)\sim(D,E,F),$$

如果存在一个 $T\in GL(n,\mathbb{R})$, 使得 $D=T^{-1}AT$, $E=T^{-1}B$, $F=CT$. 容易证明, 这是一个等价关系, 因此, 刻画线性系统间几何关系的一个合理拓扑应当是 $\mathbb{R}^k$ 在这个等价关系下的商拓扑, 记作 $\mathbb{R}^k/GL(n,\mathbb{R})$. □

下面考虑非线性控制系统, 一个仿射非线性系统可表示为

$$\begin{cases}\dot{x}=f(x)+\sum\limits_{i=1}^{m}g_i(x)u_i, & x\in M,\\ y_j=h_j(x), & j=1,\cdots,p.\end{cases} \tag{1.3.37}$$

这里, 状态空间 M 一般可设为一个 n 维流形. 当然, 作为最重要的特例, 它也可以是 $\mathbb{R}^n$. 在例 1.3.3 中大家已经看到, 有时用 $\mathbb{R}^n$ 并不合适. 这样的实际例子也很多, 例如, 在考虑卫星姿态角控制及观测问题时, 状态空间即为 $SO(3,\mathbb{R})$, 而输出空间则是它的一个子群的陪集空间[53, 60].

有人说, 微分几何是近代非线性控制理论的基础. 这句话大概不算过分. 如果有兴趣, 不妨翻翻这方面的一些参考书, 如文献 [79, 83], 就不难发现它们的关系.

下面我们用一个简单例子说明微分几何是如何与控制系统的性质联系起来的.

例 1.3.10 能控性是控制系统的一个重要性质. 所谓系统能控是指, 给定状态空间的任意两个点 x, y, 总能找到控制, 它驱使系统从 x 到达 y. 对于线性系统 (1.3.36), 我们可以定义一个矩阵

$$\mathcal{C}=\left[B,AB,\cdots,A^{n-1}B\right], \tag{1.3.38}$$

称它为能控性矩阵. 一个很精彩的结论是[116], 线性系统能控当且仅当能控性矩阵行满秩, 即

$$\operatorname{rank}(\mathcal{C})=n.$$

那么对于仿射非线性系统 (1.3.37), 我们有没有相应的结构呢? 实际上, $f(x)$、$g_i(x)$, $i=1,\cdots,m$ 可以看作流形 M 上的向量场, 它与常微分方程理论中讲的向量场本质上是一致的. 记 M 上的光滑向量场集合为 $V(M)$, 定义一个向量场的 "乘法", 称为李括号, 用 $[\cdot,\cdot]:V(M)\times V(M)\to V(M)$ 表示. 它的严格定义在本书以后会详细讨论, 粗略地说, 如果两个向量场 X, Y 在坐标 x 下表示为

$$X(x)=(a_1(x),\cdots,a_n(x))^{\mathrm{T}},\quad Y(x)=(b_1(x),\cdots,b_n(x))^{\mathrm{T}},$$

那么它们的李括号可表示为

$$[X,Y]=\frac{\partial Y(x)}{\partial x}X(x)-\frac{\partial X(x)}{\partial x}Y(x). \tag{1.3.39}$$

这里

$$\frac{\partial X(x)}{\partial x}=\begin{bmatrix}\frac{\partial a_1(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial a_1(x)}{\partial x_n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial a_n(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial a_n(x)}{\partial x_n}\end{bmatrix}$$

是 $X(x)$ 的 Jacobi 矩阵.

$[X,Y]$ 也称 Y 对 X 的李导数, 记作 $\mathrm{ad}_X\,Y$. 我们还可以定义高阶李导数如下

$$\begin{cases}\mathrm{ad}_X\,Y=[X,Y],\\ \mathrm{ad}_X^{k+1}\,Y=[X,\mathrm{ad}_X^k\,Y],\quad k\geqslant 1.\end{cases}$$

设 S 为一个由向量场集合在 $\mathbb{R}$ 上生成的线性空间, 如果 S 对李括号封闭, 即对任意两个向量场 $X,Y\in S$, 均有 $[X,Y]\in S$, 则 S 称为一个李代数. 如果 S 不是一个李代数, 则包含 S 的最小李代数记作 $\{S\}_{LA}$, 它也称由 S 生成的李代数.

有了这些概念, 我们就可以讨论非线性系统的能控性问题了. 对于仿射非线性系统 (1.3.37), 先定义一个李代数

$$\mathcal{L}_{sa}=\left\{\mathrm{ad}_f^k\,g_i\;\middle|\;i=1,\cdots,m;k\geqslant 0\right\}_{LA}, \tag{1.3.40}$$

称它为强可达李代数 (strong accessibility Lie algebra), 它可以看作一个分布, 即在每一点 $x\in M$ 它是 n 维空间 $\mathbb{R}^n$ 的一个子空间.

$\mathcal{L}_{sa}$ 是判定非线性系统能控性的一个重要准则, 可以证明, 如果系统完全能控, 则满足如下的能控性秩条件

$$\mathrm{rank}\,(\mathcal{L}_{sa}(x))=n,\quad x\in M. \tag{1.3.41}$$

当然, 要让它成为充分条件, 还需要一点附加要求. 这里就不详述了, 有兴趣的读者可参见有关参考书, 例如文献 [83].

最后想说一下, 线性系统 (1.3.36) 显然是仿射非线性系统 (1.3.37) 的特例. 那么, 对于线性系统强可达李代数 $\mathcal{L}_{sa}$ 是什么呢? 实际上, 一算便知, 它就是能控性矩阵 $\mathcal{C}$. □

在上面的讨论中, 我们碰到了 "流形"、 "向量场"、 "李代数"、 "分布" 等, 它们都是微分几何中最基本的概念, 我们将在以后详细讨论这些问题 (参见第 9 章).

前面讨论的问题都是有穷维系统的情况, 在控制理论中还讨论无穷维系统的情况, 控制中将它称为分布参数系统.

1.3.3 系统优化

下面, 再来看看优化问题. 实际上, 优化是控制的一个基本目的. 最优控制是现代控制理论的一个重要组成部分. 1.2 节曾经提到, 现代控制理论有三个代表性工作: 卡尔曼的状态空间方法 (及卡尔曼滤波)、庞特里亚金的极大值原理、贝尔曼的动态规划. 其实, 后两者都是关于优化及最优控制问题的. 下面举几个例子说明优化中的数学问题.

例 1.3.11 (变分法) 变分法是最优控制的一个基本工具[89], 最古老的变分问题是贝努利于 1696 年提出的最速落径问题: 在桌子边上一点 A 和地面一点 B 之间找到一条轨线, 一个小球从 A 滚到 B 的时间最短.

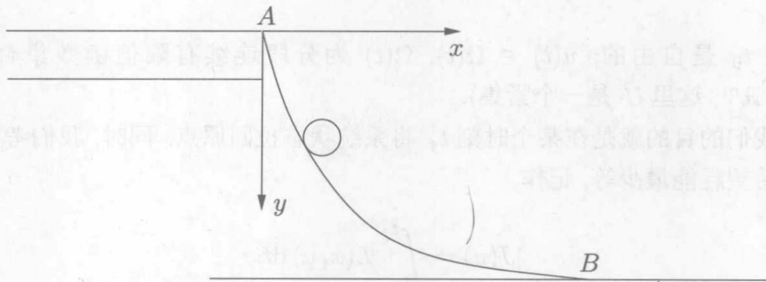


图 1.3.3 最速落径

设坐标 x-y 如图 1.3.3 所示, 则坐标 $A=A(0,0)$, $B=B(x_1,y_1)$. 记轨线为 $y=y(x)$, 则滚动时间为

$$T(y(x))=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^{x_1}\frac{\sqrt{1-(y')^2}}{\sqrt{y}}\,\mathrm{d}x, \tag{1.3.42}$$

这里

$$y(0)=0,\quad y(x_1)=y_1.$$

一般地说, 考虑

$$L(y)=\int_{x_1}^{x_2}F(x,y,y')\,\mathrm{d}x$$

的极值问题, 这与微积分中求函数极值不同. 这里 "变量" y 本身是一个函数, 因此, $L(y)$ 称为一个泛函, 求泛函极值的方法称为变分法-变分法. 变分法证明, 最优解满足下面的欧拉-拉格朗日方程

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0. \tag{1.3.43}$$

利用欧拉-拉格朗日方程不难证明, 最速落径是一条滚圆线, 满足

$$\begin{cases} x = \frac{C}{2}(\theta - \sin(\theta)), \\ y = \frac{C}{2}(1 - \cos(\theta)). \end{cases} \tag{1.3.44}$$

此处, C 是滚圆直径, 它可由终点坐标求得. □

通过下面的例子, 我们对动态规划作一简单介绍.

例 1.3.12 (动态规划) 贝尔曼的动态规划的基本出发点称为最优性原理. 最优性原理断言, 任何一个最优过程, 从过程进行中的任意一点到最后的这个子过程也必是最优的. 例如对有限步离散过程, 我们可以通过从最后一步开始倒向地逐步寻优得到最优解.

下面看一类连续系统的控制问题. 设系统为

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u), \\ x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \quad x(t_f) = 0. \end{cases} \tag{1.3.45}$$

这里, $t_f > t_0$ 是自由的; $u(t) \in \Omega(t)$, $\Omega(t)$ 为分段连续有限值函数集合(对每个 t, $\Omega(t) \subset U \subset \mathbb{R}^m$, 这里 U 是一个紧集).

因此, 我们的目的就是在某个时刻 t_f 将系统状态拉回原点. 同时, 我们考虑一个性能指标, 例如希望耗能最少等, 记作

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f} L(x, u)\,\mathrm{d}t. \tag{1.3.46}$$

于是, 优化问题是找到最优控制 $u^*(t) \in \Omega(t)$, 使式 (1.3.45) 成立, 则对任一满足式 (1.3.45) 的 u 有

$$J(u^*) \leqslant J(u).$$

定义 $V(x, t)$ 为初始值为 x, 初始时刻为 t 的最优值, 那么, 根据最优性原理, 不难推出如下方程[17]

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} + \min\limits_{u(t) \in \Omega(t)} \left\{ \frac{\partial V}{\partial x} f(x, u) + L(x, u) \right\} = 0, \\ V(0, t_f) = 0. \end{cases} \tag{1.3.47}$$

该方程称为带边界值条件的 Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) 方程. 显然, 如果 u^* 是最优控制, x^* 是相应的最优轨道, 则对任意 $t_0 \leqslant t \leqslant t_f$ 有

$$J(u^*) = J^*(u^*) = V(x^*(t), t).$$

□

最后, 我们对庞特里亚金极大值原理作一简单介绍[3].

例 1.3.13 (庞特里亚金极大值原理) 庞特里亚金极大值原理 (也称极小值原理) 是变分法在控制系统中的应用. 根据控制系统不同的边界条件与优化指标, 由变分法导出的极大值原理形式上会有所不同, 详细讨论可见文献 [35]. 下面讨论一种最普通情况.

考虑如下的优化问题. 系统

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x(t), u(t)), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{1.3.48}$$

控制集为有界函数, 即

$$u(t) \in U \subset \mathbb{R}^m, \tag{1.3.49}$$

U 为一紧集. 性能指标为

$$\min_u J = \int_{t_0}^{t_f} L(x(t), u(t))\,\mathrm{d}t, \tag{1.3.50}$$

这里 t_0, t_f 为定常值.

引入伴随向量 $\lambda(t) = (\lambda_1(t), \cdots, \lambda_n(t))^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$, 定义哈密顿量为

$$H(x(t), u(t), \lambda) = L(x(t), u(t)) + \lambda(t)^{\mathrm{T}} f(x(t), u(t)). \tag{1.3.51}$$

那么, 最优控制满足如下的必要条件:

(1) 正则方程

$$\begin{cases} \dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \\ \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda}. \end{cases} \tag{1.3.52}$$

(2) 边界条件

$$x(t_0) = x_0. \tag{1.3.53}$$

(3) 横截条件

$$\lambda(t_f) = 0. \tag{1.3.54}$$

(4) 极小值条件

$$H(x^*, u^*, \lambda^*) = \min_{u \in U} H(x^*, u, \lambda^*). \tag{1.3.55}$$

这里, u^* 为最优控制, x^* 和 λ^* 分别为相应的最优状态轨线和最优伴随向量. 由式 (1.3.55) 可知, 它们也使哈密顿函数达到最优, 这就是庞特里亚金极大值原理. □

近年来, 代数拓扑的方法在动力系统研究中得到许多应用, 下面来看两个例子.

例 1.3.14 图拓扑在目前多主体系统 (multi-agent systems) 研究中起着重要作用. 一个有向图, 它由顶点和某些连接顶点的有向边组成 (见图 1.3.4), 于是每个顶点都有入度 (指向它的边数) 与出度 (从它向外的边数, 记为 N_o). 出度不为 1 的顶点称临界点. 一个临界点 v 的指数定义为

$$i(v) = \begin{cases} 0, & N_o = 0, \\ 1, & N_o > 1. \end{cases}$$

当 $i(v) = 1$ 时, 其重数定义为

$$m(v) = N_o - 1.$$

一个有向图的欧拉特征数定义为

$$\chi(G) := N_v - N_e,$$

这里 N_v 为顶点数, N_e 为边数. 可以证明

$$\chi(G) = m_0 - m_1, \tag{1.3.56}$$

这里, m_0 为 $i(v) = 0$ 的临界点数, m_1 为 $i(v) = 1$ 的临界点的重数之和.

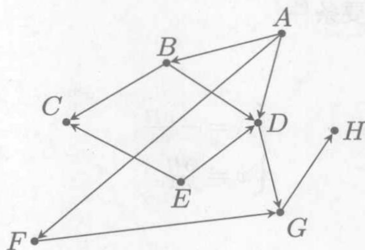


图 1.3.4 有向图的欧拉特征数

下面我们验证图 1.3.4: $i(v) = 0$ 的临界点有 C, H; $i(v) = 1$ 的临界点及其重数为

$$A : m(A) = 2; \quad B : m(B) = 1; \quad E : m(E) = 1.$$

则

$$m_0 = 1, \quad m_1 = 2 + 1 + 1 = 4, \quad x_0 - m_1 = -2.$$

而显然

$$\chi(G) = N_v - N_e = 8 - 10 = -2.$$

故式 (1.3.56) 成立. □

1.3.4 代数拓扑方法

近年来, 同伦、同调等代数拓扑工具被越来越多地应用于动力系统分析, 特别是同调群方法在多主体系统的邻接图结构分析中十分有用, 下面对 Floer 同调群作一简单介绍.

在一个有势场中考虑一个负梯度势函数系统

$$\dot{x} = -DF(x), \quad x \in X, \tag{1.3.57}$$

X 为一维流形. 一个点 x_0 称为临界点, 如果

$$Df(x_0) = 0.$$

一个临界点称为非退化的, 如果在该点的 Hessian 矩阵

$$\mathrm{Hess}(F)(x_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_n} \end{bmatrix}$$

没有零特征根. 注意到 Hessian 矩阵是实对称的, 在非退化临界点 x_0 它只有非零实特征值. 定义该点的指数为

$$i(x_0) = D^2F(x_0) \text{ 的负特征值个数}.$$

假定 $F(x)$ 光滑 (实际上只要本质光滑 (generic smooth) 就够了), 而且所有的临界点都非退化, 那么两个临界点 p, q 之间是否有从 p 流向 q 的式 (1.3.57) 的解呢? 即解 $x(t)$ 满足

$$\lim_{t\to-\infty} x(t) = p, \quad \lim_{t\to+\infty} x(t) = q.$$

实际上所有这样的解构成一些不变流形, 它们是 p 的不稳定子流形同时也是 q 的稳定子流形. 这在工程系统的稳定性分析中十分重要[62, 119, 66]. 那么, 这样的流形是否存在呢? 微分动力系统理论告诉我们, 如果它存在, 它的维数为

$$i(p) - i(q).$$

因此, 我们知道当$i(p) \leqslant i(q)$ 时, 它一定不存在. 这个观念在图拓扑中很有用. 这时, 我们感兴趣的是一维解轨线, 即 $i(p) = i(q) + 1$ 的情况.

设 $i(p) = i(q) + 1$. 为构造同调群, 定义

$$\rho(p,q) = [\,\text{从 } p \text{ 到 } q \text{ 一维解轨线个数}\,]\ (\mathrm{mod}\ 2)$$

即如果有奇数条解轨线, $\rho(p,q) = 1$; 如果有偶数条解轨线, $\rho(p,q) = 0$.

那么, 我们定义边界算子 ∂ 为

$$\partial := \sum_{i(q)=i(p)-1} \rho(p,q)q. \tag{1.3.58}$$

这个求和是在由临界点在 $\mathbb{Z}_2$ 上张出来的向量空间上进行的, 即

$$(aP_1+bP_2)+(cP_1+dP_2)=(a+c)(\bmod 2)p_1+(b+d)(\bmod 2)p_2.$$

显然, 这个向量空间在加法意义下是一个阿贝尔 (Abel) 群.

现在, 将 F 的指数为 k 的临界点集记作 V_k, $k=0,1,2,\cdots,n$, 则边界算子为

$$\partial_k: V_k \to V_{k-1},$$

这是一个群同态. Floer 证明了

$$\partial_{i-1}\circ\partial_i=0,\quad i=1,\cdots,n. \tag{1.3.59}$$

于是显然

$$\operatorname{im}(\partial_{i+1})\subset\ker(\partial_i). \tag{1.3.60}$$

从群的意义上讲, $\operatorname{im}(\partial_{i+1})\lhd\ker(\partial_i)$, 即 $\operatorname{im}(\partial_{i+1})$ 为 $\ker(\partial_i)$ 的正规子群. 于是, 我们可以定义商群

$$H_i(X,\mathbb{Z}_2)=\ker(\partial_i)/\operatorname{im}(\partial_{i+1}),\quad i=0,1,\cdots,n. \tag{1.3.61}$$

$H_i(X,\mathbb{Z}_2)$ 称为 i 阶同调群.

有趣的是, $H_i(X,\mathbb{Z}_2)$ 与 F 的选择无关, 只要 F 满足上述假设即可.

$$b_i(X)=\dim(H_i(X,\mathbb{Z}_2)), i=0,1,\cdots,n$$

称为 X 的 Betti 数;

$$\chi(X)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i b_i(X)$$

称为 X 的欧拉特征数. 下面给一个具体例子.

例 1.3.15　设 X 为一竖立轮胎, F 为其上点的高度. 显然, F 有四个邻界点: P、Q、R、S, 并且, $i(P)=2$, 因为它是局部极大点, $i(Q)=i(R)=1$, 因为它们是鞍点, $i(S)=0$, 因为它是局部极小点, 相应的连接积分曲线如图 1.3.5 所示. 现在

(1) $\partial P=2Q+2R=0\Rightarrow\ker(\partial_2)=\operatorname{span}(P)$, $\operatorname{im}(\pi_2)=\{0\}$;

(2) $\partial Q=\partial R=2S=0\Rightarrow\ker(\partial_1)=\operatorname{span}(Q,R)$, $\operatorname{im}(\pi_1)=\{0\}$;

(3) $\partial S=0\Rightarrow\ker(\partial_0)=\operatorname{span}(S)$.

因此

$$H_2(X,\mathbb{Z}_2)=\ker(\partial_2)=(aP\,|\,a\in\mathbb{Z}_2);$$

$$H_1(X,\mathbb{Z}_2)=\ker(\partial_1)/\operatorname{im}(\partial_2)=(aQ+bR\,|\,a,b\in\mathbb{Z}_2);$$

$$H_0(X,\mathbb{Z}_2)=\ker(\partial_0)/\operatorname{im}(\partial_1)=(aS\,|\,a\in\mathbb{Z}_2).$$

故 X 的 Betti 数为 $b_2(X)=1$, $b_1(X)=2$, $b_0(X)=1$; 欧拉特征数为 $\chi(X)=1-2+1=0$.

下面定义同伦: 设 X, Y 为两个拓扑空间 (参见第 4 章), $f, g: X \to Y$ 为连续映射, f 与 g 称为同伦映射, 如果存在一个连续函数 $H(t,x):[0,1]\times X \to Y$, 使得

$$H(0,x)=f(x), \quad H(1,x)=g(x).$$

记作 $f \sim g$. 两个拓扑空间 X, Y 称为同伦空间, 如果存在两个连续函数 $f: X \to Y$, $g: Y \to X$, 使得

$$g \circ f \sim id_X, \quad f \circ g \sim id_Y,$$

这里, id_X, id_Y 分别为 X, Y 上的恒等函数.

如同一般同调群一样 (参见第 6 章), Floer 同调群是同伦不变的[82]. □

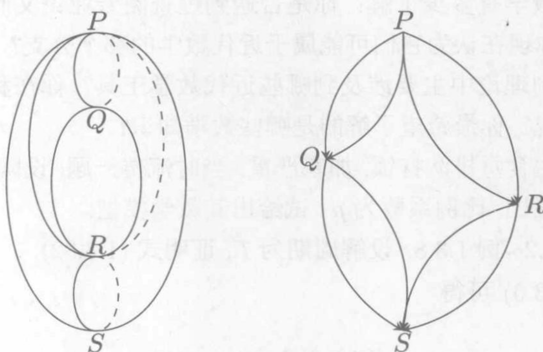


图 1.3.5 轮胎的同调群

代数几何研究多元多项式解的几何结构, 是一门较艰深的数学分支. 代数几何方法在控制系统中的应用, 第 9 章有一节专门论及, 因为其概念要求太多的预备知识, 这里就先不提及了.

总之, 系统与控制中用到的数学工具是极为广泛的, 而且, 随着学科的发展, 越来越多的近代数学工具在其中得到应用甚至得到新的发展. 对于年轻的学生或学者而言, 打下一个良好的数学基础比发表一些无关紧要甚至滥竽充数的文章要重要得多.

1.4 注释与参考

本章提到的对数学的描述, 主要参考文献 [26, 84].

关于近代数学的三大组成部分, 是较常见的说法, 例如见文献 [57].

即使我们只是将数学作为一个工具, 对数学的历史和它的整体结构有一个大致清晰的了解也十分必要. 有关数学的故事多半都很精彩, 吴文俊先生主编的《世界著名数学家传记》[34]值得一读, 几乎每个数学家都有自己不俗的传世故事.

维纳 (N. Wiener, 1894–1964) 被称为控制论的创始人, 他 14 岁大学毕业, 18 岁获哈佛大学博士学位. 在创立控制论之前, 他就已经在调和分析、随机过程等数学领域作出重要贡献. 他有一本书, 书名就叫《我是一个数学家》(*I Am A Mathematician*).

关于控制理论的专著很多: 线性系统的经典著作是文献 [116], 国内中文专著有文献 [35, 21, 42] 等; 非线性系统的专著很多, 较经典的有文献 [79, 97, 86], 国内的有文献 [11, 13, 22, 19] 等, 值得参考. 就控制理论而言, 较全面而深入的是文献 [17].

关于控制理论在中国的发展情况, 可参阅文献 [90, 59].

关于图的拓扑结构及同伦, 同调在动力系统分析中的应用可参见文献 [82].

1.5 习题

1.1 什么是数学? 什么是纯粹数学与应用数学? 为什么说系统与控制理论是一门应用数学?

1.2 你对近代数学有多少了解? 你是否遇到过查阅专业论文时不了解其数学背景或数学方法的时候? 你现在认为它们可能属于近代数学的哪个分支?

1.3 系统与控制理论中主要涉及到哪些近代数学工具? 你在科学研究中是否遇到过数学工具不足的情况? 你最希望了解的是哪些数学知识?

1.4 某学校学生食堂排队打饭, 加塞严重. 当时流传一题: 设队长为 L, 卖饭速度为 v, 加塞速度与队长成正比, 比例系数为 μ. 试给出其数学模型.

1.5 考察例 1.3.2~例 1.3.8. 设解周期为 T, 证明式 (1.3.32).

[提示: 由式 (1.3.6) 可得

$$\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right) = a - by.$$

两边对一个周期积分即得 $\bar{y}$.]

1.6 图 1.5.1 所示的 Solow 模型称为经济动力学基本模型[77], 这里: Q 为产出, C 为产品, S 为再生产投入, L 为劳力, K 为资本. Solow 模型的基本关系式如下

$$Q = F(K, L), \tag{1.5.1}$$

这里, F 称为生产函数;

$$Q = C + S; \tag{1.5.2}$$

$$S = sQ, \quad 0 < s < 1, \ s = \text{const}. \tag{1.5.3}$$

$$\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t} = S - \mu K, \quad 0 < \mu < 1, \ \mu = \text{const}. \tag{1.5.4}$$

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \eta L, \quad \eta = \text{const}. \tag{1.5.5}$$

设生产函数为一齐次函数, 即 $F(K, L) = Lf(\lambda)$, 这里 $\lambda = K/L > 0$. (1) 找出关于 λ 的自治系统; (2) 设 ① $f(\lambda) = \lambda^2$, ② $f(\lambda) = \sqrt{\lambda}$. 分别找出平衡增加策略 (即 λ 的平衡点).

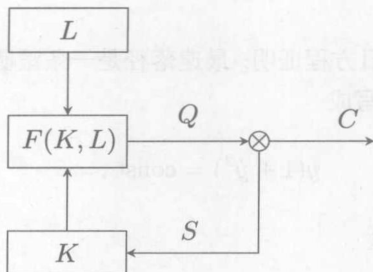


图 1.5.1　Solow 模型

1.7 系统

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R} \tag{1.5.6}$$

称为可控的, 如果对任意两点 $p, q \in \mathbb{R}^n$, 存在控制函数 $u(t)$, 使得系统 $\dot{x} = Ax + Bu(t)$ 满足 $x(0) = p$, $x(T) = q$, 即控制 $u(t)$ 使系统轨线从 p 出发, 在时刻 T 到达 q. 今设系统 (1.5.6) 可控, $\xi(t) : [0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ 为已知一致连续函数. 构造系统

$$\dot{x} = Ax + \xi + Bu, \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}. \tag{1.5.7}$$

证明系统 (1.5.7) 也可控.

[提示: 构造系统

$$\dot{z} = Az + Bu. \tag{1.5.8}$$

设 $z - x = y$, 则 $\dot{y} = Ay - \xi$. 根据 $y(t)$ 构造系统 (1.5.8) 的控制器.]

1.8 考虑线性系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 + u. \end{cases} \tag{1.5.9}$$

证明系统 (1.5.9) 可控.

1.9 考虑非线性系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2^2 \\ \dot{x}_2 = \sin(x_1 + x_2) + u. \end{cases} \tag{1.5.10}$$

计算系统 (1.5.10) 的强可达李代数.

1.10 回顾例 1.3.11.

(1) 由能量守恒 $mgh = \frac{1}{2}mv^2$ 及

$$v = \frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} = \frac{\sqrt{1 + \dot{y}^2}\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

证明式 (1.3.42).

(2) 试利用欧拉-拉格朗日方程证明: 最速落径是一条滚圆线, 满足式 (1.3.44).

[提示: 先证欧拉方程可写成

$$y(1+\dot{y}^2) = \text{const} := c.$$

然后设 $\dot{y} = \cot(\theta)$. 于是

$$y = \frac{c}{1+\dot{y}^2} = \frac{c}{2}\left(1-\cos(2\theta)\right);$$

$$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}y}{\dot{y}} = c(1-\cos(2\theta)\mathrm{d}\theta.]$$

1.11 试用极大值原理解如下最优控制问题: 系统为

$$\dot{x} = x - u, \quad x(0) = 4.$$

控制约束为

$$0.5 \leqslant u \leqslant 1.$$

优化指标

$$\min J = \int_0^1 (x+u)\,\mathrm{d}t.$$

[提示: 为使 H 极小, 可知

$$u^*(t) = \begin{cases} 1, & \lambda > 1; \\ 0.5, & \lambda < 1. \end{cases}$$

然后由正则方程与横截条件解出 λ^*, 则 u^* 可知, 再代入状态方程得到最优轨线 x^*.]

第 2 章



测度与积分

微积分是在 17 世纪主要由牛顿 (Newton) 和莱布尼茨 (Leibniz) 创立的. 牛顿的《流数简论》和莱布尼茨的《一种求极大与极小值和求切线的新方法》等一系列论文标志着微积分的诞生, 但是无论是牛顿还是莱布尼茨在他们创立的新算法中, 都大量使用了几何直观. 因此, 他们的微积分是不严格的, 特别是在使用无限小和级数求和等概念上十分随意和混乱, 并因此带来了许多矛盾和错误. 这使得早期的微积分受到了许多非难和攻击.

微积分在解决实际问题上的无比威力与它在概念及逻辑上的混乱和矛盾促使许多 18 世纪的数学家们去努力将其严格化, 在严格化基础上重建微积分的努力到 19 世纪初获得成效. 法国数学家柯西 (Cauchy) 的工作具有代表性意义, 他对变量、函数、极限、连续性、导数、微分、收敛等概念都给出了明确的定义. 随后, 德国数学家魏尔斯特拉斯 (Weirstrass) 创立了 ε-δ 语言, 使柯西的定义达到今天所具有的严密性.

但是还有一个根本性的问题没有解决, 就是实数和它的完备性, 这是数学分析的一块基石, 没有它, 整个微积分就要崩塌. 例如, 微积分中一个熟知的结论是"单调有界序列有极限". 显然, 这个结论与实数的完备性有关, 实际上它们是等价的. 因此, 只有实数的定义和它的完备性得到证明, 微积分的严格化才能最后完成, 这个任务主要是由戴德金 (Dedekind)、康托 (Cantor) 等人完成的.

本章介绍实分析的基本内容, 主要包括实数的严格定义及其完备性、集合论与描述集合"大小"的势、Lebesgue 测度与可测函数、Lebesgue 积分等.

2.1 集合与势

在现代分析中, 集合论被广泛引用. 实际上, 读者已经大量使用过集合论中的记号和概念. 为方便起见, 这里我们简单介绍集合论的概念、记号和基本性质.

设 X 为研究的基本集合, 有时也称作空间. 通常情况下, $A, B, C, \cdots$ 表示 X 的子集, $A \subset B$ 表示 A 是 B 的一部分, 读作 A 包含于 B, 或者 B 包含 A; $a \in A$ 表示 a 是 A 的一个元 (素), 读作 a 属于 A; 不含任何元素的集合叫做空集, 记作 $\varnothing$. 集合论中的四个最基本的运算是:

并运算: $A \cup B = \{x \in X \,|\, x \in A \text{ 或 } x \in B\}$;

交运算: $A \cap B = \{x \in X \,|\, x \in A \text{ 且 } x \in B\}$;

余运算: $A^c = \{x \in X \,|\, x \notin A\}$;

差运算: $A \backslash B = \{x \in X \,|\, x \in A \text{ 但 } x \notin B\}$.

有时也会用到集合的对称差运算: $A\Delta B=(A\backslash B)\cup(B\backslash A)$. 有关集合运算的基本性质反映在下面的定理中.

定理 2.1.1 设 A, B 为 X 的子集. 那么我们有

(1) 交换律: $A\cup B=B\cup A$, $A\cap B=B\cap A$;

(2) 结合律: $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$, $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$;

(3) 分配律: $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$, $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$;

(4) 对偶律: $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$, $(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$;

(5) 互补律: $\varnothing^c=X$, $X^c=\varnothing$, $(A^c)^c=A$, $A\cup A^c=X$, $A\cap A^c=\varnothing$.

证明 这里我们以分配律 (3) 的第一式为例, 其余部分的证明是类似的, 请读者自行补足. 设 $x\in A\cup(B\cap C)$, 则或者 $x\in A$, 或者 $x\in B\cap C$, 而后者意味着 $x\in B$ 且 $x\in C$. 因此, $x\in A\cup B$ 且 $x\in A\cup C$, 从而 $x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$. 反之, 设 $x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$, 则 $x\in(A\cup B)$ 且 $x\in(A\cup C)$. 今若 $x\notin A$, 则 $x\in B\cap C$, 从而必定有 $x\in A\cup(B\cap C)$, 因此 $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$. □

类似地, 可以定义多个集合的并集与交集. 设有集合族 $\{A_\lambda\mid\lambda\in\Lambda\}$, 其中 Λ 为某个指标集, 规定其并集和交集如下

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda=\{x\mid\exists\lambda\in\Lambda,x\in A_\lambda\},$$

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda=\{x\mid\forall\lambda\in\Lambda,x\in A_\lambda\}.$$

交换律和结合律等也适用于多个集合的并集与交集运算. 例如, 分配律和对偶律可以写成

分配律: $A\bigcup\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda\right)=\bigcap_{\lambda\in\Lambda}(A\bigcup B_\lambda)$, $A\bigcap\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda\right)=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(A\bigcap B_\lambda)$;

对偶律: $\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\right)^c=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda^c$, $\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\right)^c=\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda^c$.

对偶律也称 De Morgan 公式.

今后, 为记号简单起见, $\{A_n\}$ 表示一序列. 特别地, 当 A_n 是集合时 $\{A_n\}$ 就是集列, 而当 A_n 表示数时 $\{A_n\}$ 就是数列. 偶尔我们用 $\{x\}$ 表示仅含元 x 的单点集, 但会作特别申明.

定义 2.1.1 设 $\{A_n\}$ 是一集合列, 记

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k,\quad \underline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k,$$

分别称为集合列 $\{A_n\}$ 的上极限和下极限. 如果

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n=A,$$

则称 A 为 $\{A_n\}$ 的极限, 记作 $\lim_{n\to\infty}A_n=A$, 并称 $\{A_n\}$ 为收敛列.

由定义易见, $x \in \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n \iff$ 存在一严格递增的正整数列 $\{n_k\}$, 使得 $x \in A_{n_k}$, $\forall k \geqslant 1$; $x \in \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n \iff$ 存在一自然数 $N = N(x)$, 使得 $x \in A_n, \forall n > N$.

例 2.1.1 设一序列 $\{A_n\}$ 满足 $A_{2k-1} = \{1\}, A_{2k} = \{1\}, k = 1, 2, \cdots$. 那么

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \{1, 2\};$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \{1\}.$$

□

定理 2.1.2 单调集合列必定是收敛的, 更确切地说, 若 $\{A_n\}$ 是升列, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$; 而若 $\{A_n\}$ 是降列, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

这个定理的证明留作练习.

集合的一个重要性质是它的"大小". 当一个集合只含有限个元素的时候, 我们称其为有限集; 不是有限集的集合称为无限集. 在集合的抽象理论研究中, 对集合的具体对象并不感兴趣, 重要的是集合所含元素的个数. 实际上, 如果两个有限集 A 和 B 一样大, 则可以在其元素之间建立一个一对一的对应关系 (映射) $\varphi : A \to B$. 这里映射 φ 称为一一或一对一, 是指 $a_1, a_2 \in A$, 且 $a_1 \neq a_2$, 则 $\varphi(a_1) \neq \varphi(a_2)$; 并且对于任意 $b \in B$, 存在 $a \in A$ 使得 $\varphi(a) = b$, 即 φ 还是一个 A 到 B 的满射.

定义 2.1.2 能和自然数集 $\mathbb{N}$ 一一对应的集合称为可数集.

可数在近代数学中起着重要的作用, 例如拓扑中的第二可数公理, 泛函分析中的可分空间等都基于可数性概念. 自然数是最基本的可数集: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$, 它的元素按 $1, 2, 3, \cdots$ 排列, 每个数都知道什么时候被数到.

定理 2.1.3 (1) 可数集的子集或者可数或者有限; (2) 从可数集中减去有限子集, 其余集仍可数; (3) 可数个可数集之并仍然是可数集.

证明 (1) 和 (2) 显见, 我们证明 (3). 设 $\{A_n \mid n = 1, 2, \cdots\}$ 为可数个可数集组成的集族, $A_n = \{a_k^n \mid k = 1, 2, \cdots\}$. 现在我们把 $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ 的元素排为

$$\{a_1^1;\ a_2^1, a_1^2;\ a_3^1, a_2^2, a_1^3;\ a_4^1, a_3^2, a_2^3, a_1^4;\ \cdots\}.$$

定义映射 $\varphi(a_k^n) = \frac{(n+k-1)(n+k-2)}{2} + n$, 这里 $n, k = 1, 2, \cdots$ 容易证明 $\varphi : \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \to \mathbb{N}$ 是一一映射. □

下面给出一些例子.

例 2.1.2 奇数集、偶数集、整数集和有理数集都是可数的.

我们仅证有理数集 $\mathbb{Q}$ 的可数性, 其余部分的证明留作练习. 我们用 $\mathbb{N}$ 表示全体自然数集. 对于任意 $n \in \mathbb{N}$, 令 $A_n = \{k/n \mid k \in \mathbb{N}\}$, 则正有理数全体可表示成 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. 由于

每个 A_n 是可数的, 故正有理数全体也是可数的, 从而负有理数全体也是可数的. 由此即得 $\mathbb{Q}$ 的可数性.

有限集和无限集的最大差别是, 有限集不能与它的真子集一一对应, 而对无限集总存在一个真子集, 使它与其真子集一一对应.

那么, 自然会问, 是不是所有的无限集都是可数的呢? 如果对, 那么所有的无限集就都一样 "大小" 了. 但根据 2.2 节中的定理 2.2.8, 答案是否定的, 即实数集 $\mathbb{R}$ 就是一个不可数集. □

在集合论中, 若两个集合之间可以建立一一对应, 则认为这两个集合的 "大小" 是相同的. 反映集合 "大小" 的这个量称为势, 集合 A 的势用 $|A|$ 表示. 有限集的势就是它的元素个数. 可数集的势用 $\aleph_0$ 表示, 称可数势. 实数集 $\mathbb{R}$ 的势用 $\aleph$ 来表示, 称连续势.

给定两个集合 A 和 B, 若 A 和 B 的某个子集一一对应, 同时 A 与 B 又不可能一一对应, 则称 A 的势比 B 的势大. 那么是否可能出现 A 的势比 B 的势大, 同时 B 的势又比 A 的势大呢? 这是不可能的, 因为我们有如下结论.

定理 2.1.4 给定两个集合 A 和 B, 若 A 与 B 的某个子集 B_0 一一对应, 同时 B 又与 A 的某个子集 A_0 一一对应, 则 A 和 B 必一一对应, 即 A 与 B 有相同的势.

证明 设 f 是 A 与 B_0 之间的一一对应, 而 g 是 B 与 A_0 之间的一一对应. 令

$$A \setminus A_0 = A_1,\ f(A_1) = B_1,$$

$$g(B_1) = A_2,\ f(A_2) = B_2,$$

$$g(B_2) = A_3,\ f(A_3) = B_3,$$

$$\cdots\cdots$$

注意 f 和 g 都是一一映射, 并且 $A_2 \subset A_0$, 故 $A_1 \cap A_2 = \varnothing$. 于是 $B_1 \cap B_2 = \varnothing$. 进而不难验证 $A_1, A_2, \cdots$ 互不相交, 并且 $B_1, B_2, \cdots$ 也互不相交. 从映射 f 可知, 对于任意 n, A_n 和 B_n 之间一一对应, 故 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ 和 $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ 之间也一一对应; 同理从映射 g 可知, B 与 A_0 之间一一对应, 并且, 对于任意 n, B_n 和 A_{n+1} 之间一一对应, 因此 $B \setminus (\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n)$ 与 $A_0 \setminus (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_{n+1}) = A \setminus (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)$ 之间也一一对应. 由此可见, $A = A \setminus (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \bigcup (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)$ 与 $B = B \setminus (\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) \bigcup (\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n)$ 之间一一对应. □

有了可数势与连续势, 一个自然的问题就是连续势是不是最大的势呢? 为此我们考虑集合 A 的所有子集构成的集合, 记作 2^A. 一般地, 若 A 是一个含 n 个元的集合, 则它总共有 2^n 个子集. 这就启发我们采用记号 2^A 表示 A 的所有子集构成的集合, 称作 A 的幂集.

定理 2.1.5 设 A 为一非空集合, 则 (1) 存在 2^A 的一个子集, 它与 A 一一对应; (2) 2^A 与 A 不可能一一对应.

证明 (1) 作 2^A 的子集 $M = \{\{x\} \mid x \in A\}$, 这里 $\{x\}$ 表示仅含元素 x 的单点集. 显然, A 与 M 一一对应.

(2) 假定 A 与 2^A 间存在一一对应, 并设对应于 $x \in A$ 的 2^A 的元 (即 A 的子集) 记作 M_x. 令

$$P = \{x \in A \mid x \notin M_x\}.$$

P 是 A 的一子集, 设它对应于 A 中的元 x^*, 即 $M_{x^*} = P$. 如果 $x^* \in P$, 则 $x^* \notin M_{x^*}$, 矛盾; 而若 $x^* \notin P$, 则 $x^* \notin M_{x^*}$, 从而 $x^* \in P$, 又是矛盾. 这就证明了 2^A 与 A 不可能一一对应. □

由定理 2.1.5 可知, 对于非空集 A, 有 $|2^A| > |A|$, 特别有 $|2^{\mathbb{R}}| > \aleph$, 所以不存在最大的势.

还有一个有趣的问题, 即是否有一个集合, 它的势处在可数势 $\aleph_0$ 与 $\aleph$ 之间, 即比有理数多, 又比实数少的集合.

这个问题困惑了数学家一百多年, 这就是康托提出的 "连续统假定"; 即没有一个势数界于 $\aleph_0$ 与 $\aleph$ 之间. 哥德尔 (Gödel) 的不完备性定理及其后的一系列工作证明了连续统假定对于数学分析就像平行公设对于几何学一样, 是不能证明的. 即假定它或假定它的反面, 都可以得到相容的数学体系. 因此, 近代分析一般将其作为公理使用.

在结束本节之前, 想对集合论再说几句. 有人说 "集合" 是数学中唯一没有定义好而又广泛使用的概念, 这话不无道理. 笔者曾经背过的定义是: "具有某种性质的事物的全体, 称为具有这种性质的事物的集." 显然这句话等于没说. 数学家们曾努力给集合下一个确切的定义, 但这些努力被 Russell (罗素) 的悖论打破了. 罗素对其悖论有一个通俗的说明: 一个村里有一个理发师, 他宣布给所有不为自己理发的人理发. 把理发师理发的对象记作 A, 那么理发师自己属不属于 A 呢? 如果他属于 A, 按照 A 的定义, 理发师不为自己理发, 但既然属于 A, 理发师又必须为自己理发. 因此他不属于 A. 同样, 如果他不属于 A, 又可以推出他属于 A.

当然, 不要因为罗素悖论而不敢使用集合论. 在这里, 我们不做进一步的探讨, 但在使用集合论时, 要注意, 集合中的元素必须是直接定义好的.

2.2 实数及其完备性

本节介绍实数定义及其完备性的戴德金理论. 将有理数全体记作 $\mathbb{Q}$. 把 $\mathbb{Q}$ 分成两个非空集合 A 和 A', 使得

(1) $\mathbb{Q} = A \cup A'$, 且 $A \cap A' = \varnothing$;

(2) A 中的任一数都小于 A' 中的任一数.

那么 A 和 A' 构成 $\mathbb{Q}$ 的一个分割, 记作 $(A|A')$. A 称为下组, A' 称为上组.

例 2.2.1 (1) 定义 $(A|A')$ 如下: $A = \{r \in \mathbb{Q} \mid r < 1\}$, $A' = \{r \in \mathbb{Q} \mid r \geqslant 1\}$.

(2) 定义 $(B|B')$ 如下: $B = \{r \in \mathbb{Q} \mid r \leqslant 0\}$, $B' = \{r \in \mathbb{Q} \mid r > 0\}$.

(3) 定义 $(C|C')$ 如下: $C = \{r \in \mathbb{Q} \mid r < 0, 或\ r^2 < 2\}$, $C' = \{r \in \mathbb{Q} \mid r^2 > 2\}$. □

这个分割称戴德金分割.

注意分割只可能出现如下三种类型:

(1) 上组有最小的数 r, 下组没有最大的数;

(2) 上组没有最小的数, 下组有最大的数 r;

(3) 上组没有最小的数, 下组没有最大的数.

例 2.2.1 中 $(A|A')$ 属于第一类, $(B|B')$ 属于第二类, $(C|C')$ 属于第三类.

在第一种和第二种情况中, 我们说分割对应着一个有理数, 记作 $(A|A') = 1$, $(B|B') = 0$.

为了使分割对应的数有唯一性, 我们将第二类分割中下组的最大数移到上组, 则第二类分割变为第一类.

现在, 我们将第三类分割看作一个数, 它比下组中的数大而比上组中的数小, 它称为一个无理数. 例如, 例 2.2.1 中的 $(C|C')$ 显然就是 $\sqrt{2}$.

有理数与无理数合在一起就称为实数集合, 因此一个实数就是一个有理数集的分割. 两个实数相等而且仅当它们的分割有相同的上组与下组. 这里当下组有最大数时, 我们总将其移入上组, 从而使有理数所对应的分割有唯一性.

下面我们定义实数的序.

定义 2.2.1 设 $\alpha = (A|A')$, $\beta = (B|B')$, 则 $\alpha = \beta$ 是指 $A = B$, 且 $A' = B'$; $\alpha > \beta$ 是指 $A \supsetneqq B$; 而 $\alpha < \beta$ 是指 $\beta > \alpha$.

从实数的定义直接可以证明实数的如下性质:

命题 2.2.1 (1) 设 α, β 是任意两实数, 则以下三种情况之一必存在且唯一: $\alpha = \beta$, $\alpha > \beta$, $\alpha < \beta$.

(2) 如果 $\alpha > \beta$, $\beta > \gamma$, 则 $\alpha > \gamma$.

下面考虑实数的完备性.

引理 2.2.1 给定两个实数 $\alpha > \beta$, 则存在有理数 r 使得 $\alpha > r > \beta$.

证明 令 $\alpha = (A|A')$, $\beta = (B|B')$, 则 $A \supsetneqq B$, 于是存在 $r' \in A \backslash B$. 也就是说 $\alpha > r' \geqslant \beta$, 这里当 β 为有理数时等式可能成立. 因 A 中无最大数, 故存在 $r \in A$, 使 $r > r'$, 于是 $\alpha > r > \beta$. □

由引理 2.2.1 可知, 两个实数间可以有无穷多个有理数.

引理 2.2.2 给定两个实数 α, β, 如果对于任意 $\varepsilon > 0$, 总存在有理数 r_1 和 r_2, 使得 $|r_1 - r_2| < \varepsilon$, 且

$$\max\{r_1, r_2\} > \alpha > \min\{r_1, r_2\}, \quad \max\{r_1, r_2\} > \beta > \min\{r_1, r_2\}, \tag{2.2.1}$$

则 $\alpha = \beta$.

证明 不失一般性, 设 $r_1 < r_2$. 用反证法设 $\alpha > \beta$. 由引理 2.2.1 可找到有理数 r, r', 使得 $\alpha > r' > r > \beta$. 于是 $r_2 > r' > r > r_1$, 从而 $r_2 - r_1 > r' - r$. 取 $\varepsilon = r' - r$, 则不存在 r_1, r_2, 使式 (2.2.1) 成立. □

利用引理 2.2.1 和引理 2.2.2 容易证明, 任何一个实数都可以表示成小数形式, 有限与无限循环小数表示有理数, 而无限不循环小数表示无理数(详见文献 [37]).

今后我们记实数集为 $\mathbb{R}$.

类似于有理数, 我们也可以将实数集 $\mathbb{R}$ 分割成两个非空子集 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{A}'$, 使得 $\mathbb{R} = \mathbf{A} \cup \mathbf{A}'$ 且 $\mathbf{A} \cap \mathbf{A}' = \varnothing$.

那么有没有可能像有理数那样, 存在一个分割, 使 $\mathbf{A}$ 中无最大数且 $\mathbf{A}'$ 中无最小数, 即实数集合还有空隙存在, 从而使我们还得引进新数? 下一个戴德金定理表明这不可能, 就是说实数集中已经不存在空隙, 从而建立了实数域的完备性 (也称连续性).

定理 2.2.1 *对于实数域的任一分割 $(\mathbf{A}|\mathbf{A}')$, 必然存在一个实数 β, 使得它或者是 $\mathbf{A}$ 的最大数, 或者是 $\mathbf{A}'$ 的最小数.*

证明 记 $A = \mathbf{A} \cap \mathbb{Q}$, $A' = \mathbf{A}' \cap \mathbb{Q}$. 显然 $(A|A')$ 是 $\mathbb{Q}$ 的一个分割, 于是它确定了一个实数 $\beta = (A|A')$. 现在如果 $\beta \in \mathbf{A}$, 则它必定是 $\mathbf{A}$ 中最大数, 因为否则, 设 $\alpha \in \mathbf{A}$ 且 $\alpha > \beta$, 则存在有理数 $r \in \mathbb{Q}$, 使得 $\alpha > r > \beta$, 于是 $r \in \mathbf{A}$, 因此, $r \in A$. 这与 β 定义矛盾. 若 $\beta \in \mathbf{A}'$, 则同理可证 β 是 $\mathbf{A}'$ 中最小的数. □

有理数中的四则运算可以通过适当的方式移植到实数集中. 例如, 设 $\alpha = (A|A')$, $\beta = (B|B')$, 令

$$C = \{a + b \,|\, a \in A, b \in B\}, \quad C' = \{a + b \,|\, a \in A', b \in B'\},$$

则易证 C, C' 构成 $\mathbb{R}$ 的一个分割 $(C|C')$. 我们定义 $(C|C') = \alpha + \beta$. 当然我们还要证明用分割定义的实数运算与普通实数运算一致. 这部分内容可参阅文献 [39] 或文献 [4].

实数集的完备性可以有多种等价的表述, 这些表述本身也是实数的重要性质, 在分析中有重要的应用. 这里我们用定理的形式列出 6 种等价的表述, 为此我们先定义一些术语.

数列 $\{a_n\}$ 称为收敛于 a, 是指对任意 $\varepsilon > 0$, 存在自然数 $N = N(\varepsilon)$, 使得 $|a_n - a| < \varepsilon$, $\forall n \geqslant N$, 记作 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ 或 $a_n \to a\,(n \to \infty)$, 在不致引起混淆的情形下, 往往简记作 $a_n \to a$.

数列 $\{a_n\}$ 称为基本列或 Cauchy 列, 是指对任意 $\varepsilon > 0$, 存在自然数 $N = N(\varepsilon)$, 使得 $|a_n - a_m| < \varepsilon, \forall n, m \geqslant N$.

一个数集 A 称为有界的, 是指存在一正数 $\mu \in \mathbb{R}$, 使得 $|a| \leqslant \mu, \forall a \in A, \mu$ 称为 A 的一个界; A 称为上 (下) 有界的, 是指存在一数 $\mu \in \mathbb{R}$, 使得 $a \leqslant \mu$ $(a \geqslant \mu)$, $\forall a \in A$, μ 称为 A 的一个上 (下) 界. 显然, 不存在 A 的最大上界 (最小下界). A 的最小上界 (最大下界) 称为 A 的上 (下) 确界, 记作 $\sup A$ 或 $\sup\{a \,|\, a \in A\}$ ($\inf A$ 或 $\inf\{a \,|\, a \in A\}$).

闭区间 $[a, b]$ 是指数集 $[a, b] = \{x \,|\, a \leqslant x \leqslant b\}$, 开区间 (a, b) 是指数集 $(a, b) = \{x \,|\, a < x < b\}$. 一个由开区间组成的集族 $\mathcal{B}$ 称为数集 A 的一个覆盖, 是指对于任意 $x \in A$, 必存在一包含 x 的开区间 $I_x \in \mathcal{B}$; 如果 $\mathcal{B}$ 是由有限个区间组成, 则称 $\mathcal{B}$ 是 A 的一个有限覆盖.

一列闭区间 $\{[a_n, b_n] \,|\, n \geqslant 1\}$ 称为一个区间套, 是指它满足 (1) $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$, $\forall n \geqslant 1$, 并且 (2) $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$.

在下面的叙述中涉及到的数都指实数, 而不再特别说明. 下面的几个定理几乎都是数学分析中为人熟知的.

定理 2.2.2 任意上 (下) 有界的数集必有上 (下) 确界.

定理 2.2.3 任何单调上升 (下降) 而上 (下) 有界的数列必为收敛列.

定理 2.2.4 (区间套定理) 设 $\{[a_n, b_n] \mid n \geqslant 1\}$ 是一区间套, 则必存在唯一的实数 $\xi \in [a_n, b_n], \forall n \geqslant 1$, 并且 $\xi = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

定理 2.2.5 (有限覆盖定理) 设 $\mathcal{B}$ 是一开区间族. 如果 $\mathcal{B}$ 是一有界闭区间 $[a, b]$ 的一个覆盖, 则必存在 $\mathcal{B}$ 中有限个开区间组成的 $[a, b]$ 的子族覆盖.

定理 2.2.6 (Bolzano-Weierstrass 列紧性定理) 任何有界数列必有收敛子列.

定理 2.2.7 $\{a_n\}$ 为收敛列 $\iff$ $\{a_n\}$ 是基本列.

这里我们利用戴德金定理给出定理 2.2.2 的证明, 其余定理的证明请读者自行完成, 或阅读有关参考书. 证明中可遵循如下思路: 定理 2.2.2 $\Longrightarrow$ 定理 2.2.3 $\Longrightarrow$ 定理 2.2.4 $\Longrightarrow$ 定理 2.2.5 $\Longrightarrow$ 定理 2.2.6 $\Longrightarrow$ 定理 2.2.7 $\Longrightarrow$ 定理 2.2.2.

定理 2.2.2 的证明 设 M 为一上有界的数集, 并设 A' 表示 M 的所有上界组成的数集, 而 $A = \mathbb{R} \setminus A'$. 于是 $\{A, A'\}$ 构成 $\mathbb{R}$ 的一个分割, 记 $\mu = (A|A')$. 依据戴德金定理, 或者 A 有最大数, 或者 A' 有最小数. 对于任意 $a \in A$, a 不是 M 的上界, 从而存在 $b \in M$, 使得 $b > a$. 令 $x = \frac{a+b}{2}$, 则 $a < x < b$, 于是从 $x < b$ 和 $b \in M$ 可知, x 也不是 M 的上界, 从而 $x \in A$. 最后从 $a < x$ 可知 a 不是 M 的最大数. 由于上述 $a \in A$ 是任意取的, 故 A 中没有最大数. 这就是说, A' 有最小数 μ, 它正好是 M 的最小上界, 即上确界. □

一个数集 M 称为在 $\mathbb{R}$ 中是稠密的, 简称稠的, 是指对于每个 $x \in \mathbb{R}$, 对任意 $\varepsilon > 0$, 可以找到一数 $y \in M$, 使得 $|y - x| < \varepsilon$. 例如, 有理数集 $\mathbb{Q}$ 就是 $\mathbb{R}$ 的一个稠子集.

在结束本节之前, 我们证明实数集的不可数性.

定理 2.2.8 实数集 $\mathbb{R}$ 是不可数集.

证明 只要证明闭区间数集 $[0, 3]$ 是不可数的即可. 用反证法, 假设 $[0, 3]$ 可数, 并且

$$[0, 3] = \{x_1, x_2, \cdots\}.$$

将 $[0, 3]$ 三等分成三个子区间: $[0, 1]$, $[1, 2]$, $[2, 3]$. 显然这三个子区间中必定有一个子区间不含 x_1. 将该子区间记作 $I_1 = [a_1, b_1]$. 然后再将 I_1 三等分成三个子区间, 同样三个子区间中必定有一个子区间不含 x_2, 将该子区间记作 $I_2 = [a_2, b_2]$. 如此无限进行下去, 得到一区间套 $\{I_n = [a_n, b_n] \mid n = 1, 2, \cdots\}$. 根据区间套定理, 存在唯一实数 $\xi \in I_n, \forall n \geqslant 1$. 显然 $\xi \neq x_n, \forall n \geqslant 1$, 但 $\xi \in [0, 3]$, 得出矛盾. 因此假设 $[0, 3]$ 可数不成立. □

2.3 实数域 $\mathbb{R}$ 中的开集和闭集

任给实数 a 和 b, $a < b$, 数集 $(a,b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$ 称为 $\mathbb{R}$ 中的开区间, $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leqslant x \leqslant b\}$ 称为闭区间, 而 $[a,b) = \{x \in \mathbb{R} | a \leqslant x < b\}$ 和 $(a,b] = \{x \in \mathbb{R} | a < x \leqslant b\}$ 叫做半开半闭区间. 设 $x_0 \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, 我们称开区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 为 x_0 的一个邻域, 记作 $B(x_0, \delta)$.

定义 2.3.1 设 $A \subset \mathbb{R}$, 称 $x \in \mathbb{R}$ 为 A 的一个内点, 如果存在 x 的一个邻域 $B(x, \delta)$, 使得 $B(x, \delta) \subset A$. 若 A 中的每个点都是它的内点, 则称 A 为一个开集.

显然, 空集 $\varnothing$ 和 $\mathbb{R}$ 都是开集, 我们有下面的定理.

定理 2.3.1 (1) 有限个开集之交是开集; (2) 任意多个开集之并是开集.

证明 (1) 设 $A = \bigcap_{k=1}^{n} A_k$, A_1, $A_2, \cdots, A_n$ 为开集, 不妨设 $A \neq \varnothing$. 对于任意的 $x \in A$, 我们只要证 x 是 A 的内点. 事实上, 由于 $x \in A_k$, $k = 1, 2, \cdots, n$, 故对每个 $k = 1, 2, \cdots, n$, 存在 x 的邻域 $B(x, \delta_k) \subset A_k$. 今取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_n\}$, 则 $B(x, \delta) \subset B(x, \delta_k) \subset A_k$, $\forall\, k = 1, 2, \cdots, n$, 因此 $B(x, \delta) \subset A$, 即 x 是 A 的内点.

(2) 的证明是显然的, 留作练习. □

下面我们讨论 $\mathbb{R}$ 中开集的构造. 我们将指出 $\mathbb{R}$ 中的任意开集至多由可数个互不相交的开区间组成. 设 A 是 $\mathbb{R}$ 的一个非空开集, 若开区间 $(a,b) \subset A$, 但 $a \notin A$ (或 $a = -\infty$), $b \notin A$ (或 $b = +\infty$), 则称 (a,b) 为开集 A 的一个构成区间.

注意一个开集 A 的任意两个构成区间 (a_1, b_1) 和 (a_2, b_2) 或者重合, 或者互不相交. 事实上, 假定该两区间相交不重合, 比方说, $b_1 < b_2$. 取 $x \in (a_1, b_1,) \cap (a_2, b_2)$, 则 $a_2 < x < b_1 < b_2$, 从而 $b_1 \in (a_2, b_2) \subset A$, 与 $b_1 \notin A$ 相矛盾.

此外, 任意非空开集 A 至多只有可数多个构成区间. 事实上, 我们可在每个构成区间中取一有理数与该构成区间对应, 显然不同的构成区间所对应的这种有理数是不同的, 因此开集 A 与有理数域的一个子集一一对应, 但后者是可数的, 故构成区间数至多是可数的.

定理 2.3.2 $\mathbb{R}$ 中的任意非空开集都可以表示成至多可数个构成区间 $\{I_k\}$ 的并: $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$.

证明 只需证明 $\forall x \in A$, x 属于 A 的一个构成区间. 事实上, 由于 A 是开集, 必存在一个邻域 $B(x; \delta) \subset A$. 令 $\delta_2 = \sup\{\delta > 0 | [x, x+\delta) \subset A\}$. 如果 $\delta_2 \neq \infty$, 则 $b = x + \delta_2 \notin A$, 因为否则的话, 有一邻域 $B(x, \varepsilon) \subset A$, 从而 $[x, x+\varepsilon) \subset A$, 这与 b 的定义相矛盾. 类似地, 若令 $\delta_1 = \sup\{\delta > 0 | (x - \delta, x] \subset A\}$, 则当 $\delta_1 \neq \infty$ 时 $a = x - \delta_1 \notin A$. 于是 (a,b) 是 A 的一个构成区间. □

定义 2.3.2 设 $A \subset \mathbb{R}$. $x \in \mathbb{R}$ 称为 A 的一个极限点, 是指存在一列 $\{x_k | n \geqslant 1\} \subset A \backslash \{x\}$, 使得 $x_k \to x (k \to \infty)$, 这里 $\{x\}$ 表示仅含 x 的单点集. 如果 A 包含其所有的极限点, 则称 A 为闭集.

注意 A 的极限点未必在 A 中, 例如, 1 是区间 $[0,1)$ 的极限点, 但 1 不在 $[0,1)$ 中.

定理 2.3.3 设 $A \subset \mathbb{R}$, 那么 (1) 为了 x 是 A 的极限点, 必须且只需对于 x 的任意邻域 $B(x;\delta)$, 有 $B(x;\delta) \cap (A\backslash\{x\}) \neq \varnothing$, 也即对于任意 $\delta > 0$, $B(x;\delta)$ 中含有异于 x 的属于 A 的点; (2) 为了 A 是闭集, 必须且只需 A 的余集 A^c 是开集.

证明 (1) 的证明是明显的, 留作练习, 今证 (2). 根据定义, A 是闭集当且仅当若 $\forall \delta > 0$, $A \cap B(x;,\delta) \neq \varnothing$, 则 $x \in A$. 而这又等价于, $\forall x \notin A$, $\exists \delta_x > 0$ 使得 $B(x;\delta_x) \cap A = \varnothing$. 于是 $\forall x \in A^c$, $\exists \delta_x > 0$ 使得 $B(x;\delta_x) \subset A^c$, 这正是说 A^c 是开集. □

利用定理 2.3.2 和 De Morgan 法则, 易证如下定理.

定理 2.3.4 (1) $\mathbb{R}$ 中任意多个闭集之交是闭集; (2) $\mathbb{R}$ 中有穷个闭集之并是闭集.

推论 2.3.1 设 A 为 $\mathbb{R}$ 中的闭集, B 为 $\mathbb{R}$ 中开集, 那么 $A \setminus B$ 是闭集, 而 $B \setminus A$ 是开集.

2.4 $\mathbb{R}$ 中的测度论

"测度" 是通常的长度、面积和体积概念对任意集合的推广. 测度论及建立在测度论上的勒贝格 (Lebesgue) 积分被称为 "现代分析的开端", 它不仅重建了微积分的基本定理, 而且大大扩大了微积分的使用范围. 在展开勒贝格测度讨论之前, 我们先来分析一下黎曼积分. 区间 $[a,b]$ 上函数 f 的黎曼积分是如下黎曼积分和的极限

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\Delta_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta_k,$$

这里取分割 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, ξ_k 是小区间 (x_{k-1}, x_k) 中的任意点, $\Delta_k = x_k - x_{k-1}$. 注意若 f 在各小区间 (x_{k-1}, x_k) 上的值变化很大, 则其黎曼积分就不存在. 因此, 黎曼积分基本上是为连续函数设计的, 这样就把应用中大量的函数排除在可积函数类之外, 从而给应用带来很多麻烦. 这种黎曼意义下古典积分理论已不足以解决数学分析中的许多问题. 为了克服黎曼积分理论上的上述局限性, 必须改造原有的积分定义.

勒贝格在设计新的积分时采用新的思路, 不是通过分割自变量区域, 而是通过分割函数值域来构造积分和: 假定函数 f 在区间 $[a,b]$ 有界, $m < f(x) < M$, $\forall x \in [a,b]$. 作值域 $[m,M]$ 的分割

$$m = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = M.$$

令

$$E_k = \{x \,|\, y_{k-1} \leqslant f(x) < y_k,\ a \leqslant x \leqslant b\},\ k = 1,2,\cdots,n.$$

对应于上述分割的积分和为 $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \mathrm{m}(E_k)$, 其中 $\lambda_k \in [y_{k-1}, y_k]$, 而 $\mathrm{m}(E_k)$ 表示集 E_k 的 "长度". 这样定义积分和的优点是我们可以取分割很细使得 $y_k - y_{k-1}$ 很小, 从而达到积分和收敛, 其极限值正是新定义的 f 的勒贝格积分. 但新的困难也随之出现了: 我们如

何来理解一般点集的“长度”呢? 这就是本节要讨论的勒贝格测度理论的内容, 它是勒贝格积分的基础.

我们从点集的外测度开始. 设 $E \subset \mathbb{R}$, 若 $\{I_k \,|\, k \geqslant 1\}$ 是 $\mathbb{R}$ 中可数个开区间组成的集族, 满足 $E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$, 则称 $\{I_k \,|\, k \leqslant 1\}$ 为 E 的一个可数开覆盖. 下面我们用 $|I|$ 表示区间 I 的长度.

定义 2.4.1 设 $E \subset \mathbb{R}$. 我们令

$$m^*(E) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |I_k| \,\middle|\, \{I_k \,|\, k \geqslant 1\} \text{ 为 } E \text{ 可数开覆盖} \right\}.$$

$m^*(E)$ 叫做点集 E 的勒贝格外测度, 简称外测度.

注意这里的和 $\sum_{k=1}^{\infty} |I_k|$ 允许取 $+\infty$. 因此从定义看出, 点集 E 的外测度 $m^*(E)$ 是一个确定的非负实数或 $+\infty$.

例 2.4.1 $\mathbb{R}$ 中的任意可数点集 E 的外测度 $m^*(E) = 0$. 事实上, 设 $E = \{r_n \,|\, n \geqslant 1\}$. $\forall \varepsilon > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, 令 $I_n = (r_n - 2^{-n}, r_n + 2^{-n})$, 则 $\{I_n \,|\, n \geqslant 1\}$ 是 E 的一个可数开覆盖, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| \leqslant 2\varepsilon$. 因此, $0 \leqslant m^*(E) \leqslant 2\varepsilon$. 由于 $\varepsilon > 0$ 的任意性, 我们得到 $m^*(E) = 0$.

特别地, $\mathbb{R}$ 中所有有理数组成的数集 $\mathbb{Q}$ 的外测度为零. □

定理 2.4.1 外测度 $m^*(E)$ 具有如下性质:

(1) 非负性: $m^*(E) \geqslant 0$, $m^*(\varnothing) = 0$;

(2) 单调性: $E_1 \subset E_2 \Longrightarrow m^*(E_1) \leqslant m^*(E_2)$;

(3) 次可数可加性: $m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E_n)$,

这里 E, E_1, $E_2, \cdots$ 均为 $\mathbb{R}$ 中任意点集.

证明 (1) 从定义直接推出; 为证 (2), 只需注意 E_2 的可数开覆盖必定是 E_1 的可数开覆盖; 下面证明 (3): $\forall \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}$, 由外测度定义, 存在 E_n 的可数开覆盖 $\{I_k^n \,|\, k \geqslant 1\}$ 使得

$$E_n \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k^n, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |I_k^n| \leqslant m^*(E_n) + 2^{-n}\varepsilon.$$

但 $\{I_k^n \,|\, k \geqslant 1, n \geqslant 1\}$ 是 $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ 的可数开覆盖, 因此

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E_n) + \varepsilon.$$

由于 $\varepsilon > 0$ 的任意性, 从上式可知结论 (3) 成立. □

例 2.4.2 对于 $\mathbb{R}$ 中的开区间 I, 有 $m^*(I) = |I|$.

若 I 为无穷区间, 则上述结论显然成立, 因此我们考察有界区间 $I = (a, b)$. 于是 $\forall \varepsilon > 0$, $I_\varepsilon = (a - \varepsilon, b + \varepsilon) \supset \bar{I}$. 由外测度定义可知 $m^*(\bar{I}) \leqslant |I_\varepsilon| = |I| + 2\varepsilon$, 从 $\varepsilon > 0$ 的任

意性得到 $m^*(\bar{I}) \leqslant |I|$. 现在设 $\{I_k \mid k \geqslant 1\}$ 是 $\bar{I}$ 的任意一个开覆盖, 由于 $\bar{I}$ 是有界闭集, 依据有限覆盖定理, 存在 $\{I_k \mid k \geqslant 1\}$ 的有限子集族 $\{I_{k_1}, I_{k_2}, \cdots, I_{k_n}\}$ 使得 $\bar{I} \subset \bigcup_{j=1}^n I_{k_j}$. 显然我们有

$$|I| \leqslant \sum_{j=1}^n |I_{k_j}| \leqslant \sum_{k=1}^\infty |I_k|,$$

由此可得 $|I| = m^*(\bar{I})$. 这样我们证明了 $m^*(\bar{I}) = |I|$.

另一方面, 由外测度的单调性有 $m^*(I) \leqslant m^*(\bar{I})$, 显然我们有 $\bar{I} = (a,b) \cup \{a,b\}$. 根据例 2.4.1 的结果, $m^*(\{a,b\}) = 0$. 因此, 由外测度的次可加性有 $m^*(\bar{I}) \leqslant m^*(I)$, 从而 $m^*(\bar{I}) = m^*(I) = |I|$. □

外测度能否作为 $\mathbb{R}$ 中点集的 "长度" 度量呢? 自然地, 我们希望, 当两个点集 E 和 F 不相交时, 集合 $E \cup F$ 的"长度" 应该等于 E 和 F 的长度之和. 但是对于外测度, 有反例表明这种可加性一般是不成立的. 这里的所谓可加性是指:

(1) 有限可加性

$$m^*(E \cup F) = m^*(E) + m^*(F), \quad \forall E, F \subset \mathbb{R},\ E \cap F = \varnothing;$$

(2) 可数可加性

$$m^*\left(\bigcup_{k=1}^\infty E_k\right) = \sum_{k=1}^\infty m^*(E_k), \quad \forall E_k \subset \mathbb{R},\ E_k \cap E_j = \varnothing (k \neq j).$$

引理 2.4.1　上述有限可加性和可数可加性是等价的.

证明　只需证明 (1) $\Longrightarrow$ (2). 由 (1) 可知对于任意 $n \in \mathbb{N}$, 有

$$m^*\left(\bigcup_{k=1}^n E_k\right) = \sum_{k=1}^n m^*(E_k).$$

于是我们有

$$\sum_{k=1}^n m^*(E_k) = m^*\left(\bigcup_{k=1}^n E_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^\infty m^*(E_k).$$

在上式中令 $n \to \infty$, 即得到外测度的可数可加性. □

对于集合的测度 (即 "长度") , 可加性的要求是很自然的. 既然外测度不可能对所有的点集具有可加性, 于是退而求其次, 我们干脆把 $\mathbb{R}$ 中的集合分成两类: 可测集类和不可测集类. $\mathbb{R}$ 中使得外测度具有可加性的集合属于可测集类, 否则属于不可测集类.

下面我们来分析一下可测集应该满足什么样的条件. 开区间应该是可测集. 设开区间 I 被一个可测集 E 分为互不相交的两部分: $I = (I \cap E) \cup (I \cap E^c)$. 我们自然希望可测集之交仍然是可测的. 于是由可加性应该有

$$m^*(I) = m^*(I \cap E) + m^*(I \cap E^c). \tag{2.4.1}$$

下面我们证明, 如果式 (2.4.1) 对所有开区间 I 成立, 则有

$$m^*(T) = m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c), \quad \forall T \subset \mathbb{R}. \tag{2.4.2}$$

为此, 利用外测度的次可加性, 我们只需证明

$$m^*(T) \geqslant m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c), \quad \forall T \subset \mathbb{R}. \tag{2.4.3}$$

当 $m^*(T) = \infty$ 时式 (2.4.3) 显然成立, 因此我们可以假设 $m^*(T) < \infty$, 于是根据外测度的定义, $\forall \varepsilon > 0$, 存在 T 的可数开覆盖 $\{I_k \mid k \geqslant 1\}$, 满足

$$\sum_{k=1}^{\infty} |I_k| < m^*(T) + \varepsilon.$$

由此利用外测度的单调性和次可加性, 从式 (2.4.1) 可得

$$\begin{aligned}
& m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c) \\
\leqslant\ & m^*\left(\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\right) \bigcap E\right) + m^*\left(\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\right) \bigcap E^c\right) \\
=\ & m^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} (I_k \cap E)\right) + m^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} (I_k \cap E^c)\right) \\
\leqslant\ & \sum_{k=1}^{\infty} [m^*(I_k \cap E) + m^*(I_k \cap E^c)] \\
=\ & \sum_{k=1}^{\infty} m^*(I_k) = \sum_{k=1}^{\infty} |I_k| < m^*(T) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

最后由 ε 的任意性可得式 (2.4.3) 成立. □

这样, 式 (2.4.2) 给出了一般可测集应该满足的条件, 于是我们提出可测集的如下定义.

定义 2.4.2 $\mathbb{R}$ 中点集 E 称为可测的, 是指它满足条件 (2.4.2). 可测集 E 的外测度 $m^*(E)$ 叫做 E 的勒贝格测度, 简称测度, 并记作 $\mathrm{m}(E)$. 特别当可测集 E 的测度 $\mathrm{m}(E) = 0$ 时, 集合 E 叫做零测集.

容易验证为了 E 是零测集, 必须且只需 $m^*(E) = 0$. 由此易见零测集的任意子集都是零测集.

条件 (2.4.2) 通常称作 Caratheodory 条件, 它等价于

$$m^*(A \cup B) = m^*(A) + m^*(B), \quad \forall A \subset E,\ B \subset E^c. \tag{2.4.4}$$

事实上, 若式 (2.4.2) 成立, 则取 $T = A \cup B$ 即得式 (2.4.4); 反之, 若式 (2.4.4) 成立, 则取 $A = T \cap E$, $B = T \cap E^c$, 即得式 (2.4.2).

例 2.4.3 设 $E \subset \mathbb{R}$ 为可测集, F 为零测集, 那么 $E \cup F$ 也是可测集, 并且 $\mathrm{m}(E \cup F) = \mathrm{m}(E)$.

事实上, 对于任意的 $T \subset \mathbb{R}$, 我们有

$$T \cap (E \cup F) = (T \cap E) \cup (T \cap F),$$
$$T \cap (E \cup F)^c = (T \cap E^c) \cap F^c.$$

于是

$$\begin{aligned}
& m^*(T \cap (E \cup F)) + m^*(T \cap (E \cup F)^c) \\
& \leqslant m^*(T \cap E) + m^*(T \cap F) + m^*(T \cap E^c) \\
& \leqslant m^*(T \cap E) + m^*(F) + m^*(T \cap E^c) \\
& = m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c) = m^*(T),
\end{aligned}$$

从而 $E \cup F$ 也是可测集. 最后, 从 $\mathrm{m}(E) \leqslant \mathrm{m}(E \cup F) \leqslant \mathrm{m}(E) + \mathrm{m}(F) = \mathrm{m}(E)$ 可得 $\mathrm{m}(E \cup F) = \mathrm{m}(E)$. □

定理 2.4.2 $\mathbb{R}$ 中的测度具有如下性质:

(1) 设 $E \subset \mathbb{R}$ 可测, 则 E^c 也可测;

(2) 设 $E, F \subset \mathbb{R}$ 可测, 则 $E \cup F$, $E \cap F$, $E \setminus F$ 皆可测;

(3) 设 $E_1, E_2, \cdots$ 为 $\mathbb{R}$ 中的一列可测集, 则 $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ 和 $\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$ 也是可测集; 进而若还有 $E_i \cap E_j = \varnothing, \forall i \neq j$, 则有如下可数可加性

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{m}(E_k). \tag{2.4.5}$$

证明 (1) 只需注意 $(E^c)^c = E$, 于是 $\forall T \subset \mathbb{R}$, 有

$$m^*(T \cap E^c) + m^*(T \cap (E^c)^c) = m^*(T \cap E^c) + m^*(T \cap E) = m^*(T).$$

(2) $\forall T \subset \mathbb{R}$, T 可分解成 $T = A \cup B \cup C \cup D$, 其中

$$A = (T \cap E) \setminus F, \quad B = (T \cap F) \setminus E, \quad C = T \cap E \cap F, \quad D = T \setminus (E \cup F).$$

容易看出 A, B, C, D 互不相交, 并且 $A \cup C = T \cap E$, $B \cup D = T \cap E^c$. 于是由 E 可测可推出

$$m^*(T) = m^*(A \cup C) + m^*(B \cup D). \tag{2.4.6}$$

现在取 $T_1 = A \cup B \cup C$, 则 $A \cup C = T_1 \cap E$, $B = T_1 \cap E^c$. 因此

$$m^*(A \cup C) + m^*(B) =^* (A \cup B \cup C). \tag{2.4.7}$$

再利用 F 的可测性, 取 $T_2 = B \cup D$, 并注意到 $(D \cup B) \cap F = B$, $(D \cup B) \cap F^c = D$, 我们有

$$m^*(D \cup B) = m^*(B) + m^*(D). \tag{2.4.8}$$

于是从式 (2.4.6)~式 (2.4.8) 得到

$$\begin{aligned} m^*(T) &= m^*(D) + m^*(A \cup B \cup C) \\ &= m^*(T \cap (E \cup F)) + m^*(T \cap (E \cup F)^c), \end{aligned}$$

由此即得 $E \cup F$ 可测. 再利用 De Morgan 公式, 有 $E \cap F = (E^c \cup F^c)^c$, 可知 $E \cap F$ 也可测, 而 $E \setminus F$ 的可测性则由 $E \setminus F = E \cap F^c$ 推出.

(3) 对于任意 $n \in \mathbb{N}$, $\bigcup_{k=1}^n E_k$ 的可测性由已证的 (2) 推出. 我们先讨论 E_k 互不相交的情形. $\forall T \subset \mathbb{R}$, 在可测性的等价条件 (2.4.4) 中取 $A = T \cap E_1$, $B = T \cap E_2$. 注意到 $A \subset E_1$, $B \subset E_1^c$, 式 (2.4.4) 变成

$$m^*(T \cap (E_1 \cup E_2)) = m^*(T \cap E_1) + m^*(T \cap E_2).$$

于是应用数学归纳法可得

$$m^*\left(T \cap \left(\bigcup_{k=1}^n E_k\right)\right) = \sum_{k=1}^n m^*(T \cap E_k). \tag{2.4.9}$$

现在我们对于集合 $E = \bigcup_{k=1}^\infty E_k$ 验证可测性条件 (2.4.2). 为此不妨假定 $m^*(T) < \infty$. 注意到 $T \cap E = \bigcup_{k=1}^\infty (T \cap E_k)$, 我们有

$$m^*(T \cap E) \leqslant \sum_{k=1}^\infty m^*(T \cap E_k),$$

但 $\bigcup_{k=1}^n E_k$ 是可测集, 因此

$$m^*(T) = m^*\left(T \cap \left(\bigcup_{k=1}^n E_k\right)\right) + m^*\left(T \cap \left(\bigcup_{k=1}^n E_k\right)^c\right).$$

于是利用外测度的单调性, 有

$$m^*(T \cup E^c) \leqslant m^*\left(T \cap \left(\bigcup_{k=1}^n E_k\right)^c\right) = m^*(T) - \sum_{k=1}^n m^*(T \cap E_k).$$

由此可得

$$m^*(T \cup E) + m^*(T \cup E^c) \leqslant m^*(T) + \sum_{k=n+1}^\infty m^*(T \cap E_k).$$

但从 $m^*(T) < \infty$ 可知级数 $\sum_{k=1}^\infty m^*(T \cap E_k)$ 收敛, 从而 $m^*(T \cup E) + m^*(T \cup E^c) \leqslant m^*(T)$. 由此推出集合 $\bigcup_{k=1}^\infty E_k$ 的可测性.

为证可数可加性, 根据引理 2.4.1, 只需证明 $\mathrm{m}(E_1 \cup E_2) = \mathrm{m}(E_1) + \mathrm{m}(E_2)$. 由于 $E_1 \cap E_2 = \varnothing$, 故 $E_2 \subset E_1^c$. 因此从可测集的等价条件 (2.4.4), 立即得出 $\mathrm{m}(E_1 \cup E_2) = \mathrm{m}(E_1) + \mathrm{m}(E_2)$.

最后, 我们考虑一般的可测集序列 $\{E_n \,|\, n \geqslant 1\}$. 令

$$F_1 = E_1,\ F_n = E_n \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{n-1} E_k\right), \quad \forall n \geqslant 2,$$

我们有 $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. 但容易看出, $\{F_n \,|\, n \geqslant 1\}$ 是两两不相交的序列, 因此由上面已经证明的部分结论可知 $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ 是可测集. □

上面我们定义了可测集, 并讨论了可测集的一些基本性质. 人们自然要问, 究竟什么样的集合才是可测的呢? 一般来说, 对于给定的集合 E, 验证条件 (2.4.2) 并不是一件容易的事情. 但我们希望, 至少实际常出现的像开集、闭集这样的集合应该是可测的. 实际上, 我们有如下定理.

定理 2.4.3 $\mathbb{R}$ 中的任意开集和闭集都是可测的.

在给出定理的证明之前, 我们先证明一个引理.

引理 2.4.2 设 $I = (b, c)$, $J = (a, d)$ 是 $\mathbb{R}$ 中的两个开区间, 满足 $a < b < c < d$, 并且 a 允许取 $-\infty$, 而 d 允许取 $+\infty$. 那么对于任意 $T \subset \mathbb{R}$, 有

$$m^*((T \cap I) \cup (T \cap J^c)) = m^*(T \cap I) + m^*(T \cap J^c).$$

证明 任取 $(T \cap I) \cup (T \cap J^c)$ 的一个可数开覆盖 $\{I_n \,|\, n \geqslant 1\}$. 我们可以把每个区间 I_n 至多分解成 3 个小开区间, 使得其长度之和等于 $|I_n|$, 并且每个小区间又不可能同时与 I 和 J^c 相交. 这样我们把可数开覆盖 $\{I_n \,|\, n \geqslant 1\}$ 分解成两组开区间 $\{I_n^1 \,|\, n \geqslant 1\}$ 和 $\{I_n^2 \,|\, n \geqslant 1\}$, 使得 $\{I_n^1 \,|\, n \geqslant 1\}$ 是 $T \cap I$ 的可数开覆盖, 而 $\{I_n^2 \,|\, n \geqslant 1\}$ 是 $T \cap J^c$ 的可数开覆盖, 并且

$$\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |I_n^1| + \sum_{n=1}^{\infty} |I_n^2|.$$

反之, 若 $\{I_n^1 \,|\, n \geqslant 1\}$ 和 $\{I_n^2 \,|\, n \geqslant 1\}$ 分别是 $T \cap I$ 和 $T \cap J^c$ 可数开覆盖, 则显然 $\{I_n^1, I_n^2 \,|\, n \geqslant 1\}$ 是 $(T \cap I) \cap (T \cap J^c)$ 的一个可数开覆盖. 由此不难推出所需结论. □

定理 2.4.3 的证明 由于闭集的余集是开集, 因此我们只需证明开集的可测性就够了. 但我们知道, $\mathbb{R}$ 中任意开集可以表示成可数个构成区间之并, 因此问题归结为证明任意开区间的可测性. 不妨设 $I = (a, b)$ 是有穷开区间. 对于任意充分大的 $n \in \mathbb{N}$, 令 $I_n = (a + 1/n, b - 1/n)$. 注意当 n 充分大时, $a + 1/n < b - 1/n$. 于是根据引理 2.4.2, $\forall T \subset \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$, 从外测度的单调性可得

$$m^*(T) \geqslant m^*((T \cap I_n) \cup (T \cap I^c)) = m^*(T \cap I_n) + m^*(T \cap I^c).$$

由此可见, 为了证明 I 可测, 只需证明 $\lim_{n\to\infty} m^*(T\cap I_n) = m^*(T\cap I)$. 注意到 $0 \leqslant m^*(T\cap I) - m^*(T\cap I_n) \leqslant m^*((I\setminus I_n)\cap T) \leqslant m^*(I\setminus I_n)$, 为此又只需证明 $\lim_{n\to\infty} m^*(I\setminus I_n) = 0$. 下面我们就证明这一事实. 令 $J_n^1 = (a-1/n, a+1/n)$, $J_n^2 = (b-1/n, b+1/n)$, $\forall n \geqslant 1$. 显然 $I\setminus I_n \subset J_n^1 \cup J_n^2$, 即 $\{J_n^1, J_n^2\}$ 是 $I\setminus I_n$ 的一个开覆盖. 但 $|J_n^1|+|J_n^2| = 4/n$, 故 $m^*(I\setminus I_n)\to 0\,(n\to\infty)$. □

下面给出一个不可数而又测度为零的集合的例子, 即康托集.

例 2.4.4 从线段 $C_1 = [0,1]$ 出发. 取走中间的 1/3 开区间, 即取走 $(1/3, 2/3)$, 得到 $C_2 = [0,1/3]\cup[2/3,1]$. 然后, 再分别取走 $[0,1/3]$ 及 $[2/3,1]$ 中间的 1/3 开区间, 得到 C_3. 继续这个过程, 我们可以构造 C_n, $n = 1,2,\cdots$ (见图 2.4.1). 定义

$$C := \bigcap_{i=1}^{\infty} C_i,$$

C 称为康托集, 它是一个不可数集合. 因为如果将 $[0,1]$ 上的点用三进制数, 则

$$C = \{0.a_1a_2a_3\cdots \mid a_i \in \{0,2\}\}.$$

显然, 它不可数. 它的测度为零, 这是因为, C_i 的测度为

$$|C_i| = \left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} \to 0, \quad (i\to\infty).$$

□

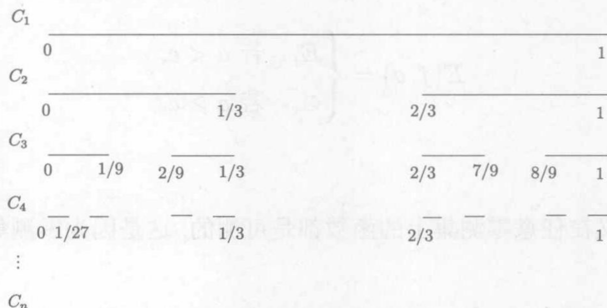


图 2.4.1 康托集

康托集具有自相似性质, 即将它的一部分放大, 仍与全体一样. 按照 Hausdorff 测度 (参见 2.6 节) 可以得出, 它的维数小于 1 (dim = 0.6309...). “自相似” 与 “分数维” 在复杂系统研究里十分重要.

2.5 可测函数

定义 2.5.1　设 $E \subset \mathbb{R}$ 是一可测集. 考察函数 $f: E \to \mathbb{R}$. 如果 $\forall a \in \mathbb{R}$, E 的子集

$$E(f,a) = \{x \mid f(x) > a,\ x \in E\}$$

是可测集, 则称 f 为 E 上的可测函数, 简称 f 为可测函数.

定理 2.5.1　设 f 是可测集 E 上的可测函数, 则对于任意的 $a \in \mathbb{R}$, 下列 4 个集合都是可测的:

$$E_1(f,a) = \{x \mid f(x) \geqslant a,\ x \in E\}, \quad E_2(f,a) = \{x \mid f(x) < a,\ x \in E\},$$

$$E_3(f,a) = \{x \mid f(x) \leqslant a,\ x \in E\}, \quad E_4(f,a) = \{x \mid f(x) = a,\ x \in E\}.$$

证明　注意 $\forall a \in \mathbb{R}$,

$$E_1(f,a) = \bigcap_{n=1}^{\infty} E(f, a - 1/n), \quad E_2(f,a) = E \setminus E_1(f,a),$$

$$E_3(f,a) = E \setminus E(f,a), \quad E_4(f,a) = E_1(f,a) \cap E_3(f,a),$$

从而根据可测集的性质可得这 4 个集合都是可测集. □

注　(1) 在可测函数的定义中可以用 $E_1(f,a)$, $E_2(f,a)$, $E_3(f,a)$ 中的任意一个集合代替 $E(f,a)$.

(2) 设 M 是 $\mathbb{R}$ 的一个稠子集, 那么在可测函数的定义中, 任意实数 a 可用任意 $r \in M$ 代替, 即要求 $\forall r \in M$, $E(f,r)$ 是可测集. 读者可作为练习自行证明.

例 2.5.1　可测集 E 上的常值函数 $f(x) = c$ 是可测函数, 这是因为 $\forall a \in \mathbb{R}$,

$$E(f,a) = \begin{cases} E, & 若\ a < c, \\ \varnothing, & 若\ a \geqslant c. \end{cases}$$

□

例 2.5.2　定义在任意零测集上的函数都是可测的, 这是因为零测集的任意子集都是可测集. □

例 2.5.3　设 $E \subset \mathbb{R}$, 定义 E 上的特征函数 χ_E 为

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & 若\ x \in E, \\ 0, & 若\ x \in \mathbb{R} \setminus E. \end{cases}$$

那么集合 E 和函数 χ_E 同时可测或同时不可测. □

例 2.5.4 设 f 是闭集 $E \subset \mathbb{R}$ 上的连续函数, 那么 f 是 E 上的可测函数. 这是因为 $\forall a \in \mathbb{R}$, $\{x \,|\, f(x) \geqslant a,\ x \in E\}$ 是闭集. □

今后, 有时为记号简单起见, 集合 $\{x \,|\, f(x) > a,\ x \in E\}$ 等中的集合 E 在不发生混淆的情况下将被略去, 简记作 $\{x \,|\, f(x) > a\}$ 等.

设 f 为可测集 $E \subset \mathbb{R}$ 上的可测函数, $E_0 \subset E$ 为一零测子集, 则任意改变 f 在 E_0 上的值并不影响 f 的可测性. 此外, f 在 E 的任意可测子集 F 上仍然是可测的, 这是因为 $\forall a \in \mathbb{R}$,

$$\{x \,|\, f(x) > a,\ x \in F\} = F \cap \{x \,|\, f(x) > a,\ x \in E\}.$$

设 $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, 诸 E_k 是 $\mathbb{R}$ 中互不相交的可测集. 假定 f 在每个 E_k 上是可测的, 那么 f 也是 E 上的可测函数. 这是因为

$$\{x \,|\, f(x) > a,\ x \in E\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x \,|\, f(x) > a,\ x \in E_k\}.$$

定理 2.5.2 设 f 是可测集 $E \subset \mathbb{R}$ 上的可测函数, $\alpha \in \mathbb{R}$ 为任意常数. 那么 (1) αf, $|f|$ 和 $|f|^2$ 均为可测函数; (2) 又若 $f(x) \neq 0$, $\forall x \in E$, 则 $f(x)^{-1} = 1/f(x)$ 也是可测函数.

证明 (1) 为证 αf 可测, 不妨设 $\alpha > 0$, 于是 $\forall a \in \mathbb{R}$,

$$\{x \,|\, \alpha f(x) > a\} = \{x \,|\, f(x) > a/\alpha\}$$

是可测集. 注意当 $a \geqslant 0$ 时, $\{x \,|\, |f(x)| > a\} = \{x \,|\, f(x) > a\} \cup \{x \,|\, f(x) < -a\}$, 而当 $a < 0$ 时, $\{x \,|\, |f(x)| > a\} = \varnothing$, 由此可见 $|f|$ 的可测性. 类似地容易从 $|f|$ 的可测性推出 $|f|^2$ 的可测性.

(2) 当 $f(x) \neq 0$, $\forall x \in E$ 时, 有

$$\{x \,|\, f(x)^{-1} > a\} = \begin{cases} \{x \,|\, f(x) > 0\}, & 若\ a = 0, \\ \{x \,|\, f(x) < a^{-1}\} \cap \{x \,|\, f(x) > 0\}, & 若\ a > 0, \\ \{x \,|\, f(x) < a^{-1}\} \cup \{x \,|\, f(x) > 0\}, & 若\ a < 0. \end{cases}$$

于是由 f 可测推出 $f(x)^{-1}$ 可测. □

定理 2.5.3 设 f, g 是可测集 $E \subset \mathbb{R}$ 上的两个可测函数, 那么 $f \pm g$, fg 以及 f/g (若 $g(x) \neq 0$, $\forall x \in E$) 均为可测函数.

证明 利用定理 2.5.2, 我们只需证明 $f - g$ 和 fg 是可测函数. 设有理数集 $\mathbb{Q}$ 以序列形式表成 $\mathbb{Q} = \{r_k \,|\, k \geqslant 1\}$. 根据 $\mathbb{Q}$ 在实数集 $\mathbb{R}$ 中的稠密性, 对于任意 $a \in \mathbb{R}$, 若 $f(x) - g(x) > a$, 则存在某个 k 使得 $f(x) > r_k > a + g(x)$. 由此不难看出

$$\{x \,|\, f(x) - g(x) > a\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} (\{x \,|\, f(x) > r_k\} \cap \{x \,|\, g(x) < r_k - a\}),$$

于是从 f, g 可测即得 $f-g$ 可测. 又 $\forall a\in\mathbb{R}$, 有

$$\{x\,|\,|f(x)|>a\}=\begin{cases}E, & 若\ a<0,\\ \{x\,|\,f(x)>a\}\cup\{x\,|\,f(x)<-a\}, & 若\ a\geqslant 0,\end{cases}$$

由此可得 $|f|$ 可测.

最后, 从 $f(x)g(x)=\frac{1}{2}[(f(x)+g(x))^2-(f(x)-g(x))^2]$ 可知 fg 的可测性. □

定理 2.5.4 设 $\{f_j\,|\,j\geqslant 1\}$ 是可测集 $E\subset\mathbb{R}$ 上的一列可测函数. 若 $\forall x\in E$, 存在极限

$$\lim_{j\to\infty}f_j(x)=f(x),$$

则 f 也是 E 上的可测函数.

证明 $\forall a\in\mathbb{R}$, 令

$$A_n^{(j)}=\{x\,|\,f_j(x)>a+1/n\},\quad B_n^{(k)}=\bigcap_{j=k}^{\infty}A_n^{(j)}.$$

显然, $A_n^{(j)}$ 和 $B_n^{(k)}$ 均为可测集. 为证 f 可测, 只需证明

$$\{x\,|\,f(x)>a\}=B\triangleq\bigcup_{k,n=1}^{\infty}B_n^{(k)}.$$

首先设 $x_0\in E$, $f(x_0)>a$. 于是存在一自然数 n 使得 $f(x_0)>a+1/n$. 由于 $f_j(x_0)\to f(x_0)(j\to\infty)$, 故存在 $k\in\mathbb{N}$ 使得 $f_j(x_0)>a+1/n$, $\forall j\geqslant k$. 因此 $x_0\in A_n^{(j)}$, $\forall j\geqslant k$. 从而 $x_0\in B_n^{(k)}\subset B$.

然后设 $x_0\in B$, 则 x_0 属于某个 $B_n^{(k)}$. 因此 $x_0\in A_n^{(j)}$, $\forall j\geqslant k$, 即

$$f_j(x_0)>a+1/n,\ \forall j\geqslant k,$$

在上式中令 $j\to\infty$, 即得 $f(x_0)>a+1/n>a$. □

前面我们已经指出, 对于函数 $f:E\to\mathbb{R}$, 改变 f 在零测子集 $E_0\subset E$ 上的值, 并不会影响 f 在 E 上的可测性. 这就是说, 在考虑一个函数的可测性时, 零测集是一个可以忽略的集合.

定义 2.5.2 设 $E\subset\mathbb{R}$ 为一可测集, A 为一个与集合 E 有关的数学命题. 若 A 在 E 的每一点成立, 则称 A 在 E 上成立; 若有一零测集 $E_0\subset E$, 使得 A 在 $E\setminus E_0$ 上成立, 则称 A 在 E 上几乎处处成立. "几乎处处" 通常用英文缩写 a.e. 表示.

例如, 设 A 为 "函数列 $f_k(x)\to f(x)$", 并设 E_0 是 E 的一零测子集. 如果 $f_k(x)\to f(x)$ 在 $E\setminus E_0$ 上成立, 则称 $f_k(x)$ 在 E 上几乎处处收敛于 $f(x)$, 记作 $f_k(x)\to f(x)$, a.e. 于 E.

再如, 设 $f: E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $E_0 \subset E$, $\mathrm{m}(E_0) = 0$, 若 f 在 $E \setminus E_0$ 上连续, 则称 f 在 E 几乎处处连续.

定理 2.5.5 设 $\{f_k \mid k \geqslant 1\}$ 是可测集 $E \subset \mathbb{R}$ 上的一列可测函数. 若 $f_k(x) \to f(x)$, a.e. 于 E, 则 f 也是一个可测函数.

证明 设 $E_0 = \left\{x \in E \,\middle|\, \text{极限 } \lim_{k\to\infty} f_k(x) \neq f(x), \text{ 或不存在}\right\}$. 由定理假设有 $\mathrm{m}(E_0) = 0$, 故 f 在 E_0 上可测, 而从定理 2.5.4 可知 f 在 $E \setminus E_0$ 上可测. 因此 f 在 $E = E_0 \cup (E \setminus E_0)$ 上可测. □

作为练习, 读者可证明如下结论: 设 $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}$ 为可测集, 假定 f 是 E_1 和 E_2 上的可测函数, 那么 f 在 $E_1 \cup E_2$ 上也是可测的. 进而可以将上述结论推广到可数个可测集 $E_1, E_2, \cdots$ 的情形.

定义 2.5.3 给定两个函数 $f, g: E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 称 f 和 g 在 E 上是等价的, 记作 $f \sim g$, 是指 $f(x) = g(x)$, a.e. 于 E.

容易验证, 上面定义的 E 上函数之间的等价性确实是一种等价关系, 即满足

(1) $f \sim f$;

(2) $f \sim g \Longrightarrow g \sim f$;

(3) $f \sim g, g \sim h \Longrightarrow f \sim h$.

于是我们可以把 E 上所有可测函数按上述等价关系划分成一些等价函数类, 属于同一等价类中函数彼此等价, 而不同等价类中的函数则不等价. 在后面讨论勒贝格积分时, 我们将回到等价函数类的问题.

下面我们讨论匈牙利数学家 F Riesz 引入的可测函数列的依测度收敛 (也称度量收敛) 概念, 这种收敛通常要弱于几乎处处收敛.

定义 2.5.4 设 $\{f_k \mid k \geqslant 1\}$ 是可测集 $E \subset \mathbb{R}$ 上的一列几乎处处有限的可测函数, f 是 E 上几乎处处有限的可测函数. 称 $\{f_k \mid k \geqslant 1\}$ 在 E 上依测度收敛 (或度量收敛) 于 f, 记作 $f_k \rightrightarrows f$, 是指 $\forall \varepsilon > 0$, 有

$$\lim_{k\to\infty} m(\{x \mid |f_k(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon, x \in E\}) = 0.$$

一个自然的问题是, 这种依测度收敛的极限是唯一的吗? 下一定理表明依测度收敛的极限函数在函数等价的意义下是唯一的.

定理 2.5.6 设 $\{f_k \mid k \geqslant 1\}$ 是可测集 $E \subset \mathbb{R}$ 上的一列几乎处处有限的可测函数, f 是 E 上几乎处处有限的可测函数. (1) 如果 $f_k \rightrightarrows f$, $f_k \rightrightarrows g$, 那么 $f \sim g$; (2) 若 $f_k \rightrightarrows f$, 并且 $f \sim g$, 则 $f_k \rightrightarrows g$.

证明 (1) 我们要证 $\mathrm{m}(\{x \mid f(x) \neq g(x)\}) = 0$. 由于

$$|f(x) - g(x)| \leqslant |f_k(x) - f(x)| + |f_k(x) - g(x)|,$$

故对任意自然数 n, 有

$$E(|f-g|,1/n)\subset E(|f_k-f|,1/2n)\cup E(|f_k-g|,1/2n),$$

这里对于定义在 E 上的一般函数 f, 我们采用记号 $E(f,\varepsilon)=\{x\,|\,f(x)\geqslant\varepsilon,x\in E\}$. 因此

$$\mathrm{m}(E(|f-g|,1/n))\leqslant\mathrm{m}(E(|f_k-f|,1/2n))+\mathrm{m}(E(|f_k-g|,1/2n)).$$

在上式中令 $k\to\infty$ 得到

$$\mathrm{m}(E(|f-g|,1/n))=0,\quad\forall n\in\mathbb{N}.$$

但显然我们有

$$\{x\,|\,f(x)\neq g(x)\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}E(|f-g|,1/n),$$

从而 $\mathrm{m}(\{x\,|\,f(x)\neq g(x)\})=0$, 即 $f=g$, a.e. 于 E.

(2) 现在设 $f_k\rightrightarrows f$, 而 $f\sim g$. 令 $E_0=\{x\,|\,f(x)\neq g(x)\}$, 则 $\mathrm{m}(E_0)=0$. 记 $E_1=E\setminus E_0$, 于是 $E=E_0\cup E_1$. $\forall\varepsilon>0$, 有

$$\begin{aligned}&\{x\,|\,|f_k(x)-g(x)|\geqslant\varepsilon,x\in E\}\\&=\{x\,|\,|f_k(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon,x\in E_1\}\cup\{x\,|\,|f_k(x)-g(x)|\geqslant\varepsilon,x\in E_0\}.\end{aligned}$$

注意 $\{x\,|\,|f_k(x)-g(x)|\geqslant\varepsilon,x\in E_0\}$ 是零测子集, 由此可得

$$\mathrm{m}(\{x\,|\,|f_k(x)-g(x)|\geqslant\varepsilon,x\in E\})\leqslant\mathrm{m}(\{x\,|\,|f_k(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon,x\in E_1\})\to0(k\to\infty).$$

在上式中让 $k\to\infty$, 可知 $f_k\rightrightarrows g$. □

定理 2.5.7 (勒贝格定理)　设 E 为 $\mathbb{R}$ 上的可测集, 假定

(1) $\mathrm{m}(E)<\infty$;

(2) $\{f_k\,|\,k\geqslant1\}$ 为 E 上一列可测函数;

(3) $f_k\to f$, a.e. 于 E.

那么在 E 上 $f_k\rightrightarrows f$.

证明　依据定理 2.5.5, f 是 E 上的可测函数. 给定 $\varepsilon>0$, 令

$$A_k=\{x\,|\,|f_k(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon,x\in E\},\quad k=1,2,\cdots.$$

设 $E_0=\{x\,|\,f_k(x)\nrightarrow f(x),x\in E\}$, 则 $\mathrm{m}(E_0)=0$. 令

$$B_k=\bigcup_{j=k}^{\infty}A_j,\quad B=\bigcap_{k=1}^{\infty}B_k.$$

今证 $B\subset E_0$. 事实上, 设 $x\in B$, 则 $x\in B_k$, $\forall k\geqslant1$. 于是 $\forall k\geqslant1$, 存在自然数 $j_k\geqslant k$, 使得 $x\in A_{j_k}$, 即 $|f_{j_k}(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon$, 故 $x\in E_0$. 于是 $\mathrm{m}(B)=0$.

注意 $\{B_k\,|\,k\geqslant1\}$ 是一列单调递减的集列, 故 $\mathrm{m}(B_k)\to\mathrm{m}(B)=0$. 由于 $A_k\subset B_k$, 故 $\mathrm{m}(A_k)\leqslant\mathrm{m}(B_k)$, 从而 $\lim\limits_{k\to\infty}\mathrm{m}(A_k)=0$, 这正是说 $f_k\rightrightarrows f$. □

上述勒贝格定理的逆命题不成立, 即函数列的依测度收敛并不意味着几乎处处收敛. 此外, 勒贝格定理中的条件 $\mathrm{m}(E)<\infty$ 是必要的.

例 2.5.5 设 $E=(0,\infty)$, 令

$$f_n(x)=\begin{cases}0, & 若\ x\in(0,n),\\ 1, & 若\ x\in(n,\infty).\end{cases}$$

显然 $\forall x\in(0,\infty)$, 有 $f_n(x)\to 0(n\to\infty)$. 但 $\{x\,|\,|f_n(x)-0|\geqslant 1\}=[n,\infty)$, 因此 f_n 在 E 上不可能依测度收敛到 0. □

定理 2.5.8 (Riesz **定理**) 设 E 为 $\mathbb{R}$ 上的可测集, $\mathrm{m}(E)<\infty$, 并设 $\{f_n\,|\,n\geqslant 1\}$ 为 E 上的一列可测函数. 假定 $f_n\rightrightarrows f$, 那么存在 $\{f_n\,|\,n\geqslant 1\}$ 的一子列 $\{f_{n_k}\,|\,k\geqslant 1\}$, 使得 $f_{n_k}\to f$, a.e. 于 E.

证明 取单调递减正数列 $\{\varepsilon_k\,|\,k\geqslant 1\}$, 使得 $\varepsilon_k\to 0(k\to\infty)$; 并取正数列 $\{\delta_k\,|\,k\geqslant 1\}$, 使得 $\delta_1+\delta_2+\cdots<\infty$.

对于 δ_1 和 ε_1, 由于 $f_k\rightrightarrows f$, 故存在自然数 n_1 使得

$$\mathrm{m}(\{x\,|\,|f_{n_1}(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon_1\})<\delta_1.$$

同理, 对于一般的 δ_k 和 ε_k, 存在自然数 $n_k>n_{k-1}$ 使得

$$\mathrm{m}(\{x\,|\,|f_{n_k}(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon_k\})<\delta_k,\quad\forall k>1.$$

这样我们得到函数列 $\{f_k\,|\,k\geqslant 1\}$ 的一个子列 $\{f_{n_k}\,|\,k\geqslant 1\}$. 今证 $f_{n_k}\to f(k\to\infty)$, a.e. 于 E. 事实上, 设

$$E_j=\bigcup_{k=j}^{\infty}\{x\,|\,|f_{n_k}(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon_k\},\quad E_0=\bigcap_{j=1}^{\infty}E_j.$$

显然 $\{E_j\,|\,j\geqslant 1\}$ 是 E 中一单调递减集列, 从而

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{m}(E_n)=\mathrm{m}(E_0).$$

从 E_j 的定义可知

$$\mathrm{m}(E_j)\leqslant\sum_{k=j}^{\infty}\mathrm{m}(\{x\,|\,|f_{n_k}(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon_k\})<\sum_{k=j}^{\infty}\delta_k.$$

由此可见, $\mathrm{m}(E_j)\to 0(j\to\infty)$, 从而 $\mathrm{m}(E_0)=0$.

今任取 $x_0\in E\setminus E_0$. 由于 $x_0\notin E_0$, 故存在 $k_0\in\mathbb{N}$ 使得 $x_0\notin E_{k_0}$, 即 $x_0\notin\{x\,|\,|f_{n_k}(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon_k\}$, $\forall k\geqslant k_0$. 因此

$$|f_{n_k}(x_0)-f(x_0)|<\varepsilon_k,\quad\forall k\geqslant k_0.$$

这样我们证明了 $f_{n_k}(x_0)\to f(x_0)(k\to\infty)$, 从而有 $f_{n_k}\to f$, a.e. 于 E. □

定理 2.5.9 (叶果洛夫 (Egoroff) 定理) 设 E 为 $\mathbb{R}$ 上的可测集, 假定

(1) $\mathrm{m}(E) < \infty$;

(2) $\{f_n \,|\, n \geqslant 1\}$ 为 E 上一列几乎处处有限的可测函数;

(3) $f_k \to f$, a.e. 于 E, 并且 $|f(x)| < \infty$, a.e. 于 E.

那么 $\forall \delta > 0$, 存在可测子集 $E_\delta \subset E$ 使得 $\mathrm{m}(E_\delta) < \delta$, 并且 $\{f_n \,|\, n \geqslant 1\}$ 在 $E \setminus E_\delta$ 上一致收敛于 f.

证明 不妨认为 f_n 和 f 在 E 上处处取有限值. 取两个正数列 $\{\varepsilon_n \,|\, n \geqslant 1\}$ 和 $\{\delta_n \,|\, n \geqslant 1\}$, 使得 $\varepsilon_n \to 0$, $\delta_1 + \delta_2 + \cdots < \infty$. 对任意 $n \geqslant 1$ 和 $k \geqslant 1$, 令

$$A_n^{(k)} = \bigcup_{j=n}^{\infty} \{x \,|\, |f_j(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon_k\}.$$

由定理 2.5.7 的证明可知 $\forall k \geqslant 1$, 有 $\mathrm{m}(A_n^{(k)}) \to 0 (n \to \infty)$. 于是 $\forall k \geqslant 1$, 存在 n_k 使得 $\mathrm{m}(A_{n_k}^{(k)}) < \delta_k$, 并且 $n_k \to \infty (k \to \infty)$. 任给 $\delta > 0$, 取自然数 p 充分大使得 $\delta_p + \delta_{p+1} + \cdots < \delta$. 令

$$E_\delta = \bigcup_{k=p}^{\infty} A_{n_k}^{(k)},$$

我们有

$$\mathrm{m}(E_\delta) \leqslant \sum_{k=p}^{\infty} \mathrm{m}(A_n^{(k)}) \leqslant \sum_{k=p}^{\infty} \delta_k < \delta.$$

设 $x \in E \setminus E_\delta$, 则 $x \notin A_n^{(k)}$, $\forall k \geqslant p$, 即

$$|f_j(x) - f(x)| < \varepsilon_k, \quad \forall j \geqslant n_k, \ \forall x \in E \setminus E_\delta.$$

上式表明 $\{f_n \,|\, n \geqslant 1\}$ 在 $E \setminus E_\delta$ 上一致收敛于 f. □

直观地说, 这一定理说明几乎处处收敛与一致收敛之间的差别 “不大”: 不一致收敛的点的集合的测度可以任意小.

可测函数类显然要比连续函数类广泛得多. 关于可测函数的进一步性质的研究, 限于篇幅, 这里我们仅列出一些重要的结果, 有兴趣的读者可查阅文献 [96].

定理 2.5.10 (鲁金 (Lusin) 定理) 设 E 为 $\mathbb{R}$ 上的可测集, $f: E \to \mathbb{R}$ 为几乎处处取有限值的可测函数, 那么 $\forall \varepsilon > 0$, 存在闭集 $F_\varepsilon \subset E$, $\mathrm{m}(E \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$, 使得 f 在 F_ε 上连续.

定理 2.5.11 设 E 为 $\mathbb{R}$ 上的可测集, $f: E \to \mathbb{R}$ 为几乎处处取有限值的可测函数, 那么 $\forall \varepsilon > 0$, 存在闭集 $F_\varepsilon \subset E$, $\mathrm{m}(E \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$ 以及定义在 $\mathbb{R}$ 上的连续函数 φ, 使得 $f(x) = \varphi(x)$, $\forall x \in F_\varepsilon$.

直观地说, 以上两个定理说明几乎处处有限的可测函数与连续函数之间的差别 “不大”: 不连续点的集合的测度可以任意小. 而下面定理说明这种函数可用连续函数逼近.

定理 2.5.12 设 E 为 $\mathbb{R}$ 上的可测集, $f: E \to \mathbb{R}$ 为几乎处处取有限值的可测函数, 那么存在定义在 $\mathbb{R}$ 上的连续函数列 $\{\varphi_n \mid n \geqslant 1\}$, 使得 $\varphi_n \to f$, a.e. 于 E.

下面我们指出连续函数可用简单的多项式来逼近, 从而一般的可测函数也可以用多项式来逼近.

定理 2.5.13 (Weierstrass 定理) 设 $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ 为连续函数, 则 $\forall \varepsilon > 0$, 存在多项式 $p(x)$, 使得

$$|f(x) - p(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in [a,b].$$

在给出该定理证明之前, 我们先证明一个引理.

引理 2.5.1 设 $0 \leqslant x \leqslant 1$, 则

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = 1; \tag{2.5.1}$$

$$\sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = nx(1-x). \tag{2.5.2}$$

证明 式 (2.5.1) 是如下熟知的二项式展开的直接结果

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}. \tag{2.5.3}$$

下面证明式 (2.5.2). 在式 (2.5.3) 中相对 a 求导后乘以 a, 即得

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k k a^k b^{n-k} = na(a+b)^{n-1}. \tag{2.5.4}$$

然后在式 (2.5.4) 中相对 a 求导后再乘以 a, 得到

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k k^2 a^k b^{n-k} = na(na+b)(a+b)^{n-2}. \tag{2.5.5}$$

在式 (2.5.3)~式 (2.5.5) 中令 $a = x$, $b = 1-x$, 然后分别乘以 n^2x^2, $-2nx$ 和 1, 再相加即得式 (2.5.2). □

设 $f: [0,1] \to \mathbb{R}$, 我们称多项式

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \tag{2.5.6}$$

为关于函数 f 的伯恩斯坦多项式.

定理 2.5.13 的证明 若 $[a,b]\neq[0,1]$, 则作变换 $y=\frac{x-a}{b-a}$, 即 $x=a+(b-a)y$. 于是当 $x\in[a,b]$ 时, $y\in[0,1]$, 反之亦然. 这样 $g(y)=f(a+(b-a)y)$ 就成为 $[0,1]$ 上的函数. 因此, 我们只要讨论 $[0,1]$ 上的连续函数就可以了.

根据引理 2.5.1, $f(x)$ 可以表示成

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}f(x)C_n^kx^k(1-x)^{n-k}.$$

于是

$$|f(x)-B_n(x)|\leqslant\sum_{k=0}^{n}\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|C_n^kx^k(1-x)^{n-k}. \tag{2.5.7}$$

由于 f 在 $[0,1]$ 上连续, 故 f 在 $[0,1]$ 上也一致连续, 从而对于给定的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$ 使得当 $x_1,x_2\in[0,1]$, $|x_1-x_2|<\delta$ 时有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$. 现在取任意固定的 $x\in[0,1]$, 令

$$M=\{k\,|\,|x-k/n|<\delta,\ k=0,1,\cdots,n\},$$

$$N=\{k\,|\,|x-k/n|\geqslant\delta,\ k=0,1,\cdots,n\}.$$

于是

$$\sum_{k\in M}\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|C_n^kx^k(1-x)^{n-k}<\varepsilon. \tag{2.5.8}$$

记 $\mu=\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}|f(x)|$, 则有

$$\sum_{k\in N}\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|C_n^kx^k(1-x)^{n-k}\leqslant\frac{2\mu}{n^2\delta^2}\sum_{k\in N}(k-nx)^2C_n^kx^k(1-x)^{n-k}$$

$$\leqslant\frac{2\mu}{n^2\delta^2}\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2C_n^kx^k(1-x)^{n-k}=\frac{2\mu}{n\delta^2}x(1-x)\leqslant\frac{\mu}{2n\delta^2}, \tag{2.5.9}$$

这里利用了 $x(1-x)\leqslant 1/4$, $\forall\,x\in[0,1]$. 今若取 n 充分大, 使得 $\frac{\mu}{2n\delta^2}<\varepsilon$, 则从式 (2.5.8) 和式 (2.5.9) 得到

$$|f(x)-B_n(x)|<2\varepsilon,\quad\forall\,x\in[0,1].$$

□

推论 2.5.1 设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 为几乎处处有限的可测函数, 那么存在一列多项式 $\{p_n\,|\,n\geqslant 1\}$ 使得 $p_n\to f(n\to\infty)$, a.e. 于 E.

2.6 概率测度与 Hausdorff 测度

前几节我们讨论 $\mathbb{R}$ 上的勒贝格测度, 不难将其推广到 $\mathbb{R}^n$ 上. $\mathbb{R}^n$ 上的勒贝格测度实际上是 $\mathbb{R}^n$ 上的长度、面积、体积等的一个直接推广. 它是勒贝格积分的基础, 也是本章的主线. 但实际上, 测度有很多. 例如, 如果 $m(\Omega)=1$, m 称为概率测度. 系统控制理论中较常见到的还有黎曼流形上的黎曼测度, 拓扑群上的 Haar 测度等, 还有在复杂系统研究中极为重要的 Hausdorff 测度. 本节我们对一般的测度作一个简单介绍, 作为特例, 对概率测度与 Hausdorff 测度作适当介绍.

定义 2.6.1 (1) 给定一个集合 Ω 及其子集族 $\mathcal{F}\subset 2^{\Omega}$. $\mathcal{F}$ 称为一个 σ 代数, 如果它满足(i) $\Omega\in\mathcal{F}$; (ii) 如果 $A\in\mathcal{F}$, 那么 $A^c\in\mathcal{F}$; (iii) 如果 $A_i\in\mathcal{F}$, $i=1,2,\cdots$, 那么 $\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\in\mathcal{F}$.

(2) 集合 Ω 连同它上的一个 σ 代数 $\mathcal{F}$, 称为一个可测空间, 记作 $(\Omega,\mathcal{F})$.

例 2.6.1 (1) 设 $\mathcal{F}$ 为 Ω 上的一个 σ 代数, 则 $\varnothing\in\mathcal{F}$.

(2) 设 Ω 为任意集, $\mathcal{F}:=2^{\Omega}$, 那么 $(\Omega,\mathcal{F})$ 是一个可测空间. $\mathcal{F}$ 是最细的 σ 代数.

(3) 设 Ω 为任意集, $\mathcal{F}:=\{\Omega,\varnothing\}$, 那么 $(\Omega,\mathcal{F})$ 是一个可测空间. $\mathcal{F}$ 是最粗的 σ 代数. □

定义 2.6.2 设 $(\Omega,\mathcal{F})$ 为一可测空间. $m:\mathcal{F}\to\mathbb{R}$ 称为一个测度, 如果它满足

(1) $m(A)\geqslant 0$, $\forall A\in\mathcal{F}$;

(2) $m(\varnothing)=0$;

(3) 设 $A_i\in\mathcal{F}$, $i=1,2,\cdots$, $A_i\cap A_j=\varnothing$, $\forall i\neq j$, 那么

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}m(A_i).$$

$A\subset\Omega$ 称为可测集, 如果 $A\in\mathcal{F}$.

回忆定理 2.4.2, 我们知道, 勒贝格测度显然也满足关于一般测度的定义. 那么, 我们当然想知道, 在 $\mathbb{R}$ 上到底哪些集合可测, 即对于 $\Omega=\mathbb{R}$ 上的勒贝格测度, $\mathcal{F}$ 是什么呢?

首先, 我们知道, 开区间是可测的, 因此

$$\mathcal{I}:=\{(a,b)\,|\,a<b,a,b\in\mathbb{R}\}\cup\mathbb{R}\cup\varnothing\subset\mathcal{F}.$$

因为可测集的可数并及其余集可测, 于是有

$$\mathcal{B}:=\left\{\bigcup_{i=1}^{\infty}I_i,\bigcap_{i=1}^{\infty}I_i\,\middle|\,I_i\in\mathcal{I}\right\}\subset\mathcal{F},$$

$\mathcal{B}$ 称为 Borel 集, 它是基本的可测集集合.

最后, 因为零测集不影响测度, 所以总可以将可测集扩充到与其相差一个零测集的集合上. 一般称此为 σ 代数的完备化. 所以

$$\mathcal{F}=\{C\subset\mathbb{R}\,|\,\text{存在某个 }B\in\mathcal{B},\text{ 使 }m(C\Delta B)=0\}.$$

通常也把完备化以后的 Borel 集仍然称为 Borel 集.

定义 2.6.3 设 $(\Omega_1,\mathcal{F}_1)$ 及 $(\Omega_2,\mathcal{F}_2)$ 为两个可测空间. $\pi:\Omega_1\to\Omega_2$ 称为一个可测映射, 如果每一个可测集的原象可测, 即

$$\pi^{-1}(A)\in\mathcal{F}_1,\quad \forall A\in\mathcal{F}_2.$$

当 $(\Omega_2,\mathcal{F}_2)=(\mathbb{R},\mathcal{B})$ 时, 可测映射 π 称为可测函数.

容易证明, $(\Omega_1,\mathcal{F}_1)=(\mathbb{R},\mathcal{B})$ 时这个定义与定义 2.5.1 是一致的. (见习题 2.10)

下面给一个简单例子.

例 2.6.2 投骰子, 事件空间 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$. 将 Ω 的所有子集作为 σ 代数, 即 $\mathcal{F}=2^{\Omega}$. 将投出的骰子数 x 作为一个函数, 则它是一个可测函数. 定义概率测度

$$P(x=i)=1/6,\quad i=1,2,3,4,5,6.$$

则 $\{\Omega,\mathcal{F},P\}$ 为一概率空间, x 是一个随机变量. 现在如果定义

$$\mathcal{F}=\{\varnothing,\Omega,\{1,2,3\},\{4,5,6\}\}.$$

显然, $\mathcal{F}$ 是一个 σ 代数, 定义

$$P(x\leqslant 3)=1/2,\quad P(x>3)=1/2.$$

则 $\{\Omega,\mathcal{F},P\}$ 也是一个概率空间. 但投出的骰子数不是一个可测函数. □

概率论与随机过程是系统与控制理论中的一个重要工具, 本书将在第 4 ~ 第 5 章详细讨论.

近年来, 由于对复杂系统研究的需求, 分形几何与分数维成为一个热点. 对于整数维的事物, 大家都很熟悉, 例如, 直线是一维的, 平面是二维的, 球是三维的. 但有些东西的维数却不那么显然. 例如海岸线, 由于其高度的曲折性, 它似乎要比一维多. 又如康托集 (见例 2.4.4), 它是零测集, 还够一维吗?

下面再给两个典型的例子. 类似于康托集, 它们都是通过多次迭代而得到.

例 2.6.3 Koch 曲线 (见图 2.6.1). 一条线段, 中间 1/3 用等边三角形两边代替, 得到四条边的一折线. 然后对四条边作同样的替代. 重复这个过程, 最后得到的就是 Koch 曲线. □

例 2.6.4 雪花. 图 2.6.2 给出两种刻画雪花的方法: (a) 表示将五个小单元叠加到一起, 然后将五个新图形再叠加, 这样不停做下去. 为好看, 也不妨每次再将尺寸缩回原来的大小; (b) 表示将一个方块九等分, 取去各边中间的四小块. 然后对剩下的五小块作同样的事情, 一直做下去, 最后得到雪花. □

那么, 怎样计算这类几何形体的维数呢? 我们介绍 Hausdorff 测度.

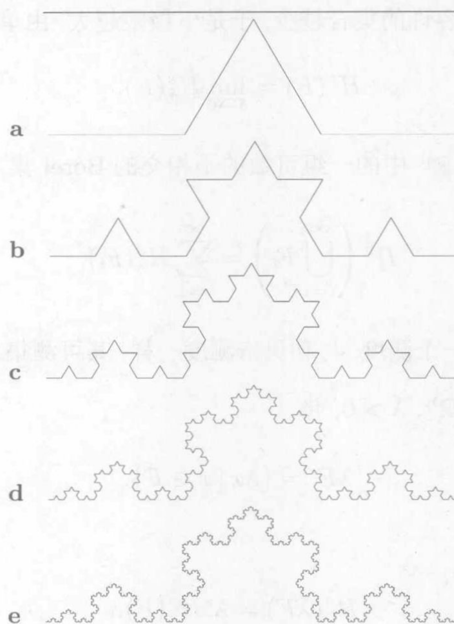


图 2.6.1 Koch 曲线

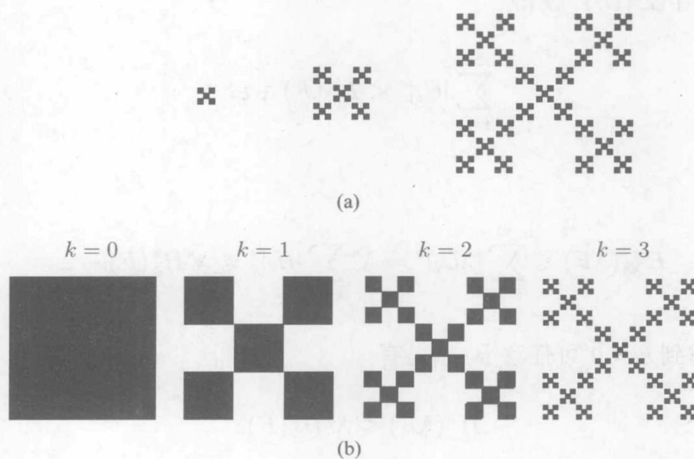


图 2.6.2 雪花

设 $F \subset \mathbb{R}^n$, $0 \leqslant \delta \leqslant 1$. 对于每个 $0 < \delta < 1$ 可以定义

$$H_\delta^s(F) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s \;\middle|\; \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \supset F,\ |U_i| \leqslant \delta \right\}. \tag{2.6.1}$$

注意, 一个集合 U 的直径, 记作 $|U|$, 定义为

$$|U| = \sup\{\|x-y\| \mid x, y \in U\}.$$

如果固定 s, 则因 δ 越小, 容许的集合越少, 于是下极限越大. 由单调性, 可定义

$$H^s(F) = \lim_{\delta \to 0} H^s_\delta(F). \tag{2.6.2}$$

如果 $\{F_i \mid i = 1, 2, \cdots\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一组可数的不相交的 Borel 集, 那么不难证明

$$H^s\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} H^s(F_i).$$

因此, $H^s_\delta(F)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个测度. 与勒贝格测度一样, 其可测集为 Borel 集.

命题 2.6.1 设 $F \subset \mathbb{R}^n$, $\lambda > 0$, 记

$$\lambda F := \{\lambda x \mid x \in F\}.$$

那么

$$H^s(\lambda F) = \lambda^s H^s(F). \tag{2.6.3}$$

证明 如果 $F \subset \bigcup_{i=1}^\infty U_i$, 且 $|U_i| < \delta$, 那么 $\lambda F \subset \bigcup_{i=1}^\infty \lambda U_i$, 且 $|\lambda U_i| < \lambda\delta$. 根据定义, 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $\{U_i\}$, 使得

$$\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s < H^s_\delta(F) + \varepsilon.$$

于是有

$$H^s_{\lambda\delta}(\lambda F) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda U_i|^s = \lambda^s \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s \leqslant \lambda^s H^s_\delta(F) + \varepsilon. \tag{2.6.4}$$

令 $\delta \to 0$ 且考虑到 $\varepsilon > 0$ 可任意小, 于是有

$$H^s(\lambda F) \leqslant \lambda^s H^s(F).$$

同理可知

$$H^s\left(\frac{1}{\lambda}\lambda F\right) \leqslant \left(\frac{1}{\lambda}\right)^s H^s(\lambda F),$$

即

$$\lambda^s H^s(F) \leqslant H^s(\lambda F).$$

于是等式成立. □

如果 F 为 $\mathbb{R}^k$ 上的一个可测集, 那么, F 的 k 维勒贝格测度与 $H^k(F)$ 是一致的 (严格地说, 差一个不依赖于 F 的固定常数) [73].

Hausdorff 测度主要用于测定物体的维数. 设 $t > s$, $F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$, $|U_i| < \delta$, 那么

$$\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^t = \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s |U_i|^{t-s} \leqslant \delta^{t-s} \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s.$$

因此, 用 Hausdorff 测度测量一个物体 F 时, 其值如图 2.6.3 所示. 当 s 小于某个邻界值时, 测量值为 ∞; 当 s 大于这个邻界值时, 测量值为 0; 当 s 等于这个邻界值时, 测量值可有各种不同情况. 于是, 这个邻界值称为 F 的 Hausdorff 维数.

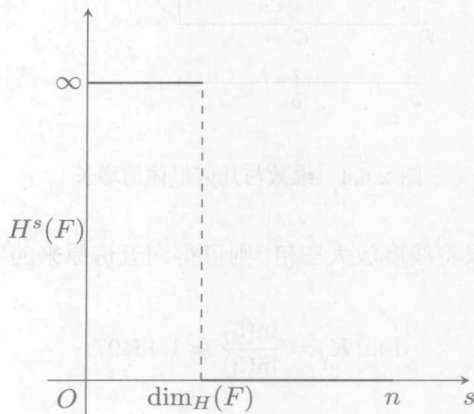


图 2.6.3 Hausdorff 维数

直接用 Hausdorff 测度的定义来判定维数是比较困难的. 在工程问题中可用计算机通过数值方法求它. 对于自相似图形, 有一种很方便的方法计算它, 即利用命题 2.6.1. 为形象起见, 我们看图 2.6.4: 线段 ab, 当它的长度增加一倍时, 会生成两个相同的线段. 正方形 $ABCD$, 当它的边长增加一倍时, 会生成四个相同的正方形, 立方体 $ABCDEFGH$, 当它的边长增加一倍时, 会生成八个相同的立方体. 如果我们用 K 表示线度增加的倍数, 用 N 表示复制出自身的份数, 那么下面的公式是显然的

$$\dim(F) = \frac{\ln(N)}{\ln(K)}. \tag{2.6.5}$$

将式 (2.6.5) 应用于自相似图形, 很容易算出其维数.

例 2.6.5 (1) 考虑康托集 C, 如果将线度放大三倍, 则可得到两份原来的康托集, 因此, 康托集的维数为

$$\dim(C) = \frac{\ln(2)}{\ln(3)} \approx 0.63093.$$

(2) 考虑 Koch 曲线 K, 如果将线度放大三倍, 则可得到四份原来的 Koch 曲线, 因此, Koch 曲线的维数为

$$\dim(K) = \frac{\ln(4)}{\ln(3)} \approx 1.26186.$$

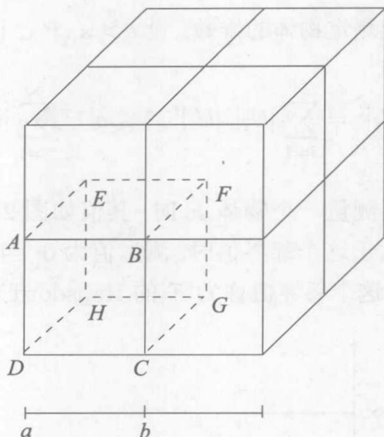


图 2.6.4　维数与几何形体的增长

(3) 考虑雪花 S, 如果将线度放大三倍, 则可得到五份原来的雪花图, 因此, 雪花图的维数为

$$\dim(K) = \frac{\ln(5)}{\ln(3)} \approx 1.46497.$$

□

2.7　勒贝格积分 (I) —— 有界可测函数情形

本节着手建立勒贝格积分理论. 前面已经指出, 正是由于黎曼积分的一些缺陷, 才要求新的积分理论的诞生. 黎曼积分在理论上确实存在一些严重弊端, 比如, $[a,b]$ 上黎曼可积函数列 $\{f_n \mid k \geqslant 1\}$ 的极限函数未必黎曼可积. 为了使

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

需要附加很强的条件. 再如, $[a,b]$ 上黎曼可积函数全体按照一种很自然的 "距离"

$$\rho(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x,$$

并不能形成一个 "完备" 的空间. 粗略地说, 黎曼可积函数全体在这种距离下极限运算不是 "封闭" 的. 我们期望新的积分能够克服上述弊端.

首先我们从测度有穷的集合上的有界可测函数的勒贝格积分开始.

定义 2.7.1　设 $E \subset \mathbb{R}$ 为可测集, $\mathrm{m}(E) < \infty$, $f: E \to \mathbb{R}$ 为有界可测函数, 从而存在常数 c, d 使得 $c < f(x) < d$, $\forall x \in E$. 作 $[c,d]$ 的分割 T

$$c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d.$$

记 $\delta = \delta(T) = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} (y_k - y_{k-1})$, δ 称为分割 T 的细度, 它反映了分割 T 分成子区间的精细程度. 令

$$E_k = \{x \mid y_{k-1} < f(x) \leqslant y_k, x \in E\},\ k = 1, 2, \cdots, n.$$

任取 $\xi_k \in [y_{k-1}, y_k]$, 作和式

$$\Sigma(f, T) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \mathrm{m}(E_k).$$

如果存在常数 J 使得 $J = \lim\limits_{\delta \to 0} \Sigma(f, T)$, 这里的极限过程与区间 $[c, d]$ 的分割 T 无关, 那么我们称 f 在 E 上勒贝格可积, 极限 J 称为 f 的勒贝格积分, 记作

$$J = (L)\int_E f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \text{或简记 } J = \int_E f(x)\,\mathrm{d}x.$$

当 $E = [a, b]$ 时, 就记作 $J = (L)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, 或 $J = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

定义中的和式 $\Sigma(f, T) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \mathrm{m}(E_k)$ 叫做函数 f 关于分割 T 的勒贝格和, 而

$$s(f, T) = \sum_{k=1}^{n} y_{k-1} \mathrm{m}(E_k), \quad S(f, T) = \sum_{k=1}^{n} y_k \mathrm{m}(E_k)$$

则分别叫做 f 关于分割 T 的勒贝格小和及大和. 容易看出

$$s(f, T) \leqslant \Sigma(f, T) \leqslant S(f, T).$$

于是为证 f 的勒贝格可积性, 等价于证明

$$\lim_{\delta \to 0} s(f, T) = \lim_{\delta \to 0} S(f, T),$$

这里同样要求极限与分割 T 无关.

定理 2.7.1 设 $E \subset \mathbb{R}$ 为可测集, $\mathrm{m}(E) < \infty$, $f : E \to \mathbb{R}$ 为有界可测函数, 则 f 是勒贝格可积函数.

证明 这里给出的证明类似于黎曼积分理论中的证明.

(1) 设 T_1, T_2 是 $[c, d]$ 的两个分割. 我们称 T_2 比 T_1 细, 是指 T_2 的分点包含了 T_1 的分点. 今证若 T_2 比 T_1 细, 则

$$s(f, T_1) \leqslant s(f, T_2), \quad S(f, T_1) \leqslant S(f, T_2).$$

事实上, 不妨设 T_2 比 T_1 多一个分点, 比如 $T_1 : c = y_0 < y_1 < \cdots < y_j < \cdots < y_n = d$, 而 $T_2 : c = y_0 < y_1 < \cdots < y_j < y^* < y_{j+1} < \cdots < y_n = d$. 令

$$E_{j+1}^1 = \{x \mid y_j < f(x) < y^*\}, \quad E_{j+1}^2 = \{x \mid y^* < f(x) < y_{j+1}\}.$$

f 关于分割 T_2 的勒贝格小和为

$$s(f,T_2)=s(f,T_1)+y_j\mathrm{m}(E_{j+1}^1)+y^*\mathrm{m}(E_{j+1}^2)-y_j\mathrm{m}(E_{j+1}).$$

于是

$$s(f,T_2)-s(f,T_1)=y_j\mathrm{m}(E_{j+1}^1)+y^*\mathrm{m}(E_{j+1}^2)-y_j\mathrm{m}(E_{j+1})\geqslant 0,$$

即 $s(f,T_1)\leqslant s(f,T_2)$. 同理可证 $(f,T_1)\geqslant(f,T_2)$.

(2) 设 T_1,T_2 是 $[c,d]$ 的任意两个分割, 则 $s(f,T_1)\leqslant S(f,T_2)$. 事实上, 设 T 为由 T_1 和 T_2 的所有分点组成的一个新的分割, 显然 T 比 T_1 和 T_2 都细. 于是根据已经证明了的结论 (1), 有

$$s(f,T_1)\leqslant s(f,T)\leqslant S(f,T)\leqslant S(f,T_2).$$

(3) 令 $s=\sup\limits_T s(f,T)$, $S=\inf\limits_T S(f,T)$, 这里的上下确界是对 $[c,d]$ 的所有分割 T 取的. 对于分割 T, 有

$$S(f,T)-s(f,T)=\sum_{k=1}^n(y_k-y_{k-1})\mathrm{m}(E_k)\leqslant\delta\mathrm{m}(E),$$

这里 $\delta=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}(y_k-y_{k-1})$ 为 T 的细度. 由于 $s(f,T)\leqslant s\leqslant S\leqslant S(f,T)$, 故我们有

$$|S-s|\leqslant|s(f,T)-S(f,T)|\leqslant\delta\mathrm{m}(E)\to 0(\delta\to 0).$$

由此得到 $s=S$.

(4) 记 $J=s=S$. $\forall\varepsilon>0$, 取 $\delta_0>0$ 使得 $\delta_0\mathrm{m}(E)<\varepsilon$. 于是对于 $[c,d]$ 的任意分割 T, 当 $\delta=\delta(T)<\delta_0$ 时, 有 $S(f,T)-s(f,T)\leqslant\delta\mathrm{m}(E)<\varepsilon$. 由于 $s(f,T)\leqslant J\leqslant S(f,T)$, 故有

$$|s(f,T)-J|<\varepsilon,\quad |S(f,T)-J|<\varepsilon,$$

从而 $\lim\limits_{\delta\to 0}s(f,T)=\lim\limits_{\delta\to 0}S(f,T)=J$, 即 f 是勒贝格可积的. □

在上面的讨论中要求函数 f 有界可测, 即要求 $c<f(x)<d$, $\forall x\in E$. 实际上, 只要求几乎处处有界就够了, 即 $c<f(x)<d$, a.e. 于 E. 这是因为, 改变函数 f 在一零测集上的值并不影响函数 f 的可积性以及积分的值. 因此, 在下面有关有界可测函数勒贝格积分基本性质的结果中, "有界可测" 可以用 "几乎处处有界可测" 代替, 等等, 将不再一一赘述.

定理 2.7.2 设 $E\subset\mathbb{R}$ 为可测集, $\mathrm{m}(E)<\infty$, $f,g:E\to\mathbb{R}$ 为有界可测函数, $\alpha\in\mathbb{R}$ 为常数, 那么有

(1) $\displaystyle\int_E(f(x)+g(x))\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x+\int_E g(x)\mathrm{d}x$;

(2) $\displaystyle\int_E\alpha f(x)\mathrm{d}x=\alpha\int_E f(x)\mathrm{d}x$.

证明 留作练习. □

定理 2.7.3 设 $E \subset \mathbb{R}$ 为可测集, $\mathrm{m}(E) < \infty$, $f: E \to \mathbb{R}$ 为有界可测函数, $c \leqslant f(x) \leqslant d, \forall x \in E$. 那么

$$c\mathrm{m}(E) \leqslant \int_E f(x)\mathrm{d}x \leqslant d\mathrm{m}(E).$$

证明 任取一自然数 n, 则 $c - 1/n < f(x) < d + 1/n, \forall x \in E$. 不难看出, 对应区间 $[c-1/n, d+1/n]$ 的分割 T 的勒贝格和 $\Sigma(f,T)$ 满足

$$(c - 1/n)\mathrm{m}(E) \leqslant \Sigma(f,T) \leqslant (d + 1/n)\mathrm{m}(E).$$

由此让 $\delta \to 0$ 取极限即得所需结论. □

推论 2.7.1 设 $E \subset \mathbb{R}$ 为可测集, $\mathrm{m}(E) < \infty$, $f, g: E \to \mathbb{R}$ 为有界可测函数, $\alpha \in \mathbb{R}$ 为常数, 那么有

(1) $\mathrm{m}(E) = 0 \Longrightarrow \int_E f(x)\mathrm{d}x = 0$;

(2) $f(x) \geqslant 0, \forall x \in E \Longrightarrow \int_E f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$;

(3) $f(x) \geqslant g(x), \forall x \in E \Longrightarrow \int_E f(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_E g(x)\mathrm{d}x$;

(4) $f(x) = \alpha, \forall x \in E \Longrightarrow \int_E f(x)\mathrm{d}x = \alpha\mathrm{m}(E)$.

定理 2.7.4 设 $E \subset \mathbb{R}$ 为可测集, $\mathrm{m}(E) < \infty$, 假定 $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$, $E_1, E_2, \cdots$ 为一列互不相交的可测集. 若 $f: E \to \mathbb{R}$ 为有界可测函数, 那么

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{E_j} f(x)\mathrm{d}x.$$

证明 首先考虑 $E = E_1 \cup E_2$, $E_1 \cap E_2 = \varnothing$. 设 $c < f(x) < d, \forall x \in E$, 并设 T 是 $[c, d]$ 的一个细度为 δ 的分割. 设 f 在 E_1 和 E_2 上的对应于分割 T 的勒贝格小和分别为 $s_1(f,T)$ 和 $s_2(f,T)$. 容易看出

$$s(f,T) = s_1(f,T) + s_2(f,T).$$

然后让 $\delta \to 0$ 即得

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \int_{E_1} f(x)\mathrm{d}x + \int_{E_2} f(x)\mathrm{d}x.$$

利用数学归纳法可证, 若 E 是互不相交的有穷个集合 $E_1, E_2, \cdots, E_n$ 之并, 则有

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \sum_{j=1}^{n} \int_{E_j} f(x)\mathrm{d}x.$$

最后考虑 $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ 的情形. 令 $F_{n+1} = \bigcup_{j=n+1}^{\infty} E_j$, 则 $E_1, E_2, \cdots, E_n, F_{n+1}$ 互不相交, 并且 $E = (\bigcup_{j=1}^{n} E_j) \cup F_{n+1}$. 因此

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \sum_{j=1}^{n} \int_{E_j} f(x)\mathrm{d}x + \int_{F_{n+1}} f(x)\mathrm{d}x.$$

注意到 $\mathrm{m}(F_{n+1}) \to 0(n \to \infty)$, 我们有

$$\left|\int_{F_{n+1}} f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant (|c|+|d|)\mathrm{m}(F_{n+1}) \to 0(n \to \infty).$$

由此即得所需结论. □

推论 2.7.2 设 $E \subset \mathbb{R}$ 为可测集, $\mathrm{m}(E) < \infty$, $f: E \to \mathbb{R}$ 为有界可测函数. 那么

(1) $\left|\int_E f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_E |f(x)|\mathrm{d}x$;

(2) 若 $f(x) \geqslant 0$ (或 $\leqslant 0$), $\forall x \in E$, 并且 $\int_E f(x)\mathrm{d}x = 0$, 那么 $f(x) = 0$, a.e. 于 E.

证明 (1) 令 $E_1 = \{x \mid f(x) \geqslant 0\}$, $E_2 = \{x \mid f(x) < 0\}$, 则 E_1 和 E_2 为可测集, $E = E_1 \cup E_2$, $E_1 \cap E_2 = \varnothing$. 于是根据定理 2.7.4

$$\begin{aligned}\left|\int_E f(x)\,\mathrm{d}x\right| &= \left|\int_{E_1} |f(x)|\mathrm{d}x - \int_{E_2} |f(x)|\mathrm{d}x\right| \\ &\leqslant \int_{E_1} |f(x)|\mathrm{d}x + \int_{E_2} |f(x)|\mathrm{d}x = \int_E |f(x)|\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

(2) 令 $E_0 = \{x \mid f(x) > 0, x \in E\}$. 从假设可知 $\int_{E_0} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$. 任取自然数 n, 令 $E_n = \{x \mid f(x) \geqslant 1/n, x \in E\}$, 于是 $E_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, 并且 $\{E_n \mid n \geqslant 1\}$ 是一列递增的可测集列. 从而 $\mathrm{m}(E_0) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{m}(E_n)$. 但 $0 = \int_{E_n} f(x)\mathrm{d}x \geqslant (1/n)\mathrm{m}(E_n)$. 因此 $\mathrm{m}(E_n) = 0$, 故 $\mathrm{m}(E_0) = 0$. 这表明 $f(x) = 0$, a.e. 于 E. □

下一定理涉及勒贝格积分号下极限运算的换序问题.

定理 2.7.5 (勒贝格有界收敛定理) 设 $E \subset \mathbb{R}$ 为可测集, $\mathrm{m}(E) < \infty$, 并设 $\{f_n\}$ 为 E 上一列可测函数. 假定 $\{f_n\}$ 是几乎一致有界的, 即存在常数 $\mu > 0$ 使得 $|f_n(x)| \leqslant \mu$, $\forall n \geqslant 1$, a.e. 于 E, 而 f 是 E 上有界可测函数, 不妨认为也满足 $|f(x)| \leqslant \mu$, a.e. 于 E. 如果 $f_n \rightrightarrows f$, 那么

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

证明 注意 $\mathrm{m}(E) = 0$ 时定理显然成立, 因此不妨认为 $\mathrm{m}(E) > 0$. 于是任给 $\varepsilon > 0$, 设 $\delta = \frac{\varepsilon}{2\mathrm{m}(E)}$. 令

$$E_n = \{x \mid |f_n(x) - f(x)| \geqslant \delta\}, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

依据假设, 有 $\mathrm{m}(E_n) \to 0(n \to \infty)$, 从而存在自然数 N 使得 $\mathrm{m}(E_n) < \frac{\varepsilon}{4\mu}$. 因此

$$\begin{aligned}&\left|\int_E f_n(x)\mathrm{d}x - \int_E f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_E |f_n(x) - f(x)|\mathrm{d}x \\ &= \int_{E_n} |f_n(x) - f(x)|\mathrm{d}x + \int_{E\setminus E_n} |f_n(x) - f(x)|\mathrm{d}x \\ &\leqslant 2\mu \mathrm{m}(E_n) + \delta \mathrm{m}(E \setminus E_n) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

然后让 $n \to \infty$ 即得所需结论. □

2.8 勒贝格积分 (II) —— 非负可测函数情形

设 $E \subset \mathbb{R}$ 为可测集, $f: E \to \mathbb{R}$ 为非负可测函数. 对于任意自然数 n, 记

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{若 } f(x) \leqslant n, \\ n, & \text{若 } f(x) > n, \end{cases}$$

称为 f 的截断函数. 容易看出, $\{f^{(n)} \mid n \geqslant 1\}$ 为 E 上一列有界可测函数, 并且 $f^{(n)}(x) \leqslant f^{(n+1)}(x)$, $\forall x \in E$. 因此, $\{f^{(n)} \mid n \geqslant 1\}$ 是 E 上一列勒贝格可积函数, 从而 $\left\{ \int_E f^{(n)}(x)\mathrm{d}x \,\middle|\, n \geqslant 1 \right\}$ 是一递增数列.

定义 2.8.1 设 $E \subset \mathbb{R}$ 为可测集, $f: E \to \mathbb{R}$ 为非负可测函数.

(1) 假定 $\mathrm{m}(E) < \infty$. 设 $\{f^{(n)} \mid n \geqslant 1\}$ 为 f 截断函数列. 我们称 $\lim\limits_{n\to\infty} \int_E f^{(n)}(x)\,\mathrm{d}x$ (有限或无限) 为函数 f 在 E 上的勒贝格积分, 记作

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_E f^{(n)}(x)\,\mathrm{d}x.$$

当 $\int_E f(x)\,\mathrm{d}x < \infty$ 时, 称 f 在 E 上是勒贝格可积的.

(2) 假定 $\mathrm{m}(E) = \infty$. 对于自然数 n, 令 $E_n = \{x \mid |x| < n, x \in E\}$. 于是 $\mathrm{m}(E_n) < \infty$, 而 $\{\mathrm{m}(E_n) \mid n \geqslant 1\}$ 为一列单调递增的数列. 我们称极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{E_n} f(x)\,\mathrm{d}x$ (有限或无限) 为函数 f 在 E 上的勒贝格积分, 记作

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

当 $\int_E f(x)\mathrm{d}x < \infty$ 时, 称 f 在 E 上是勒贝格可积的.

定理 2.8.1 设 $E \subset \mathbb{R}$ 为可测集, $f: E \to \mathbb{R}$ 为几乎处处有限 (即几乎处处取有限值) 的非负可测函数. 那么

(1) 若 $F \subset E$ 为可测子集, 则 $\int_F f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_E f(x)\,\mathrm{d}x$;

(2) 若 $\mathrm{m}(E) = 0$, 则 $\int_E f(x)\,\mathrm{d}x = 0$;

(3) 若 $\int_E f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, 则 $f(x) = 0$, a.e. 于 E.

证明 留作练习. □

定理 2.8.2 设 $E \subset \mathbb{R}$ 为可测集, $f: E \to \mathbb{R}$ 为几乎处处有限的非负可测函数. 设 $\mathcal{F}$ 表示测度有限且 f 在其上有界的 E 的可测子集所组成的集族, 那么

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \sup_{F\in\mathcal{F}} \int_F f(x)\mathrm{d}x.$$

证明 情形 1: $\mathrm{m}(E)<\infty$. 令 $F_n=\{x\,|\,f(x)\leqslant n, x\in E\}$, 则 $\{F_n\,|\,n\geqslant 1\}$ 是一列递增的集列, 并且 $E=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n$. 因此 $\mathrm{m}(E)=\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{m}(F_n)$.

任取 $F\subset\mathcal{F}$, 由于 f 在 F 上有界, 故存在自然数 n, 使得 $F\subset F_n$. 于是

$$\int_F f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_{F_n}f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_E f(x)\,\mathrm{d}x.$$

由此可见

$$\sup_{F\in\mathcal{F}}\int_F f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_E f(x)\,\mathrm{d}x.$$

另一方面, 对于任意给定的自然数 n, 取 $k>n$, 我们有

$$\begin{aligned}\int_E f^{(n)}(x)\,\mathrm{d}x&\leqslant\int_{F_k}f^{(n)}(x)\,\mathrm{d}x+\int_{E\setminus F_k}f^{(n)}(x)\,\mathrm{d}x\\&\leqslant\int_{F_k}f(x)\,\mathrm{d}x+n\mathrm{m}(E\setminus F_k)\\&\leqslant\sup_{F\in\mathcal{F}}\int_F f(x)\,\mathrm{d}x+n\mathrm{m}(E\setminus F_k).\end{aligned}$$

但 $\lim\limits_{k\to\infty}\mathrm{m}(E\setminus F_k)=0$, 故

$$\int_E f^{(n)}(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\sup_{F\in\mathcal{F}}\int_F f(x)\,\mathrm{d}x.$$

上式中让 $n\to\infty$ 即得

$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\sup_{F\in\mathcal{F}}\int_F f(x)\,\mathrm{d}x.$$

情形 2: $\mathrm{m}(E)=\infty$. 取定理 2.8.1 证明中的集合 $E_n=\{x\,|\,|x|\leqslant n, x\in E\}$, 则 $\mathrm{m}(E_n)<\infty$. 于是由已经证明了的情形 1 的结论, 有

$$\int_{E_n}f(x)\,\mathrm{d}x=\sup_{F\in\mathcal{F},F\subset E_n}\int_F f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\sup_{F\in\mathcal{F}}\int_F f(x)\,\mathrm{d}x.$$

另一方面, 任取 $\alpha<\sup\limits_{F\in\mathcal{F}}\int_F f(x)\,\mathrm{d}x$, 则存在 $F\in\mathcal{F}$, $\mathrm{m}(F)<\infty$, f 在 F 上有界, 并且 $\int_F f(x)\,\mathrm{d}x>\alpha$. 令 $G_n=\{x\,|\,|x|\leqslant n, x\in F\}$. 于是

$$\lim_{n\to\infty}\int_{G_n}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_F f(x)\,\mathrm{d}x>\alpha.$$

但 $G_n\subset E_n$, 故 $\int_{E_n}f(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\int_{G_n}f(x)\,\mathrm{d}x$, 因此

$$\lim_{n\to\infty}\int_{E_n}f(x)\,\mathrm{d}x>\alpha.$$

然后让 $\alpha \to \sup\limits_{F\in\mathcal{F}} \int_F f(x)\,\mathrm{d}x$, 即得

$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \sup_{F\in\mathcal{F}} \int_F f(x)\,\mathrm{d}x.$$

□

定理 2.8.3 设 $E\subset\mathbb{R}$ 为可测集, $f: E\to\mathbb{R}$ 为几乎处处有限的非负可测函数. 假定 $E=\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, 诸 E_n 为互不相交的可测集. 那么

$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

证明 如果有某个 n 使得 $\int_{E_n} f(x)\,\mathrm{d}x=\infty$, 则 $\int_E f(x)\,\mathrm{d}x=\infty$, 从而上式自然成立. 因此不妨假定 $\int_{E_n} f(x)\,\mathrm{d}x<\infty, \forall n\geqslant 1$. 任取 $F\in\mathcal{F}$, 从而 $\mathrm{m}(F)<\infty$, 并且 f 在 F 上有界. 令 $F_n=F\cap E_n$, 则 $F=\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, 且诸 F_n 互不相交, 从而

$$\int_F f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{F_n} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

由此根据定理 2.8.2, 有

$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

另一方面, 给定任意自然数 n, 对于任给的 $\varepsilon>0$ 和每一个 $k=1,2,\cdots,n$, 依据定理 2.8.2, 可取可测集 $G_k\subset E_k$, 使得 $\mathrm{m}(G_k)<\infty$, f 在 G_k 上有界, 并满足

$$\int_{G_k} f(x)\,\mathrm{d}x > \int_{E_k} f(x)\,\mathrm{d}x - \varepsilon/k.$$

令 $G=\bigcup_{k=1}^{n} G_k$, 则 $G\subset E$ 可测, $\mathrm{m}(G)<\infty$, f 在 G 上有界, 并满足

$$\int_G f(x)\,\mathrm{d}x > \sum_{k=1}^{n}\int_{E_k} f(x)\,\mathrm{d}x - \varepsilon.$$

由此得到

$$\sum_{k=1}^{n}\int_{E_k} f(x)\,\mathrm{d}x < \int_G f(x)\,\mathrm{d}x + \varepsilon \leqslant \int_E f(x)\,\mathrm{d}x + \varepsilon.$$

由于 n 和 ε 都是任意的, 上式表明

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_{E_k} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_E f(x)\,\mathrm{d}x.$$

□

下面定理说明勒贝格积分的绝对连续性.

定理 2.8.4 设 $E \subset \mathbb{R}$ 为可测集, $f: E \to \mathbb{R}$ 为非负勒贝格可积函数. 那么对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得只要可测子集 $F \subset E$ 的测度 $\mathrm{m}(F) < \delta$, 就有

$$\int_F f(x)\,\mathrm{d}x < \varepsilon.$$

证明 $\forall \varepsilon > 0$, 根据定理 2.8.2, 可取可测集 $G \subset E$, 使得 $\mathrm{m}(G) < \infty$, f 在 G 上有界: $0 \leqslant f(x) \leqslant \mu$, $\forall x \in G$, 并且

$$\int_G f(x)\,\mathrm{d}x > \int_E f(x)\,\mathrm{d}x - \varepsilon/2.$$

再由定理 2.8.3, 有

$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}x = \int_G f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{E\setminus G} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

由此可得

$$\int_{E\setminus G} f(x)\,\mathrm{d}x < \varepsilon/2.$$

令 $\delta = \frac{\varepsilon}{2\mu}$. 任取可测集 $F \subset E$, 使得 $\mathrm{m}(F) < \delta$. 若令 $F_1 = F \cap G$, $F_2 = F \cap (E \setminus G)$, 则 $F = F_1 \cup F_2$, 且 $F_1 \cap F_2 = \varnothing$. 于是

$$\int_{F_1} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \mu \mathrm{m}(F_1) < \varepsilon/2.$$

此外

$$\int_{F_2} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{E\setminus G} f(x)\,\mathrm{d}x < \varepsilon/2.$$

根据定理 2.8.3 可得 $\int_F f(x)\,\mathrm{d}x < \varepsilon$. □

定理 2.8.5 设 $E \subset \mathbb{R}$ 为可测集, f, g 为 E 上非负可测函数, $\alpha \in \mathbb{R}$ 为一正常数. 那么

(1) 若 f, g 在 E 上勒贝格可积, 则 $f + g$ 和 αf 也在 E 上勒贝格可积, 并且

$$\int_E (\alpha f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x = \alpha \int_E f(x)\,\mathrm{d}x + \int_E g(x)\,\mathrm{d}x.$$

(2) 若 $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$, $\forall x \in E$, 则

$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_E g(x)\,\mathrm{d}x.$$

证明 仿照定理 2.8.2 的证明, 留作练习. □

2.9 勒贝格积分 (III) —— 一般可测函数情形

设 $E\subset\mathbb{R}$ 为可测集, f 为 E 上可测函数. 令

$$f_+(x)=\max\{f(x),0\},\quad f_-(x)=\max\{-f(x),0\}.$$

f_+ 和 f_- 分别叫做 f 的正部和负部. 容易验证 f_+ 和 f_- 是 E 上非负可测函数, 从而勒贝格积分 $\int_E f_+(x)\mathrm{d}x$ 和 $\int_E f_-(x)\mathrm{d}x$ 存在, 并且满足 $f(x)=f_+(x)-f_-(x)$.

定义 2.9.1 设 $E\subset\mathbb{R}$ 为可测集, f 为 E 上可测函数. 若 $\int_E f_+(x)\mathrm{d}x$ 和 $\int_E f_-(x)\mathrm{d}x$ 中至少有一个取有限值, 则称

$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}x \triangleq \int_E f_+(x)\,\mathrm{d}x-\int_E f_-(x)\,\mathrm{d}x$$

为 f 的勒贝格积分, 而当 $\int_E f_+(x)\,\mathrm{d}x$ 和 $\int_E f_-(x)\,\mathrm{d}x$ 均为有限值时, 则称 f 是勒贝格可积的.

今后 E 上勒贝格可积函数全体记作 $\mathcal{L}(E)$.

定理 2.9.1 设 $E\subset\mathbb{R}$ 为可测集, f 为 E 上可测函数. 那么 f 在 E 上为勒贝格可积的充要条件是 $|f|$ 在 E 上勒贝格积分可积.

证明 设 f 在 E 上勒贝格可积. 令 $E_1=\{x\,|\,f(x)\geqslant 0\}$, $E_2=\{x\,|\,f(x)<0\}$, 则在 E_1 上 $f_+(x)=|f(x)|$, 在 E_2 上 $f_-(x)=|f(x)|$. 因此, $|f|$ 在 E_1 和 E_2 上勒贝格可积, 从而在整个 E 上勒贝格可积. 类似地可证 $|f|$ 在 E 上勒贝格可积, 则 f 在 E 上勒贝格可积. □

这定理是说, 在勒贝格积分意义下, 函数的可积与绝对可积是等价的, 这与黎曼意义下的可积有很大的不同.

定理 2.9.2 设 $E\subset\mathbb{R}$ 为可测集, f 和 g 为 E 上可积函数, $\alpha\in\mathbb{R}$ 为一常数. 那么
(i) $f\pm g$ 和 αf 也是 E 上勒贝格可积函数;
(ii)

$$\int_E (f(x)\pm g(x))\,\mathrm{d}x=\int_E f(x)\,\mathrm{d}x\pm\int_E g(x)\,\mathrm{d}x;$$

$$\int_E \alpha f(x)\,\mathrm{d}x=\alpha\int_E f(x)\,\mathrm{d}x.$$

证明 这里我们仅给出 (ii) 中第一式的证明, 所有剩余各式类此可证. 首先从分解式

$$(f+g)_+(x)-(f+g)_-(x)=f(x)+g(x)=f_+(x)-f_-(x)+g_+(x)-g_-(x),$$

得到

$$(f+g)_+(x)+f_-(x)+g_-(x)=(f+g)_-(x)+f_+(x)+g_+(x).$$

于是从非负可测函数的勒贝格积分的加性, 有

$$\int_E (f+g)_+(x)\mathrm{d}x + \int_E f_-(x)\mathrm{d}x + \int_E g_-(x)\mathrm{d}x$$
$$= \int_E (f+g)_-(x)\mathrm{d}x + \int_E f_+(x)\mathrm{d}x + \int_E g_+(x)\mathrm{d}x,$$

即

$$\int_E (f(x)+g(x))\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x + \int_E g(x)\mathrm{d}x.$$

最后, 对于 $f-g$ 的勒贝格积分, 依据有关 $f+g$ 和 αf 部分的结论, 有

$$\begin{aligned}\int_E (f(x)-g(x))\,\mathrm{d}x &= \int_E f(x)\mathrm{d}x + \int_E (-1)g(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_E f(x)\mathrm{d}x - \int_E g(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

□

定理 2.9.3 设 $E\subset\mathbb{R}$ 为可测集, f 和 g 为 E 上可积函数, 如果 $f(x)\leqslant g(x)$, a.e. 于 E, 那么

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_E g(x)\mathrm{d}x.$$

证明 留作练习. □

下面进一步讨论一般函数在勒贝格积分下的极限换序问题. 大家知道, 在黎曼积分下极限换序有着比较强的条件. 我们将看到, 勒贝格积分下的极限换序的条件相对要少得多.

定理 2.9.4 (Levi 定理) 设 $E\subset\mathbb{R}$ 为可测集, $\{f_n\,|\,n\geqslant 1\}$ 为 E 上一列非负可测函数. 假定 $f_1(x)\leqslant f_2(x)\leqslant\cdots\leqslant f_n(x)\leqslant\cdots$, 并且 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x),\ \forall x\in E$. 那么

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x. \tag{2.9.1}$$

证明 首先设 $\mathrm{m}(E)<\infty$. 由于 f 和诸 f_n 非负可测, 故勒贝格积分 $\int_E f(x)\mathrm{d}x$ 和 $\int_E f_n(x)\mathrm{d}x$ 存在, 并且满足 $\int_E f_n(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_E f(x)\mathrm{d}x$, 从而

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_E f(x)\mathrm{d}x. \tag{2.9.2}$$

如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x=\infty$, 则定理结论当然成立. 因此不妨设 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x<\infty$. 今设 $f_n^{(k)}$ 和 $f^{(k)}$ 分别表示 f_n 和 f 的截断, 则不难验证 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n^{(k)}(x)=f^{(k)}(x)$, $\forall x\in E$. 于是根据定理 2.7.5, 有

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n^{(k)}(x)\mathrm{d}x = \int_E f^{(k)}(x)\mathrm{d}x.$$

但 $\int_E f_n^{(k)}(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_E f_n(x)\mathrm{d}x$, 故

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \int_E f_n(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_E f^{(k)}(x)\mathrm{d}x.$$

然后再让 $k \to \infty$, 得到

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \int_E f_n(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_E f(x)\mathrm{d}x. \tag{2.9.3}$$

于是从式 (2.9.2) 和式 (2.9.3) 即得式 (2.9.1).

现在设 $\mathrm{m}(E) = \infty$. 显然, 式 (2.9.1) 仍然成立. 令 $E_k = \{x \mid |x| \leqslant k, x \in E\}$, 则 $\mathrm{m}(E_k) < \infty$. 于是根据已证部分, 有

$$\int_{E_k} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_{E_k} f_n(x)\mathrm{d}x \leqslant \lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\mathrm{d}x.$$

然后在上式中再让 $k \to \infty$, 可知式 (2.9.2) 成立. □

定理 2.9.5　设 $E \subset \mathbb{R}$ 为可测集, $\{f_n \mid n \geqslant 1\}$ 为 E 上一列非负可测函数. 设 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, 则

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n(x)\mathrm{d}x.$$

证明　实际上, 这是 Levi 定理的改写, 详细证明留作练习. □

定理 2.9.6 (Fatou 引理)　设 $E \subset \mathbb{R}$ 为可测集, $\{f_n\}$ 为 E 上一列非负可测函数, 那么

$$\int_E \underline{\lim_{n\to\infty}} f_n(x)\mathrm{d}x \leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}} \int_E f_n(x)\mathrm{d}x.$$

证明　注意 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \inf\limits_{k\geqslant n} f_k(x)$, 因此, 若令

$$g_n(x) = \inf_{k\geqslant n} f_k(x),$$

则 g_n 是 E 上非负可测函数, 并且满足

$$g_1(x) \leqslant g_2(x) \leqslant \cdots \leqslant g_n(x) \leqslant \cdots,$$

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = f(x), \quad g_n(x) \leqslant f_n(x).$$

于是从 Levi 定理可得

$$\begin{aligned}\int_E \underline{\lim_{n\to\infty}} f_n(x)\mathrm{d}x &= \int_E \lim_{n\to\infty} g_n(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_E g_n(x)\mathrm{d}x \\ &= \underline{\lim_{n\to\infty}} \int_E g_n(x)\mathrm{d}x \leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}} \int_E f_n(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

□

定理 2.9.7 (勒贝格控制收敛定理) 设 $E \subset \mathbb{R}$ 为可测集, $\{f_n \mid n \geqslant 1\}$ 为 E 上一列可测函数, $F(x)$ 为 E 上勒贝格可积函数. 假定

(i) $|f_n(x)| \leqslant F(x)$, a.e. 于 E, $\forall n = 1, 2, \cdots$,

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, a.e. 于 E.

那么 f 是 E 上勒贝格可积函数, 并且

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\mathrm{d}x. \tag{2.9.4}$$

证明 不妨认为在 E 上处处成立 $|f_n(x)| \leqslant F(x)$, 从而在 E 上也成立 $|f(x)| \leqslant F(x)$. 注意 $\{F(x)+f_n(x) \mid n \geqslant 1\}$ 和 $\{F(x)-f_n(x) \mid n \geqslant 1\}$ 是 E 上两个非负可测函数列, 于是先对 $\{F(x)+f_n(x) \mid n \geqslant 1\}$ 应用 Fatou 引理, 得到

$$\begin{aligned}\underline{\lim}_{n\to\infty} \int_E (F(x)+f_n(x))\,\mathrm{d}x &\geqslant \int_E \underline{\lim}_{n\to\infty} (F(x)+f_n(x))\,\mathrm{d}x\\ &= \int_E (F(x)+f(x))\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

由此得到

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_E f(x)\mathrm{d}x. \tag{2.9.5}$$

然后同样对 $\{F(x)-f_n(x) \mid n \geqslant 1\}$ 应用 Fatou 引理, 可得

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_E f(x)\mathrm{d}x. \tag{2.9.6}$$

于是从式 (2.9.5) 和式 (2.9.6) 即得式 (2.9.4). □

2.10 勒贝格积分与黎曼积分的关系

本节讨论函数的勒贝格积分与黎曼积分之间的关系, 主要结论是: 如果一个函数是黎曼可积的, 则它也是勒贝格可积的, 并且积分相等. 由此可见, 勒贝格积分是黎曼积分的一种推广.

定理 2.10.1 设 $[a,b]$ 为闭区间, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 为有界函数. 如果 f 在 $[a,b]$ 上黎曼可积, 则 f 在 $[a,b]$ 上可测, 勒贝格可积, 并且 f 在 $[a,b]$ 上的黎曼积分与勒贝格积分相等.

证明 对于任意给定的自然数 n, 今将区间 $[a,b]$ 分成 2^n 等份, 这样的分割称为 $[a,b]$ 的 n 阶分割. 设 $J_k^{(n)}$ 为 $[a,b]$ 的 n 阶分割的第 k 个闭子区间, $k=1,2,\cdots,2^n$, 并令

$$\mu_k = \sup\{f(x) \mid x \in J_k^{(n)}\}, \quad \nu_k = \inf\{f(x) \mid x \in J_k^{(n)}\}.$$

定义新的函数 φ_n 和 $\psi_n:[a,b]\to\mathbb{R}$ 如下: 对于 $x\in J_k^{(n)}$, 设 $\varphi(x)=\mu_k$, $\psi_n(x)=\nu_k$, 而在所有子区间的端点处则不作定义. 显然, 所有这些子区间端点构成的集合为一零测集. 因此

$$\varphi_n(x)\geqslant\varphi_{n+1}(x),\quad \psi_n(x)\leqslant\psi_{n+1}(x),\quad \text{a.e.于 } E,$$

从而 $\{\varphi_n\,|\,n\geqslant 1\}$ 和 $\{\psi_n\,|\,n\geqslant 1\}$ 在 $[a,b]$ 中几乎处处存在极限, 令

$$\varphi(x)=\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x),\quad \psi(x)=\lim_{n\to\infty}\psi_n(x).$$

由于 $\psi_n(x)\leqslant f(x)\leqslant\varphi_n(x)$, 故

$$\psi(x)\leqslant f(x)\leqslant\varphi(x),\quad \text{a.e. 于 } E.$$

显然 φ_n 和 ψ_n 在 $[a,b]$ 上有界可测, 从而勒贝格可积, 并且

$$\int_a^b\varphi_n(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{2^n}\mu_k^{(n)}|J_k^{(n)}|,$$

$$\int_a^b\psi_n(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{2^n}\nu_k^{(n)}|J_k^{(n)}|.$$

上两式右边的和恰好是 f 在 n 阶分割下的黎曼积分大和及小和. 由 f 的黎曼积分存在性的假设可知

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b\varphi_n(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_a^b\psi_n(x)\mathrm{d}x=(R)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

上式中的 (R) 表示黎曼积分.

此外, 由于 f 在 $[a,b]$ 上有界, 故 φ_n 和 ψ_n 几乎处处一致有界. 因此根据定理 2.9.7 有

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b\varphi_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\varphi(x)\mathrm{d}x,$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b\psi_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\psi(x)\mathrm{d}x.$$

综合上述得到

$$\int_a^b(\varphi(x)-\psi(x))\mathrm{d}x=0.$$

由于 $\varphi(x)-\psi(x)\geqslant 0$, 故 $\varphi(x)=\psi(x)$, a.e. 于 $[a,b]$, 从而 $f(x)=\varphi(x)=\psi(x)$, a.e. 于 $[a,b]$. 这样我们证明了, $\varphi=f$ 是 $[a,b]$ 上的有界可测函数, 勒贝格可积, 并且其勒贝格积分与黎曼积分相等. □

一般说来, 勒贝格可积函数未必是黎曼可积的, 有如下简单的例子为证.

例 2.10.1 考察如下的 Dirichlet 函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & \text{若 } x \text{ 是 } [0,1] \text{ 中有理数},\\ 0, & \text{若 } x \text{ 是 } [0,1] \text{ 中无理数}.\end{cases}$$

显然, $D(x)=0$, a.e. 于 $[0,1]$, 故 $D(x)$ 是 $[0,1]$ 上勒贝格可积函数; 但同时也不难看出, $D(x)$ 在 $[0,1]$ 上不是黎曼可积的. □

这个例子表明勒贝格可积函数类确实比黎曼可积类更宽泛.

定理 2.10.2 *为了 $[a,b]$ 上的函数 f 是黎曼可积的, 必须且只需 f 在 $[a,b]$ 上的不连续点所构成的集合是一零测集.*

这里我们略去定理 2.10.2 的证明, 有兴趣的读者, 例如, 可查阅文献 [23].

前几节我们建立了函数的勒贝格积分理论, 并指出哪些函数是勒贝格可积的. 比如, 闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数必定是勒贝格可积的, 但我们并不知道如何去计算勒贝格积分. 定理 2.10.1 告诉我们, 黎曼可积函数必定勒贝格可积函数, 并且其勒贝格积分与黎曼积分相等. 这个结果显然十分重要, 它说明应用中重要的一类函数, 即黎曼可积函数属于勒贝格可积类, 并且可以像黎曼积分那样计算其勒贝格积分. 定理 2.10.2 则回答了黎曼积分理论中不曾解决的问题: 黎曼可积函数的充要条件, 而它的解决显然有赖于勒贝格测度理论.

2.11 不定积分

在黎曼积分理论中, 若 $f(x)$ 是连续函数, 而 $F'(x)=f(x)$, 即 $F(x)$ 为 f 的原函数, 则有如下牛顿–莱布尼兹公式

$$(R)\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=F(b)-F(a). \tag{2.11.1}$$

它揭示了微分和积分之间的关系, 是微积分学的基本定理.

设 f 在 $[a,b]$ 上勒贝格可积, 从而对于任意 $x\in[a,b]$, f 在 $[a,x]$ 上也勒贝格可积. 与黎曼积分中一样, 我们也称

$$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+C$$

为 f 的不定积分, 其中 C 为任意常数. 我们将在较弱的条件下证明牛顿–莱布尼兹公式在勒贝格积分意义下仍然成立.

首先我们介绍有界变差函数和绝对连续函数.

定义 2.11.1 给定有限值函数 $f:\ [a,b]\to\mathbb{R}$, 设 T 为区间 $[a,b]$ 上任一分割: $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$. 令

$$V_a^b(f,T)=\sum_{k=1}^n|f(x_k)-f(x_{k-1})|,$$

$V(f,T)$ 叫做 f 在 $[a,b]$ 上关于分割 T 的变差. 令

$$V_a^b(f) = \sup\left\{V_a^b(f,T)\,|\,T \in \mathcal{T}\right\},$$

这里 $\mathcal{T}$ 表示区间 $[a,b]$ 的分割全体, $V_a^b(f)$ 叫做 f 在 $[a,b]$ 上的全变差. 如果 $V_a^b(f) < \infty$, 则称 f 为 $[a,b]$ 上的有界变差函数.

例 2.11.1 设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 是单调递增函数, 则 f 是 $[a,b]$ 上的有界变差函数, 并且 $V_a^b(f) = f(b) - f(a)$. □

例 2.11.2 设给定有限值函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 满足 Lipschitz 条件, 即

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \mu|x - y|, \quad \forall\, x, y \in [a,b].$$

(这样的函数叫做 $[a,b]$ 上的 Lipschitz 函数) 显然 f 是 $[a,b]$ 上的有界变差函数, 并且 $V_a^b(f) \leqslant \mu(b-a)$. □

一般说来, $[a,b]$ 上的连续函数未必是有界变差的.

例 2.11.3 设

$$f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{\pi}{2x}, & x\in(0,1], \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

则 f 是 $[0,\ 1]$ 上的连续函数. 取 $[0,1]$ 的分割 T_n: $0, 1/2n, 1/(2n-1), \cdots, 1/2, 1$, 则 $V_0^1(f,T_n) = 1 + 1/2 + \cdots + 1/2n$. 由于 $1 + 1/2 + \cdots + 1/2n \to +\infty\ (n\to\infty)$, 故 f 在 $[0,1]$ 上不是有界变差函数. □

$[a,b]$ 上有界变差函数全体记作 $V[a,b]$. 定理 2.11.1 指出了有界变差函数的基本性质.

定理 2.11.1 设 $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ 为有界变差函数, α 和 β 为实常数, 那么

(1) f 是有界函数, 并且 $f(x) \leqslant |f(a)| + V_a^b(f),\ \forall\, x\in[a,b]$;

(2) $V_a^b(\alpha f + \beta g) \leqslant |\alpha| V_a^b(f) + |\beta| V_a^b(f)$;

(3) 乘积函数 fg 也是有界变差的;

(4) 如果 $|f(x)| \geqslant \gamma > 0, \forall\, x\in[a,b]$, 则 f 的逆 f^{-1} 也是有界变差函数;

(5) 设 $[c,d]\subset[a,b]$, 则 f 在 $[c,d]$ 上也是有界变差函数;

(6) 对于任意常数 $c\in(a,b)$, 有 $V_a^b(f) = V_a^c(f) + V_c^b(f)$.

证明 这里我们仅给出 (5) 的证明, 其余的证明可仿此得到. 作 $[a,c]$ 和 $[c,b]$ 的分割 T_1 和 T_2 如下

$$T_1: \quad a = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_m = c,$$

$$T_2: \quad c = z_0 < z_1 < z_2 < \cdots < z_m = b.$$

设 T 表示由 T_1 和 T_2 所有分点构成的 $[a,b]$ 的一个分割, 则

$$V_a^b(f,T) = V_a^c(f,T_1) + V_c^b(f,T_2).$$

于是 $V_a^b(f) \geqslant V_a^b(f,T) = V_a^c(f,T_1) + V_c^b(f,T_2)$. 然后再对 T_1 和 T_2 取上确界, 得到

$$V_a^b(f) \geqslant V_a^c(f) + V_c^b(f). \tag{2.11.2}$$

现在任取 $[a,b]$ 的分割 T: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$. 如果分割 T 中有一点 $x_m = c$, 则 T 可以自然地分成两个分割 T_1 和 T_2, T_1 是 $[a,c]$ 的分割, 而 T_2 是 $[c,]$ 的分割, 并且有

$$V_a^b(f,T) = V_a^c(f,T_1) + V_c^b(f,T_2).$$

在上式右端分别对 T_1 和 T_2 取上确界, 得到

$$V_a^b(f,T) \leqslant V_a^c(f) + V_c^b(f). \tag{2.11.3}$$

如果在分割 T 中没有 c, 则将点 c 添加进去得到 $[a,c]$ 和 $[c,b]$ 的自然分割 T_1 和 T_2, 容易看出, 有

$$V_a^b(f,T) \leqslant V_a^c(f,T_1) + V_c^b(f,T_2).$$

从而式 (2.11.3) 依然成立. 于是从式 (2.11.3) 可得

$$V_a^b(f) \leqslant V_a^c(f) + V_c^b(f). \tag{2.11.4}$$

综合式 (2.11.2) 和式 (2.11.4) 即得 (5) 成立. □

定理 2.11.2 为了 $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ 是有界变差函数, 必须且只需 f 可表示成两个单调递增函数之差.

证明 充分性由例 2.11.1 和定理 2.11.1 之 (2) 得出. 今证必要性. 设

$$g(x) = \frac{1}{2}\left(V_a^x(f) + f(x)\right), \quad h(x) = \frac{1}{2}\left(V_a^x(f) - f(x)\right),$$

则 $f(x) = g(x) - h(x)$. 由定理 2.11.1 之 (5) 和 (6), 当 $x, y \in [a,b]$, 且 $x < y$ 时,

$$g(y) - g(x) = \frac{1}{2}V_x^y(f) + \frac{1}{2}\left(f(y) - f(x)\right).$$

但显然, $|f(y) - f(x)| \leqslant V_x^y(f)$, 因此 $g(y) - g(x) \geqslant 0$, 即 g 是 $[a,b]$ 上的单调递增函数. 同理可证 h 也是 $[a,b]$ 上的单调递增函数. □

容易看出, 单调函数的不连续点组成的集合至多是可数集, 从而是零测集. 因此单调函数几乎处处连续. 显然, 有界闭区间上单调函数是黎曼可积和勒贝格可积的. 从定理 2.11.2 可知, 作为两个单调函数之差的有界变差函数的不连续点组成的集合至多是可数的.

定理 2.11.3 设 $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ 是单调函数, 那么 f 在 $[a,b]$ 上几乎处处可微, 勒贝格可积, 并且成立

$$\left|\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant |f(b) - f(a)|.$$

限于篇幅, 这里我们略去证明, 有兴趣的读者可以查阅文献 [23].

定义 2.11.2 设函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. 如果对于任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$ 使得当 $[a,b]$ 中的一组互不相交的开区间 $\{(a_k,b_k)\,|\,1\leqslant k\leqslant n\}$ 满足 $\sum_{k=1}^n(b_k-a_k)<\delta$ 时, 就有

$$\sum_{k=1}^n\left|f(b_k)-f(a_k)\right|<\varepsilon,$$

则称 f 是 $[a,b]$ 上的绝对连续函数.

例 2.11.4 设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 是勒贝格可积函数, 那么不定积分 $g(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+C$ 是 $[a,b]$ 上的绝对连续函数. 事实上, 设 $E=\{(a_k,b_k)\,|\,1\leqslant k\leqslant n\}$ 为 $[a,b]$ 中一组互不相交的开区间, 则 $\mathrm{m}(E)=\sum_{k=1}^n(b_k-a_k)$. 依照关于勒贝格积分的绝对连续性, 对于给定的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $\mathrm{m}(E)=\sum_{k=1}^n(b_k-a_k)<\delta$ 时有

$$\sum_{k=1}^n|g(b_k)-g(a_k)|\leqslant\sum_{k=1}^n\int_{a_k}^{b_k}|f(x)|\mathrm{d}x=\int_E|f(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon.$$

这正是说 g 是绝对连续的. □

定理 2.11.4 设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 是绝对连续函数, 则 f 是 $[a,b]$ 的有界变差函数.

证明 由于 f 绝对连续, 故对于 $\varepsilon=1$, 存在 $\delta>0$, 使得对于 $[a,b]$ 中任意一组互不相交的开区间 $\{(a_k,b_k)\,|\,1\leqslant k\leqslant n\}$, 当 $\sum_{k=1}^n(b_k-a_k)<\delta$ 时, 就有

$$\sum_{k=1}^n\left|f(b_k)-f(a_k)\right|<1.$$

令 $N=[\frac{b-a}{\delta}]+1$, 这里对于任意正数 t, $[t]$ 表示 t 的整数部分. 显然 $\frac{b-a}{N}<\delta$. 今将区间 $[a,b]$ 分成 N 等份: $a=x_0<x_1<\cdots<x_N=b$. 于是 $x_k-x_{k-1}<\delta$, $k=1,2,\cdots,N$. 设 $T:\ x_{k-1}=y_0<y_1<\cdots<y_p=x_k$ 是区间 $[x_{k-1},x_k]$ 的一个任意分割. 由于 $\sum_{j=1}^p(y_k-y_{k-1})<\delta$, 故 $V_{x_{k-1}}^{x_k}(f,T)\leqslant 1$, 因此 $V_{x_{k-1}}^{x_k}(f)\leqslant 1$. 于是我们得到

$$V_a^b(f)=\sum_{k=1}^N V_{x_{k-1}}^{x_k}(f)\leqslant N,$$

即 f 是有界变差函数. □

定理 2.11.5 设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 是绝对连续函数, 如果 $f'(x)=0$, a.e. 于 $[a,b]$, 则 f 是常值函数.

证明 从定理 2.11.3 和定理 2.11.4 可知绝对连续函数 f 必定是几乎处处可微, 并且勒贝格可积. 由于 f 绝对连续, 故对于任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得对于 $[a,b]$ 中任意一组互不相交的开区间 $\{(a_k,b_k)\,|\,1\leqslant k\leqslant n\}$, 当 $\sum_{k=1}^n(b_k-a_k)<\delta$ 时, 有

$$\sum_{k=1}^n\left|f(b_k)-f(a_k)\right|<\varepsilon. \tag{2.11.5}$$

令 $E_0 = \{x \mid f'(x) = 0, x \in [a,b]\}$, 则依据假设有 $\mathrm{m}([a,b] \setminus E_0) = 0$. 于是从可测集的定义可知存在开集 $G \supset [a,b] \setminus E_0$, 并且 $\mathrm{m}(G) < \delta$. 设 G 的构成区间族是 $\{(a_k, b_k) \mid 1 \leqslant k \leqslant p\}$, 这里 p 可取 ∞. 设 $z \in E_0$, 则 $f'(z) = 0$. 从而由导数的定义, $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $r = r(z, \varepsilon) > 0$, 使得

$$\left| \frac{f(y) - f(z)}{y - z} \right| < \varepsilon, \quad \forall y \in B(z; r). \tag{2.11.6}$$

显然, 开集族 $\{(a_k, b_k) \mid 1 \leqslant k \leqslant p\}$ 和 $\{(z - r(z,\varepsilon), z + r(z,\varepsilon)) \mid z \in [a,b] \setminus E_0\}$ 是有穷闭区间 $[a,b]$ 的一个开覆盖, 从而根据有限覆盖定理, 从中可以选出有穷个开区间覆盖 $[a,b]$, 为方便起见, 经重新编号, 不妨设这些开区间是

$$(a_1, b_1), \cdots, (a_m, b_m),\ (z_1 - r_1, z_1 + r_1), \cdots, (z_n - r_n, z_n + r_n).$$

现在在有限点集 $\{a_k, b_k, z_j \mid 1 \leqslant k \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant n\}$ 中适当添加进有限个点, 得到 $[a,b]$ 的一组分点

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_p = b,$$

使得每个开区间 (x_{k-1}, x_k) 至少属于下列三种情形中的一种:

(1) (x_{k-1}, x_k) 包含在某个 (a_i, b_i) 内;

(2) 存在某个 j, 使得 $x_{k-1} = z_j$, $(x_{k-1}, x_k) \subset (z_j, z_j + r_j)$;

(3) 存在某个 j, 使得 $x_k = z_j$, $(x_{k-1}, x_k) \subset (z_j - r_j, z_j)$.

于是

$$\begin{aligned} |f(b) - f(a)| &\leqslant \sum_{k=1}^{p} |f(x_k) f(x_{k-1})| \\ &\leqslant \sum_{k \in I} |f(x_k) - f(x_{k-1})| + \sum_{k \in J} |f(x_k) - f(x_{k-1})|, \end{aligned}$$

这里 I 表示符合 (1) 的诸 k 构成的数集, 而 J 表示符合 (2) 或 (3) 的诸 k 构成的数集. 于是从式 (2.11.5) 和式 (2.11.6) 分别得出

$$\sum_{k \in I} |f(x_k) - f(x_{k-1})| < \varepsilon,$$

$$\sum_{k \in J} |f(x_k) - f(x_{k-1})| < \varepsilon \sum_{k \in J} (x_k - x_{k-1}) < \varepsilon(b - a),$$

从而

$$|f(b) - f(a)| < \varepsilon((b - a) + 1).$$

由于 $\varepsilon > 0$ 是任意的, 故 $f(b) = f(a)$.

在上述推导过程中, 若用 $[a,x]$ 代替 $[a,b]$ $(x \in [a,b])$, 则得 $f(x) = f(a)$, 从而得证 f 是常值函数. □

定理 2.11.6 设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, 那么为了 f 是 $[a,b]$ 上的绝对连续函数, 必须且只需 f 是某个勒贝格可积函数的不定积分, 并成立如下的牛顿-莱布尼兹公式

$$\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t = f(x) - f(a), \quad \forall\, x \in [a,b]. \tag{2.11.7}$$

证明 只需证明充分性. 由于 f 绝对连续, 故 f' 在 $[a,b]$ 上勒贝格可积. 令

$$g(x) = \int_a^x f'(t)\mathrm{d}t, \quad \forall\, x \in [a,b],$$

显然 g 是 $[a,b]$ 上绝对连续函数, 从而 $h(x) = f(x) - g(x)$ 也是绝对连续函数. 如果 $g'(x) = f'(x)$, a.e. 于 $[a,b]$, 则 $h'(x) = 0$, a.e. 于 $[a,b]$. 因此根据定理 2.11.5, $h(x)$ 是常值函数, 从而 $h(x) = h(a) = f(a) - g(a) = f(a)$, $g(x) = f(x) - f(a)$, 即牛顿–莱布尼兹公式成立, 并且 $f(x)$ 是一个可积函数的不定积分.

下面我们来证明 $g'(x) = f'(x)$, a.e. 于 $[a,b]$. 对于 $[a,b]$ 上的任意勒贝格可积函数 $\psi(x)$, 显然 $\left(\int_a^x \psi(t)\mathrm{d}t\right)'$ 几乎处处存在且有限, 今证

$$\int_a^b \left|\left(\int_a^x \psi(t)\mathrm{d}t\right)'\right| \mathrm{d}x \leqslant \int_a^b |\psi(x)|\mathrm{d}x. \tag{2.11.8}$$

事实上, 若把 ψ 分解成 $\psi(x) = \psi_+(x) - \psi_-(x)$, 则 $\int_a^x \psi_+(t)\mathrm{d}t$ 和 $\int_a^x \psi_-(t)\mathrm{d}t$ 是两个单调递增函数, 于是根据定理 2.11.3 有

$$\begin{aligned}
\int_a^b \left|\left(\int_a^x \psi(t)\mathrm{d}t\right)'\right| \mathrm{d}x &= \int_a^b \left|\left(\int_a^x \psi_+(t)\mathrm{d}t\right)' - \left(\int_a^x \psi_-(t)\mathrm{d}t\right)'\right| \mathrm{d}x \\
&\leqslant \int_a^b \left|\left(\int_a^x \psi_+(t)\mathrm{d}t\right)' + \left(\int_a^x \psi_-(t)\mathrm{d}t\right)'\right| \mathrm{d}x \\
&\leqslant \int_a^b \psi_+(t)\mathrm{d}t + \int_a^b \psi_-(t)\mathrm{d}t = \int_a^b |\psi(t)|\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

根据鲁金定理 2.5.10, 存在 $[a,b]$ 上连续函数 $\varphi(x)$, 使得

$$\int_a^b |f'(x) - \varphi(x)|\mathrm{d}x < \varepsilon.$$

由于 φ 连续, 故 $\left(\int_a^x \varphi(t)\mathrm{d}t\right)' = \varphi(x)$, 于是

$$\begin{aligned}
\int_a^b |g'(x) - f'(x)|\mathrm{d}x &= \int_a^b \left|\left(\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t\right)' - f'(x)\right| \mathrm{d}x \\
&\leqslant \int_a^b \left|\left(\int_a^x (f'(t) - \varphi(t))\mathrm{d}t\right)'\right| \mathrm{d}x + \int_a^b |f'(x) - \varphi(x)|\mathrm{d}x \\
&\leqslant 2\int_a^b |f'(x) - \varphi(x)|\mathrm{d}x < 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

由此可见

$$\int_a^b |f'(x) - \varphi(x)|\mathrm{d}x = 0,$$

于是从定理 2.11.5 可知, $g'(x) = f'(x)$, a.e. 于 $[a,b]$. □

大家知道, 在黎曼积分中, 牛顿–莱布尼兹公式成立的前提是被积函数连续; 而从定理 2.11.6 看出, 在勒贝格积分中牛顿–莱布尼兹公式成立的条件则相对要弱得多.

2.12 $\mathbb{R}^n$ 上的勒贝格可测集和勒贝格积分

前面我们讨论了 $\mathbb{R}$ 上的勒贝格可测集、可测函数和勒贝格积分, 这些理论几乎可以逐字逐句地推广到 $\mathbb{R}^n$ 上, 这里将不再细述.

在多变量黎曼积分理论中, 积分的换序是一个重要问题, 并且积分换序要求对被积函数有较高的条件. 相对说来, 在勒贝格积分理论中, 积分换序的条件则要宽泛得多. 这里我们仅在 $\mathbb{R}^2$ 中不加证明地进行叙述. 进一步推广到 $\mathbb{R}^n$ 中是一样的.

定理 2.12.1 (Fubini 定理) 设 $f:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ 为可测函数, 即 $f\in L([a,b]\times[c,d])$. 假定 f 是 $[a,b]\times[c,d]$ 上勒贝格可积函数, 那么

(1) 对于几乎所有的 $x\in[a,b]$, $f(x,y)$ 是关于 $y\in[c,d]$ 的勒贝格可积函数;

(2) 对于几乎所有的 $y\in[c,d]$, $f(x,y)$ 是关于 $x\in[a,b]$ 的勒贝格可积函数;

(3) 成立如下的积分换序等式

$$\begin{aligned}\int_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_a^b \mathrm{d}x \int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y \\ &= \int_c^d \mathrm{d}y \int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

2.13 注释与参考

哥德尔不完备性定理是德国数学家哥德尔在 1931 年提出的, 它指出: 任何一个包含算术系统的公理化体系, 它必然包含既不能证明也不能证伪的命题[76]. 这是现代逻辑的一座里程碑, 使数学基础研究发生了划时代的变化. 测度论主要是由博雷尔 (Borel, 1871–1956) 创立的, 它使人们对许多靠直观难以辨别清楚的病态的集合与函数有了清晰的理解, 这大大扩大了数学分析研究的对象.

测度论也是近代概率的基础, 在近代概率中, 概率就是一种有限测度, 而随机变量就是可测函数.

与博雷尔测度不同的还有 Hausdorff 测度等. Hausdorff 测度可算出非整数维形体, 如自相似的雪花、曲折的海岸线等的维数, 它在分形几何与复杂系统理论中有重要应用.

勒贝格 (Lebesgue, 1875–1941) 是博雷尔的学生, 他将博雷尔的测度论用于积分, 使一大类在黎曼积分意义下不可积的函数变得可积.

勒贝格积分可以看作现代分析的开端, 人们往往将勒贝格以前的数学分析称为经典分析, 而把由勒贝格积分引出的实变函数论为基础而开拓出来的分析学称为现代分析.

最经典的实复分析的教材可能要算文献 [101], 最近的一本很详细的参考书是文献 [95].

2.14 习题

2.1 证明定理 2.1.2.

2.2 证明集合的差

$$A\backslash B = A \cap B^c.$$

2.3 证明集合的对称差满足

$$A\Delta B = B\Delta A;$$

$$(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C).$$

2.4 两个集合 A、B 的乘积集合定义为

$$A \times B := \{(a,b)|a \in A, b \in B\}.$$

证明乘积集合满足

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C);$$

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C).$$

2.5 构造一一映上的映射以证明定理 2.1.3 的 (1) 和 (2).

2.6 以整数为系数的多项式的实数根称为代数数. 证明: 代数数集的势是 $\aleph_0$ (即可数).

2.7 证明一个可数集减去一个有限集, 仍为可数集.

2.8 证明一个具有 $\aleph$ 势的集合减去一个可数集, 其势仍为 $\aleph$ (即 $\aleph - \aleph_0 = \aleph$).

2.9 设 $\mathcal{B}$ 为 $\mathbb{R}$ 的一个子集族, 它包括所有的开区间、$\mathbb{R}$、$\varnothing$ 以及由它们的可数交及可数并生成的集合. $\mathcal{B}$ 称为 Borel 集, 通常称 $\mathcal{B}$ 也可以由所有的开区间生成. (1) 证明 $\mathcal{B}$ 是一个可测集的集合; (2) 证明 $\mathcal{B}$ 也可以由所有的闭区间生成; (3) B 也可以由所有的半开区间 ($[a,b)$) (或所有 $(a,b]$, 或所有 $(-\infty,b]$, 等等) 生成.

容易把 Borel 集的概念推广到乘积空间 $\mathbb{R}^n$ 上. 实际上 $\mathbb{R}^n$ 上的勒贝格可测集就是其中的 Borel 集.

2.10 给定一个可测空间 $(\Omega,\mathcal{F})$, 一个函数 $f:\Omega\to\mathbb{R}$ 称为可测函数, 如果对每一个 $B\in\mathcal{B}$, $f^{-1}(B)\in\mathcal{F}$. 证明: 这个定义与定义 2.5.1 是一致的.

2.11 如果 A, B 是两个可测集, 证明

$$\mathrm{m}(A\cup B) + \mathrm{m}(A\cap B) = \mathrm{m}(A) + \mathrm{m}(B).$$

2.12 设 $\{E_i\}$ 为一可测单调降序列, 即 $E_{i+1} \subset E_i$. 并且, E_1 有有限测度. 证明

$$\mathrm{m}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \lim_{i\to\infty} \mathrm{m}(E_i).$$

举例说明 $\mathrm{m}(E_1) < \infty$ 是必要的. 例如, 存在可测降列 $\{E_i\}$, $\mathrm{m}(E_i) = \infty$, $\forall i$, 并且 $\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i = \varnothing$.

2.13 证明, 如果 f 在 $E \subset \mathbb{R}$ 上 (勒贝格) 可积, 则 $|f|$ 也可积, 并且

$$\left|\int_E f\right| \leqslant \int_E |f|.$$

如果 $|f|$ 可积, 是否 f 也可积?

2.14 证明定理 2.7.2.

2.15 证明定理 2.8.1.

2.16 证明定理 2.8.5.

2.17 证明定理 2.9.3.

2.18 证明定理 2.9.5.

2.19 设 R 是 X 的某些子集生成的 σ 代数, μ 是 R 上的测度. 对任一 $E \subset X$ 定义

$$\mu^*(E) = \inf\{\mu(F) \,|\, E \subset F \in R\},$$

证明 μ^* 是外测度.

2.20 设 L 是勒贝格可测集, 证明 $-L = \{x \,|\, -x \in L\}$ 也是勒贝格可测集且测度不变.

2.21 证明函数 $f(x)$ 为 X 上可测函数的充要条件为对任一 $r \in \mathbb{Q}$, $\{x \in X \,|\, f(x) > r\}$ 可测.

2.22 设函数 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上勒贝格可积函数. 证明

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{2} \int_a^b f(x)|\sin(nx)|\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x;$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{2} \int_a^b f(x)|\cos(nx)|\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

[提示, 先证对任一区间 (α,β)

$$\lim_{n\to\infty} \int_\alpha^\beta |\sim(x)|\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}(\beta-\alpha).$$

再证将 (α,β) 换成任一可测集 E 仍有

$$\lim_{n\to\infty}\int_E |\sim(x)|\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}m(E).$$

暂设 $f(x)\geqslant 0$ 且有界 $f(x)\leqslant M$, 在每个

$$E_i^m=\left\{x\;\middle|\;\frac{iM}{m}<f(x)\leqslant\frac{(i+1)M}{m}\right\}$$

上证明等式, 然后令 $m\to\infty$; 最后放宽 $f(x)$ 的限制.]

第 3 章



泛函空间与线性算子

泛函分析或算子方法是分布参数系统控制的主要数学工具. 本章首先介绍距离空间(主要指赋范空间及内积空间) 上的各种拓扑性质, 如收敛性、紧性、压缩映射等; 然后讨论泛函空间中一些主要线性算子的性质及应用, 包括有界算子、连续算子、稠定算子、伴随算子及算子谱理论等; 最后对 Sobolev 空间作一简要介绍.

3.1 距离空间

首先我们给出距离的定义并讨论其基本属性. 距离是实数集 $\mathbb{R}$ 上两点距离, 即两元函数 $d(x,y)=|x-y|$ 的推广.

定义 3.1.1 设 X 为一非空集合, 如果存在从 $X\times X=\{(x,y)\,|\,x,y\in X\}$ 到 $\mathbb{R}$ 的映射 d, 使得 $\forall\, x,y,z\in X$, d 满足

(1) 非负性: $d(x,x)\geqslant 0$, $d(x,y)=0\Longleftrightarrow x=y$;

(2) 对称性: $d(x,y)=d(y,x)$;

(3) 三角不等式: $d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y)$.

则称 $d(x,y)$ 为 X 中元 x 和 y 之间的距离, 而赋以距离 d 的集合 X 叫做距离空间, 记作 (X,d).

注意 $X\times X$ 上任意二元函数 d 只要满足定义中的三个属性, 都叫做距离. 距离反映的是 X 中两个元之间的接近程度. 此外, 同一集合 X 中可有不同的距离, 比如 d_1 和 d_2, 从而 (X,d_1) 和 (X,d_2) 是两个不同的距离空间.

还要注意的是, 这里的集合不一定是数集, 也不一定有线性结构. 为直观起见, 今后称距离空间中的元为“点”. 在上下文已经明确且不会引致混淆的情形下, “距离空间 (X,d)” 就简记为 “距离空间 X”.

例 3.1.1 在 $\mathbb{R}$ 中定义 $d(x,y)=|x-y|$, 则 $(\mathbb{R},d)$ 是一距离空间. □

例 3.1.2 设 $\mathbb{R}^n=\{x=(\xi_1,\cdots,\xi_n)\,|\,\xi_k\in\mathbb{R},1\leqslant k\leqslant n\}$, 在 $\mathbb{R}^n$ 中定义

$$d_2(x,y)=\left(\sum_{k=1}^{n}(\xi_k-\eta_k)^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

其中 $x=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$, $y=(\eta_1,\cdots,\eta_n)\in\mathbb{R}^n$. 今证 d_2 是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个距离. 事实上, 对

于任意 $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, $k=1,2,\cdots,n$ 和任意 $\lambda \in \mathbb{R}$, 我们有

$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{n}(a_k+\lambda b_k)^2=\sum_{k=1}^{n}a_k^2+2\lambda\sum_{k=1}^{n}a_kb_k+\lambda^2\sum_{k=1}^{n}b_k^2.$$

上式右端是 λ 的二次多项式, 其最小值

$$\left[\sum_{k=1}^{n}a_k^2\sum_{k=1}^{n}b_k^2-\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)^2\right]\Big/\sum_{k=1}^{n}b_k^2$$

必须非负, 从而得到

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n}a_k^2\sum_{k=1}^{n}b_k^2.$$

这就是著名的 Cauchy 不等式.

d_2 满足距离属性 (1) 和 (2) 是明显的. 下面证明 d_2 满足距离属性 (3). 注意从 Cauchy 不等式可得

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2&=\sum_{k=1}^{n}a_k^2+2\sum_{k=1}^{n}a_kb_k+\sum_{k=1}^{n}b_k^2\\&\leqslant\sum_{k=1}^{n}a_k^2+2\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right)^{\frac{1}{2}}+\sum_{k=1}^{n}b_k^2\\&=\left(\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2.\end{aligned}$$

设 $x=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$, $y=(\eta_1,\cdots,\eta_n)$, $z=(\zeta_1,\cdots,\zeta_n)\in\mathbb{R}^n$, 并令 $a_k=\xi_k-\zeta_k$, $b_k=\zeta_k-\eta_k$, $k=1,\cdots,n$, 代入上式即得

$$\left(\sum_{k=1}^{n}(\xi_k-\eta_k)^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}(\xi_k-\zeta_k)^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\sum_{k=1}^{n}(\zeta_k-\eta_k)^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

此即距离属性 (3). 于是 $(\mathbb{R}^n, d_2)$ 是距离空间, 通常称为欧几里得空间, 简称欧氏空间, 而 d_2 则叫做欧氏距离. □

例 3.1.3 设 $C[a,b]$ 表示 $[a,b]$ 到 $\mathbb{R}$ 的所有连续函数组成的集合, 对于 $f,g\in C[a,b]$, 定义

$$d_1(f,g)=\int_a^b|f(t)-g(t)|\mathrm{d}t,$$

则 $(C[a,b],d_1)$ 是一距离空间. □

例 3.1.4 设 (X,d) 是一距离空间, 令

$$d_1(x,y)=\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)},\quad \forall x,y\in X,$$

则 d_1 也是 X 上的一个距离. 事实上, 距离属性 (1) 和 (2) 显然成立; 至于属性 (3), 只需注意

$$f(\alpha)=\frac{\alpha}{1+\alpha}$$

是 $\alpha>0$ 的单调递增函数, 从而 $\forall\alpha>0,\ \beta>0$, 有

$$\frac{\alpha+\beta}{1+\alpha+\beta}<\frac{\alpha+\beta+\alpha\beta}{1+\alpha+\beta+\alpha\beta}<\frac{\alpha+\beta+2\alpha\beta}{1+\alpha+\beta+\alpha\beta}=\frac{\alpha}{1+\alpha}+\frac{\beta}{1+\beta}.$$

□

定义距离的主要目的是刻画空间中点之间的逼近, 也就是收敛. 今后为记号简单起见, 距离空间 X 中的序列 $\{x_n\,|\,n\geqslant 1\}$ 通常简记作 $\{x_n\}$.

下面介绍 $\mathbb{R}^n$ 中开集、闭集、内点、稠集等拓扑概念, 它们是一般拓扑空间的特例, 进一步的讨论与证明均可见 第 6 章 .

定义 3.1.2 距离空间 X 中的点列 $\{x_n\}$ 叫做收敛于 $x_0(\in X)$, 或称 $\{x_n\}$ 以 x_0 为极限, 是指 $d(x_n,x_0)\to 0\ (n\to\infty)$. 这时我们写作

$$\lim_{n\to\infty}x_n=x_0,\quad \text{或}\ x_n\to x_0.$$

有时为确切起见, $x_n\to x_0$ 也写作 $x_n\to x_0\ (n\to\infty)$. 距离空间中的收敛具有数学分析中数列收敛所具有的一些性质, 特别地有如下定理.

定理 3.1.1 在距离空间 X 中, 每个点列至多收敛于一个点, 并且若点列 $\{x_n\}$ 收敛于 x_0, 则 $\{x_n\}$ 的任意子列 $\{x_{n_k}\}$ 也收敛于 x_0.

注意我们引进距离所关心的主要是它所规定的收敛. 因此, 对于同一集合上的两个距离, 如果它们定义出相同的收敛, 则我们就应该认为这两个距离并没有本质的区别. 于是我们提出如下的距离等价性定义.

定义 3.1.3 集合 X 上两个距离 d_1 和 d_2 叫做等价的, 是指它们在 X 上规定出相同的收敛, 即

$$d_1(x_n,x_0)\to 0(n\to\infty)\Longleftrightarrow d_2(x_n,x_0)\to 0(n\to\infty).$$

例 3.1.5 在 $\mathbb{R}^n$ 中定义距离 $d(x,y)=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}|\xi_k-\eta_k|$, 那么这个距离在 $\mathbb{R}^n$ 上规定的收敛是按坐标收敛; 而例 3.1.2 中的距离 d_2 规定的收敛是平均收敛. 容易看出, 有

$$d(x,y)\leqslant d_2(x,y)\leqslant\sqrt{n}d(x,y),\quad \forall x,y\in\mathbb{R}^n,$$

从而 d 和 d_2 是 $\mathbb{R}^n$ 上两个等价的距离. □

例 3.1.6 在 $C[a,b]$ 中定义

$$d_\infty(f,g)=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|f(t)-g(t)|,\ \ \forall f,g\in C[a,b],$$

则 d_∞ 是 $C[a,b]$ 中的一个距离, 它所规定的收敛是连续函数列在区间 $[a,b]$ 上的一致收敛, 而例 3.1.3 中距离 d_1 所规定的收敛则是连续函数列在区间 $[a,b]$ 上的积分平均收敛. 显然

$$d_1(f,g)\leqslant(b-a)d_\infty(f,g).$$

因此, 若函数列 $\{f_n\}$ 按距离 d_∞ 收敛, 则它也按距离 d_1 收敛; 但反之则不然. 比如, 令

$$f_n(t)=\begin{cases}\frac{b+(n-1)a-nt}{b-a}, & 若\ a\leqslant t\leqslant t+\frac{b-a}{n},\\ 0, & 若\ a\leqslant t+\frac{b-a}{n}<t\leqslant b,\end{cases}$$

则 $d_1(f_n,0)=\frac{b-a}{2n}\to 0(n\to\infty)$, 但 $d_\infty(f_n,0)=1$, $\forall n\geqslant 1$. 因此, d_1 和 d_∞ 是 $C[a,b]$ 中两个不等价的距离. □

下面讨论距离空间中的点集. 在距离空间 X 中, 设 $x_0\in X$, $r>0$, 点集

$$B_r(x_0)=\{x\in X\,|\,d(x,x_0)<r\}$$

叫做以点 x_0 为中心, 以 r 为半径的开球. 若上式中 “$<$” 换成 “$\leqslant$”, 则相应的点集叫做闭球. 记作 $\overline{B}_r(x_0)$.

定义 3.1.4 设 M 为距离空间 X 中一子集. 点 $x\in X$ 叫做 M 的内点, 如果存在 $\varepsilon>0$, 使得 $B_\varepsilon(x)\subset M$. M 的内点全体叫做 M 的内部, 记作 $\mathring{M}$. 若 $M=\mathring{M}$, 则称 M 为开集.

例 3.1.7 在欧氏距离下 $\mathbb{R}$ 中的开球、闭球分别是开、闭区间; $\mathbb{R}^2$ 中的开球、闭球分别为不带边界、带边界的圆盘; $\mathbb{R}^3$ 中的开球、闭球则是平常初等几何中熟知的概念. □

定理 3.1.2 设 X 为距离空间, 那么: (1) X 中的任意集合的内部都是开集; (2) X 中任意多个开集之并仍是开集; (3) X 中有穷个开集之交仍是开集.

定义 3.1.5 设 M 为距离空间 X 中的子集. 点 $x\in X$ 叫做 M 的极限点 (也称聚点), 是指存在序列 $\{x_n\}\subset(M\setminus\{x\})$, 使得 $x_n\to x$.

容易看出, x 是 M 的极限点, 当且仅当

$$M\cap(B_\varepsilon(x)\setminus\{x\})\neq\varnothing,\ \ \forall\varepsilon>0.$$

注意, 点集 M 的极限点可以属于 M, 也可以不属于 M. 例如, 在 $\mathbb{R}$ 中取 $M=\{t\,|\,0\leqslant t<1\}$, 则 M 中的点都是其极限点, 并且 1 也是 M 的极限点, 但 1 不在 M 中.

定义 3.1.6 设 M 为距离空间 X 的子集. (1) 若 M 的余集 M^c 为开集, 则称 M 为闭集; (2) 包含 M 的最小闭集叫做 M 的闭包, 记作 $\overline{M}$.

注意, 由 De Morgan 公式可知, 任意多个闭集之交是闭集, 有限个闭集之并是闭集. 因此, 包含 M 的最小闭集即为包含 M 的所有闭集之交.

例 3.1.8 距离空间 X 中的空集 $\varnothing$、全空间 X 以及闭球都是闭集. □

定理 3.1.3 设 M 为距离空间 X 中的任意子集. 那么 M 是闭集当且仅当 M 包含其所有的极限点.

定义 3.1.7 设 M 为距离空间 X 中的子集. $x \in X$ 称为 M 的边界点, 如果对于任意 $\varepsilon > 0$, $B_\varepsilon(x)$ 中既有 M 的点, 又有不在 M 的点. M 的边界点全体叫做 M 的边界, 记作 ∂M.

从定义直接看出, $\partial M = \overline{M} \cap \overline{M^c}$.

定义 3.1.8 设 M 和 N 为距离空间 X 中的两个子集, $M \subset N$. M 称为在 N 中稠, 如果 $N \subset \overline{M}$; 若 M 在全空间 X 中稠, 则简称 M 为稠集; 若 X 有一可数稠子集, 则称 X 是可分空间.

例 3.1.9 在 $C[a,b]$ 上定义上确界距离: $d(x,y) = \max\limits_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t) - y(t)|$, 从 Weirstrass 定理知道, 多项式集在 $C[a,b]$ 中稠. 另一方面, 显然任意实系数多项式可以用有理系数多项式任意逼近, 但有理系数多项式全体形成可数集, 因此 $C[a,b]$ 是可分的. □

下面讨论距离空间之间映射的连续性.

定义 3.1.9 设 (X,d) 和 (Y,ρ) 为两个距离空间. 映射 $T\colon X \to Y$ 称为在点 $x_0 \in X$ 处连续, 如果对于 X 中的点列 $\{x_n\}$ 有

$$d(x_n, x_0) \to 0 \Longrightarrow \rho(Tx_n, Tx_0) \to 0.$$

如果 T 在 X 的每一点处都连续, 则称 T 在 X 上连续, 或简称 T 是连续映射.

由距离空间到数集 $\mathbb{K}$ 的映射通常叫做函数或泛函. 例如, 固定一点 $a \in X$, X 的泛函 $d(x,a)$ 是连续的. 事实上, 这是因为

$$|d(x_n, a) - d(x_0, a)| \leqslant d(x_n, x_0) \to 0 \ (n \to \infty).$$

定理 3.1.4 为了从距离空间 (X,d) 到距离空间 (Y,ρ) 的映射 T 是连续的, 当且仅当 $\forall \varepsilon > 0, \forall x_0 \in X$ 存在 $\delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0$, 使得

$$d(x, x_0) < \delta \Longrightarrow \rho(Tx, Tx_0) < \varepsilon. \tag{3.1.1}$$

证明 (必要性) 设 T 连续而条件 (3.1.1) 不成立, 于是存在一正数 $\varepsilon > 0$ 与一点 x_0, 使得对于每一自然数 n, 必有一点 $x_n \in X$ 满足

$$d(x_n, x_0) < 1/n, \quad \text{但 } \rho(x_n, x_0) \geqslant \varepsilon.$$

这就是说, $d(x_n, x_0) \to 0$, 但 $\rho(Tx_n, Tx_0) \nrightarrow 0$, 与 T 的连续性矛盾. 因此, 条件 (3.1.1) 是必要的.

(充分性) 设条件 (3.1.1) 成立, 而 X 中点列 $\{x_n\}$ 收敛于 x_0. 给定 $\varepsilon > 0$, 取定条件中的正数 δ, 又有 $x_n \to x_0$, 故可取充分大的自然数 $n_0 = n_0(\delta)$, 使得 $n \geqslant n_0 \Longrightarrow d(x_n, x_0) < \delta$. 于是根据式 (3.1.1), 当 $n \geqslant n_0$ 时 $\rho(Tx_n, Tx_0) < \varepsilon$. 这正是说 $\rho(Tx_n, Tx_0) \to 0$, 证明了 T 是连续映射. □

下面考虑距离空间的完备化. 我们知道有理数集 $\mathbb{Q}$ 和实数集 $\mathbb{R}$ 在同一距离 $d(x, y) = |x - y|$ 下都是距离空间, 但它们之间有本质区别, 这就是 $\mathbb{Q}$ 是不完备的, 而 $\mathbb{R}$ 是完备的.

定义 3.1.10 称距离空间 X 中的点列 $\{x_n\}$ 为基本列或 Cauchy 列, 如果对于任意 $\varepsilon > 0$, 必有自然数 N, 使得当 $m, n > N$ 时有 $d(x_m, x_n) < \varepsilon$.

显然收敛列一定是基本列, 反之则不然. 比如, 有理数集 $\mathbb{Q}$ 中由 π 的近似值组成的数列是一基本列, 但它在 $\mathbb{Q}$ 中却没有极限.

定义 3.1.11 在距离空间 X 中, 如果每一个基本列都收敛到 X 的一点, 则称 X 为完备的.

在数学分析中, 实数集 $\mathbb{R}$ 中 Cauchy 列必收敛于一实数是一个熟知的事实, 称为 Cauchy 准则. 因此, 一维欧氏空间是完备的.

例 3.1.10 n 维欧氏空间 $(\mathbb{R}^n, d_2)$ 是完备的. 事实上, 设 $\{x_n\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的基本列, 令

$$x_k = (\xi_1^k, \cdots, \xi_n^k), \quad \xi_j^k \in \mathbb{R}, \ j = 1, \cdots, n.$$

对于每个 $j, j = 1, \cdots, n$,

$$|\xi_j^k - \xi_j^m| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i^k - \xi_i^m|^2\right)^{\frac{1}{2}} = d_2(x_k, x_m),$$

故 $\{\xi_j^k \,|\, k \geqslant 1\}$ 是 $\mathbb{R}$ 中的基本列, 从而收敛于某个 $\xi_j \in \mathbb{R}$. 记 $x = (\xi_1, \cdots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, 则显然 $d_2(x_k, x) \to 0$, 从而证明了 $\mathbb{R}^n$ 的完备性. □

例 3.1.11 $C[a, b]$ 在上确界距离 $d_\infty(f, g) = \max\limits_{a \leqslant t \leqslant b} |f(t) - g(t)|$ 下是完备的.

事实上, 设 $\{f_n\}$ 是 $C[a, b]$ 中的基本列, 则 $\forall \varepsilon > 0$, 存在自然数 $n_0 = n_0(\varepsilon)$, 使得

$$m, n \geqslant n_0 \Longrightarrow \max_{a \leqslant t \leqslant b} |f_n(t) - f_m(t)| < \varepsilon. \tag{3.1.2}$$

于是对于每个 $t \in [a, b]$, $\{f_n(t) \,|\, n \geqslant 1\}$ 是 $\mathbb{R}$ 中基本列, 从而存在 $f(t) \in \mathbb{R}$, 使得 $f_n(t) \to f(t)(n \to \infty)$. 在式 (3.1.2) 中让 $m \to \infty$, 得到

$$n \geqslant n_0 \Longrightarrow |f_n(t) - f(t)| \leqslant \varepsilon,$$

上式表明 $\{f_n\}$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛于 $f \in C[a, b]$, 这就证明了 $C[a, b]$ 的完备性. □

例 3.1.12 $C[0,1]$ 中赋以距离 $d_1(f,g)=\int_0^1|f(t)-g(t)|\mathrm{d}t$ 所得到的距离空间 $(C[a,b],d_1)$ 是不完备的.

事实上, 我们在 $C[0,1]$ 中构造函数

$$f_n(t)=\begin{cases}0, & 0\leqslant t\leqslant \frac{1}{2},\\ n(t-\frac{1}{2}), & \frac{1}{2}<t\leqslant \frac{1}{2}+\frac{1}{n},\\ 1, & \frac{1}{2}+\frac{1}{n}<t\leqslant 1.\end{cases}$$

显然函数列 $\{f_n\}\subset C[0,1]$, 并且当 $m\geqslant n$ 时,

$$d_1(f_m,f_n)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)<\frac{1}{2n}.$$

因此, $\{f_n\}$ 是距离空间 $(C[0,1],d_1)$ 中的基本列. 今若有 $f\in C[0,1]$ 使得 $d_1(f_n,f)\to 0$, 则当 $t\in(0,\frac{1}{2})$ 时必须有 $f(t)=0$. 这是因为若有 $t_0\in(0,\frac{1}{2})$, $f(t_0)\neq 0$, 则由连续函数性质, 存在 $\delta>0$, 使得 $B(t_0;\delta)\subset(0,\frac{1}{2})$, 而当 $t\in B(t_0,\delta)$ 时, $|f(t)|\geqslant\frac{1}{2}|f(t_0)|$. 于是当 $n\geqslant n_0$ 时,

$$d_1(f_n,f)\geqslant 2\delta\frac{1}{2}|f(t_0)|=\delta|f(t_0)|>0,$$

与 $d_1(f_n,f)\to 0$ 相矛盾.

类似地可证, 当 $t\in(\frac{1}{2},1)$ 时, $f(t)=0$. 因此, f 在 $t=\frac{1}{2}$ 处不连续, 从而 $\{f_n\}$ 在距离空间 $(C[0,1],d_1)$ 中不可能收敛, 表明 $(C[0,1],d_1)$ 是不完备的. □

一个距离空间之所以不完备, 是由于它有一些基本列没有收敛的点. 直观地说, 就是此类空间中有一些 "空隙". 对这种不完备的距离空间, 可以加进一些 "新的点" 形成一个更大的空间, 使得在这个更大的空间中, 所有的基本列都收敛于一点, 从而新的空间是完备的. 这一过程称为距离空间的完备化. 实际上, 有理数集扩充为实数集的过程就是这种完备化过程具体体现. 一个不完备的距离空间都可以通过完备化过程扩充为一个完备的距离空间. 限于篇幅, 这里我们将略去这部分内容的叙述, 有兴趣的读者可参阅, 例如文献 [18, 40].

定义 3.1.12 设 X 为距离空间, $T:X\to X$ 称为压缩映射, 如果它满足

$$d(Tx,Ty)\leqslant \alpha d(x,y),\quad \forall x,y\in X,$$

其中 $\alpha\in(0,1)$ 为一正常数, 称为压缩系数; X 中的点 x 叫做 T 的不动点, 如果它满足不动点方程: $Tx=x$.

下面的压缩映射原理, 也称 Banach 不动点原理, 是分析中一个强有力的工具.

定理 3.1.5 (压缩映射原理) 设 T 为完备距离空间 X 中的压缩映射, α 为相应的压缩系数. 那么 T 在 X 中有唯一的不动点.

证明 任取 $x_0 \in X$, 令 $x_{n+1} = Tx_n$, $n = 0, 1, 2, \cdots$. 今证 $\{x_n\}$ 是 X 中的基本列. 事实上, 对于每一自然数 n 有

$$d(x_n, x_{n-1}) = d(Tx_{n-1}, Tx_{n-2}) \leqslant \alpha d(x_{n-1}, x_{n-2})$$
$$\leqslant \alpha^2 d(x_{n-2}, x_{n-3}) \leqslant \cdots \leqslant \alpha^{n-1} d(x_1, x_0).$$

因此

$$d(x_{n+k}, x_n) \leqslant d(x_{n+k}, x_{n+k-1}) + \cdots + d(x_{n+1}, x_n)$$
$$\leqslant (\alpha^{n+k-1} + \cdots + \alpha^n) d(x_1, x_0) \leqslant \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_1, x_0).$$

由于 $0 < \alpha < 1$, 故上述不等式表明 $\{x_n\}$ 是 X 中的基本列. 又由于 X 是完备的, 所以存在 $x \in X$ 使得 $x_n \to x$. 由于压缩映射显然是连续的, 所以

$$Tx = \lim_{n\to\infty} Tx_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x,$$

即 x 是 T 的不动点. 现在设 y 是 T 的另一个不动点, 于是

$$d(x, y) = d(Tx, Ty) \leqslant \alpha d(x, y).$$

由于 $0 < \alpha < 1$, 故必有 $d(x, y) = 0$, 即 $x = y$. □

上述证明过程实际上反映了求解方程 $Tx = x$ 的迭代解法的收敛性. 注意在证明中, 我们得到了一个估计式

$$d(x_{n+k}, x_n) \leqslant \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_1, x_0).$$

若在上式中让 $k \to \infty$, 则得

$$d(x, x_n) \leqslant \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_1, x_0),$$

这是用迭代法求解方程 $Tx = x$ 时的收敛速率的估计式.

例 3.1.13 考察线性积分方程

$$x(t) = f(t) + \lambda \int_a^b K(t, s) x(s) \mathrm{d}s, \tag{3.1.3}$$

其中 λ 为实参数. 设 $f \in C[a, b]$, $K(t, s)$ 在 $[a, b] \times [a, b]$ 上连续. 我们在赋以上确界距离下的完备的距离空间 $C[a, b]$ 中将式 (3.1.3) 写成不动点方程形式: $Tx = x$, 其中 $T : C[a, b] \to C[a, b]$ 定义为

$$(Tx)(t) = f(t) + \lambda \int_a^b K(t, s) x(s) \mathrm{d}s, \ \forall x \in C[a, b].$$

于是对 $x,y\in C[a,b]$, 有

$$d(Tx,Ty)=|\lambda|\max_{a\leqslant t\leqslant b}\left|\int_a^b K(t,s)(x(s)-y(s))\mathrm{d}s\right|$$
$$\leqslant|\lambda|\max_{a\leqslant t\leqslant b}\int_a^b|K(t,s)|\mathrm{d}s\ d(x,y).$$

因此, 如果

$$|\lambda|\max_{a\leqslant t\leqslant b}\int_a^b|K(t,s)|\mathrm{d}s<1,\tag{3.1.4}$$

那么 T 是 $C[a,b]$ 中的压缩映射, 从而有唯一不动点. 这就是说, 只要参数 λ 充分小使得式 (3.1.4) 满足, 则式 (3.1.3) 在 $C[a,b]$ 中有唯一解. □

下面讨论距离空间的列紧性. 在实数理论中我们知道, 任何有界数列必存在收敛子列, 或等价地, 实数域 $\mathbb{R}$ 中任何有界的无穷子集至少有一个极限点. 这就是实数集中有界集的列紧性原理, 这种列紧性实质上与 Cauchy 收敛准则, Heine-Borel 有限覆盖定理等是等价的, 奠定了数学分析的严格的理论基础.

在距离空间中, 一个点集称为是有界的, 如果它能包含在某个球之中. 那么自然要问, 在一般的距离空间中, 任意有界的无穷点列是否也一定有收敛子列呢? 可以设想, 这是一个非常重要的理论问题.

我们来考察距离空间 $C[0,1]$ 中的点列 $\{x_n\}$: $x_n(t)=t^n$, $n=1,2,\cdots$. 显然 $\{x_n\}$ 是有界的: 取 $x_0(t)\equiv 0$, 则

$$d(x_n,x_0)=\max_{t\in[0,1]}|x_n(t)|=\max_{t\in[0,1]}|t^n|=1,\quad n=1,2,\cdots.$$

今证 $\{x_n\}$ 没有收敛子列. 事实上, 若 $\{x_{n_k}\}$ 是其收敛子列, 并且 $d(x_{n_k},x)\to 0\ (k\to\infty)$. 注意到 $C[0,1]$ 中收敛就是函数列的一致收敛, 因此

$$x(t)=\begin{cases}0, & 0\leqslant t<1,\\ 1, & t=1.\end{cases}$$

这与函数 x 在 $t=1$ 处的连续性相矛盾.

因此, 一般距离空间中有界集不一定具有列紧性.

定义 3.1.13　设 M 为距离空间 X 的一子集. 我们称 M 为相对列紧的, 如果 M 中任一无限点列 $\{x_n\}$ 都有收敛子列 $\{x_{n_k}\}$, 使得 $x_{n_k}\to x\in X$; 进而若收敛子列的极限都在 M 中, 则称 M 是列紧的. 特别, 若空间 X 本身是列紧的, 则称 X 是列紧空间.

定理 3.1.6　设 M 是距离空间 X 中的一集合, 那么

(1) 若 M 是相对列紧的, 则 M 是有界的, 并且其闭包是列紧的;

(2) 若 X 是列紧的, 则 X 是完备的, 并且当 M 是闭集时 M 也是列紧的.

证明 (1) 设 M 是相对列紧的, 若 M 无界, 则存在 M 一无限点列 $\{x_n\}$, 使得 $d(x_0,x_n)>n$, 其中 x_0 是 X 的某个固定点. 显然 $\{x_n\}$ 的任何子列不可能收敛, 与 M 的相对列紧性矛盾, 因此 M 必定有界. 现在设 $\{x_k\}\subset\overline{M}$, 于是对于每个 k, 存在 $y_k\in M$, 使得 $d(x_k,y_k)<1/k$. 由于 M 是相对列紧的. 故存在子列 $\{y_{n_k}\}$, 使得 $y_{n_k}\to x_0\ (k\to\infty)$. 从

$$d(x_{n_k},x_0)\leqslant d(x_{n_k},y_{n_k})+d(y_{n_k},x_0)<1/n_k+d(y_{n_k},x_0)\to 0,$$

可知 $x_{n_k}\to x_0$. 但 $\overline{M}$ 是闭的, 故 $x_0\in\overline{M}$, 这就证明了 $\overline{M}$ 的列紧性.

(2) 设 $\{x_n\}$ 是列紧距离空间 X 的一基本列, 故 $\{x_n\}$ 有收敛于某 x 的子列 $\{x_{n_k}\}$. 于是对于任给的 $\varepsilon>0$, 存在自然数 k_0 和 N_0, 使得

$$k\geqslant k_0\Longrightarrow d(x_{n_k},x)<\frac{\varepsilon}{2},\quad m,n\geqslant N_0\Longrightarrow d(x_m,x_n)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

现在取 k_1 充分大, 使得 $n_{k_1}\geqslant N_0$. 于是当 $n\geqslant n_{n_{k_1}}$ 时, 有

$$d(x_n,x)\leqslant d(x_n,x_{n_{k_1}})+d(x_{n_{k_1}},x)<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon.$$

这表明 $x_n\to x$, 即 X 中基本列都收敛, 从而 X 是完备的. 至于最后一个结论, 即闭集的列紧性是显然的. □

定义 3.1.14 设 M 为距离空间 X 的一子集.

(1) 对正数 ε, 若存在子集 E 使得 $M\subset\bigcup_{x\in E}B_\varepsilon(x)$, 则称 E 是 M 的一个 ε-网.

(2) 若对任一正数 ε, 存在 M 的一个有限的 ε-网, 即存在有限点集 $E_\varepsilon=\{x_1,\cdots,x_n\}$, 使得 $M\subset\bigcup_{k=1}^n B(x_k,\varepsilon)$, 则称 M 是全有界的.

(3) 设 $\mathcal{U}$ 是 X 的一子集族, 称 $\mathcal{U}$ 是 M 的一个覆盖, 是指 $M\subset\bigcup_{B\in\mathcal{U}}B$; 而这时若 $\mathcal{U}$ 中每一集合都是 X 中的开集, 则称 $\mathcal{U}$ 是 M 的一开覆盖; 而若 $\mathcal{U}$ 仅包含有限个集合, 则称 $\mathcal{U}$ 是 M 的有限覆盖; 最后若 $\mathcal{U}$ 中一个子集族 $\mathcal{V}$ 就覆盖了 M, 则称 $\mathcal{V}$ 是 M 子覆盖.

定理 3.1.7 设 X 是距离空间, 则如下 3 个命题是等价的:

(1) X 是列紧的;

(2) X 是全有界且完备的;

(3) X 的每一开覆盖都含有一个有限的子覆盖.

证明 先证 (1)$\Longrightarrow$(2). 设 X 是列紧空间. 注意列紧空间一定是完备的, 这是因为若 X 中基本列有一子列收敛于一点, 则整个序列也收敛于这一点. 今若 X 不是全有界的, 则对某个 $\varepsilon>0$, 不存在 X 的有限 ε-网. 于是任取 $x_1\in X$, $B(x_1,\varepsilon)$ 不能包含整个 X, 故有 $x_2\in X\setminus B(x_1,\varepsilon)$. 同理, $B(x_1,\varepsilon)\cup B(x_2,\varepsilon)$ 不能包含整个 X, 故有 $x_3\in X\setminus(B(x_1,\varepsilon)\cup B(x_2,\varepsilon))$. 一般地, 可取 $x_n\in X\setminus\bigcup_{k=1}^{n-1}B(x_k,\varepsilon)$. 如此, 我们得到 X 中一个无限点列 $\{x_n\}$, $d(x_n,x_m)\geqslant\varepsilon$, $m\neq n$. 显然, $\{x_n\}$ 没有收敛子列, 这与 X 的列紧性矛盾. 因此 X 一定是全有界的.

下证 (2)$\Longrightarrow$(3). 设 X 是全有界且完备的. 今若 (3) 不成立, 则 X 必有一开覆盖 $\mathcal{U}$ 没有有限覆盖. 设 $B_0=X$, 然后用归纳法构造出 X 中开球 $B_1,B_2,\cdots,B_n$, 满足: ① B_n

的半径是 $1/2^n$; ② $B_n \cap B_{n-1} \neq \varnothing$; ③ $\mathcal{U}$ 中没有有限子集族覆盖 B_n. 现在来构造开球 B_{n+1}, 使之仍然具有上述特性. 注意全有界空间的子集 B_n 也是全有界的, 因此 B_n 能被有限个半径为 $1/2^{n+1}$ 的开球族 $\{V_1, \cdots, V_m\}$ 覆盖, 当然, 不妨可以要求 $V_j \cap B_n \neq \varnothing$, $1 \leqslant j \leqslant m$. 在 $V_1, \cdots, V_m$ 中至少有一个球不能被 $\mathcal{U}$ 中有限个集合覆盖, 因为否则的话, B_n 就被 $\mathcal{U}$ 中有限个开集覆盖了. 将 $V_1, \cdots, V_m$ 中不能被 $\mathcal{U}$ 中有限个开集覆盖的开球用 B_{n+1} 表示, 显然 B_{n+1} 满足上述要求.

这样我们得到一无限开球序列 $\{B_n \,|\, n \geqslant 1\}$. 设开球 B_n 的球心在 x_n, 由于 $B_n \cap B_{n-1} \neq \varnothing$, 因此, 当 $n \geqslant 2$ 时, $d(x_n, x_{n-1}) \leqslant 1/2^n + 1/2^{n-1} < 1/2^{n-2}$. 于是, 当 $j > k \geqslant m \geqslant 1$ 时, 有

$$d(x_k, x_j) \leqslant \sum_{i=k}^{j-1} d(x_i, x_{i+1}) < \sum_{i=k}^{j-1} \frac{1}{2^{i-1}} < \frac{1}{2^{k-1}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} \leqslant \frac{1}{2^{k-2}}.$$

由此可见 $\{x_n\}$ 是 X 中的一个基本列, 但 X 是完备的, 从而存在 $x_0 \in X$, 使得 $x_n \to x_0$. 由于 $\mathcal{U}$ 是 X 的覆盖, 故存在一集合 $U \in \mathcal{U}$, 使得 $x_0 \in U$. 由于 U 是开集, 故存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $B(x_0, \varepsilon) \subset U$. 然后选取一充分大的自然数 $N > 1$, 使得 $\frac{1}{2^N} < \frac{\varepsilon}{2}$ 和 $d(x_N, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}$. 于是对于任意 $x \in B_N$, 有

$$d(x, x_0) \leqslant d(x, x_N) + d(x_N, x_0) < 1/2^N + \varepsilon/2 < \varepsilon,$$

这表明 $x \in B(x_0, \varepsilon)$, 从而 $B_N \subset B(x_0, \varepsilon) \subset U$, 与属性③相矛盾. 于是关于 X 的有限覆盖的命题 (3) 成立.

最后证 (3)$\Longrightarrow$(1). 设 (3) 成立, $\{x_n\}$ 是 X 中任一点列. 对于每一自然数 n, 设 F_n 为集合 $\{x_n, x_{n+1}, \cdots\}$ 的闭包. 今证开集族 $\{F_n^c \,|\, n \geqslant 1\}$ 不能覆盖 X. 事实上, 若 $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n^c = X$, 则从 (3) 可知有有限个 F_n^c 就能覆盖 X, 不妨设 $\bigcup_{k=1}^{n} F_k^c = X$. 由此可得 $\bigcap_{k=1}^{n} F_k = \varnothing$, 矛盾. 因此 $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n^c \neq X$. 设 $x_0 \in (\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n^c)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$. 对于每一 k, 由于 $x_0 \in F_k$, 故存在 $n_k \geqslant k$, 使得 $d(x_{n_k}, x_0) < 1/2^n$. 从而 $x_{n_k} \to x_0$, 即 $\{x_{n_k}\}$ 是收敛子列. □

定理 3.1.7 中条件 (3) 称为 “有限开覆盖性质”. 在一般拓扑空间 X 中, 通常当集合 M 具有有限开覆盖性质时称其为紧集, 紧性与列紧性是有区别的. 但正如定理 3.1.7 所述, 在距离空间中紧性和列紧性是等价的. 因此在本章中, 我们对术语 “紧” 和 “列紧” 将不作严格区分.

在一个具体的距离空间中, 验证一个集合的列紧性并不是一件容易的事情. 这里我们不作证明地列出 $C[a, b]$ 中集合的列紧性条件.

定理 3.1.8 (Arzela-Ascoli 定理) 设 $C[a, b]$ 是赋以上确界距离下的距离空间, $M \subset C[a, b]$. 那么, M 是相对列紧的, 当且仅当

(1) M 是一致有界的, 即存在正常数 μ, 使得

$$|f(t)| \leqslant \mu, \quad \forall\, f \in M, \ t \in [a, b];$$

(2) M 是一等度连续函数族, 即 $\forall \varepsilon > 0$, 存在常数 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, 使得

$$|f(t) - f(s)| < \varepsilon, \quad \forall f \in M, \forall t, s \in [a, b], |t - s| < \delta.$$

实际上, Arzela-Ascoli 定理对更一般的连续函数空间 $C(\Omega)$ 也是对的, 这里 Ω 是某个距离空间中的紧集, $C(\Omega)$ 表示定义在 Ω 上连续函数全体所形成的距离空间, 距离定义为

$$d(x, y) = \max_{t \in \Omega} |x(t) - y(t)|.$$

3.2 赋范线性空间

在 3.1 节中, 我们引进了距离的概念, 并通过距离引入了收敛或极限的概念, 为分析奠定了基础. 本节进一步考虑具有线性结构的距离空间, 也就是说, 我们考虑的距离空间 X 中有元素的加法和数乘运算, 并且 X 相对于这些运算还是封闭的, 即

$$x, y \in X, \alpha \in \mathbb{K} \quad \Longrightarrow \quad x + y \in X, \alpha x \in X,$$

这里 $\mathbb{K}$ 表示线性空间所基于的数域, 可以是实数域, 也可以是复数域. 在一般情形下我们将不指出线性空间的数域, 这时可以理解成实线性空间, 也可以理解成复线性空间. 本书中我们假定读者已经熟悉了线性空间的基本概念和理论.

首先我们给出范数的定义.

定义 3.2.1 设 X 是数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间. X 上的范数是指从 X 到 $\mathbb{R}$ 的一个映射: $x \mapsto \|x\|$, 它对于任意的 $x, y \in X, \alpha \in \mathbb{K}$ 满足

(1) 非负性: $\|x\| \geqslant 0, \|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$;

(2) 比例性: $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$;

(3) 三角不等式: $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

$\|x\|$ 叫做点 x 的范数. 赋以范数的线性空间叫做赋范线性空间或线性赋范空间, 有时也简称赋范空间, 记作 $(X, \|\cdot\|)$.

当上下文已经明确或约定俗成的情形下, 往往简称线性赋范空间 X, 而不再特别说明所用的范数.

在线性赋范空间 X 中, 若令 $d(x, y) = \|x - y\|$, 则易见 d 是 X 中的一个距离, 称为由范数导出的距离, 从而 (X, d) 是一个距离空间. 于是线性赋范空间 X 中像开集、闭集、收敛和极限等这样一些拓扑概念都可以借助由范数导出的距离给出. 例如, 开球 $B(x_0, \varepsilon) = \{x \in X \mid \|x - x_0\| < \varepsilon\}$, 而 $x_n \to x_0 (n \to \infty)$ 意指 $\|x_n - x_0\| \to 0 (n \to \infty)$.

今后, 涉及极限, 例如 $x_n \to x_0 (n \to \infty)$, 有时为了记号简单起见, 在不致引起歧义的情形下, 往往会省略 $(n \to \infty)$.

定义 3.2.2 若一个线性赋范空间 X 按其导出的距离是一个完备的距离空间, 则称该线性赋范空间是一个 Banach 空间.

在列举一些常见的线性赋范空间的例子之前, 我们先证明一些有用的不等式.

引理 3.2.1 设 $a \geqslant 0, b \geqslant 0, p > 1, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 那么

$$a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} \leqslant \frac{a}{p} + \frac{b}{q}. \tag{3.2.1}$$

证明 设 $0 < \alpha < 1$, 并令 $f(x) = x^\alpha - \alpha x, 0 < x < \infty$. 不难看出 $f(x)$ 在 $x = 1$ 时达到最大值 $1 - \alpha$, 从而

$$x^\alpha \leqslant \alpha x + (1 - \alpha), \quad 0 < x < \infty.$$

特别在上式中取 $x = \frac{a}{b}, \alpha = \frac{1}{p}, 1 - \alpha = \frac{1}{q}$, 即得式 (3.2.1). □

今后我们记 $\ell^p = \left\{ x = \{\xi_k\} \,\middle|\, \sum\limits_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p < \infty \right\}$.

引理 3.2.2 (Hölder 不等式) 设 $p > 1, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $x = \{\xi_k\} \in \ell^p$, $y = \{\eta_k\} \in \ell^q$. 那么如下 Hölder 不等式成立

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k \eta_k| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}. \tag{3.2.2}$$

证明 在式 (3.2.1) 中令 $\alpha = a^{\frac{1}{p}}, \beta = b^{\frac{1}{q}}$, 得到

$$\alpha\beta \leqslant \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}, \quad \alpha \geqslant 0, \ \beta \geqslant 0.$$

然后在上式中令

$$\alpha = \frac{|\xi_j|}{\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}}, \quad \beta = \frac{|\eta_j|}{\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}},$$

得到

$$\frac{|\xi_j|\,|\eta_j|}{\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}} \leqslant \frac{|\xi_j|^p}{p \sum\limits_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p} + \frac{|\eta_j|^q}{q \sum\limits_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^q}.$$

最后对 j 从 1 到 ∞ 求和, 即得式 (3.2.2). □

引理 3.2.3 (Minkowski 不等式) 设 $p \geqslant 1$, x, $y \in \ell^p$, 其中 $x = \{\xi_k\}$, $y = \{\eta_k\}$. 那么如下 Minkowski 不等式成立

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k + \eta_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.2.3}$$

证明 $p=1$ 显见. 因此下面假设 $p>1$, 并且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. 今设 $z=\{\zeta_k\}\in\ell^p$, 并令 $\tilde{z}=\{|\zeta_k|^{p-1}\}$. 由于 $(p-1)q=p$, 故 $\tilde{z}\in\ell^q$.

注意对于任意数 a,b, 有

$$|a+b|^p\leqslant(2\max\{|a|,|b|\})^p\leqslant 2^p(|a|^p+|b|^p). \tag{3.2.4}$$

于是从式 (3.2.4) 推出 $\{\xi_k+\eta_k\}\in\ell^p$, 从而利用 Hölder 不等式 (3.2.2) 得到

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k+\eta_k|^p&\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k+\eta_k|^{p-1}|\xi_k|+\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k+\eta_k|^{p-1}|\eta_k|\\&\leqslant\left[\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\eta_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right]\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k+\eta_k|^p\right)^{\frac{1}{q}}.\end{aligned}$$

然后经适当整理即得 Minkowski 不等式 (3.2.3). □

例 3.2.1 ℓ^p 空间 $(1\leqslant p\leqslant\infty)$. 当 $1\leqslant p<\infty$ 时, 从引理 3.2.3 可见 ℓ^p 是一线性空间. 定义

$$\|x\|_p=\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}},\quad\forall x=\{\xi_k\}\in\ell^p.$$

从引理 3.2.3 看出, $\|x\|_p$ 是 ℓ^p 上的一个范数. 今证 $(\ell^p,\|\cdot\|_p)$ 是完备的, 从而是一个 Banach 空间. 事实上, 设 $\{x_n\,|\,n\geqslant1\}$ 是 ℓ^p 中一基本列, 这里 $x_n=\{\xi_k^{(n)}\}$, $n\geqslant1$. 于是对于每一自然数 k 有

$$\left|\xi_k^{(m)}-\xi_k^{(n)}\right|\leqslant\|x_m-x_n\|_p,$$

由此可见, $\{\xi_k^{(n)}\,|\,n\geqslant1\}$ 是 $\mathbb{K}$ 中一基本列, 从而存在 $\xi_k^{(0)}\in\mathbb{K}$, 使得 $\xi_k^{(n)}\to\xi_k^{(0)}(n\to\infty)$. 记 $x_0=\{\xi_k^{(0)}\}$.

对于任给的 $\varepsilon>0$, 存在自然数 $N=N(\varepsilon)$, 使得当 $m,n>N$ 时 $\|x_m-x_n\|_p<\varepsilon$. 于是当 $m,n>N$ 时

$$\left(\sum_{j=1}^{k}|\xi_j^{(m)}-\xi_j^{(n)}|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\|x_m-x_n\|_p<\varepsilon,\quad\forall k\geqslant1.$$

在上式中让 $m\to\infty$, 得到

$$\left(\sum_{j=1}^{k}|\xi_j^{(0)}-\xi_j^{(n)}|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\|x_0-x_n\|_p\leqslant\varepsilon,\quad\forall k\geqslant1.$$

然后在上式中再让 $k\to\infty$ 即得

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty}|\xi_j^{(0)}-\xi_j^{(n)}|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\varepsilon,\quad\forall n>N.$$

上式表明, $x_0 \in \ell^p$, 并且 $x_n \to x_0$. 这样我们证明了 ℓ^p 中每一基本列都有极限, 从而 ℓ^p 是完备的, 即 ℓ^p 是 Banach 空间.

当 $p=\infty$ 时, 令 $\ell^\infty = \{x=\{\xi_k\} \mid \sup_{1\leqslant k<\infty} |\xi_k| < \infty\}$, 并令

$$\|x\|_\infty = \sup_{1\leqslant k<\infty} |\xi_k|, \quad \forall\, x=\{\xi_k\} \in \ell^\infty,$$

那么容易验证 $\|x\|_\infty$ 是 ℓ^∞ 的一个范数, 并且 ℓ^∞ 也是一个 Banach 空间. □

例 3.2.2 $L^p(E)$ 空间 $(1\leqslant p\leqslant\infty)$. 设 E 是 $\mathbb{R}$ 中一可测集, $\mathrm{m}(E)<\infty$, 先令 $1\leqslant p<\infty$ 为一给定常数. 设 $L^p(E)$ 表示 E 上所有 p 次幂勒贝格可积函数的集合, 这里 E 上函数 f 的 p 次幂指 $|f(x)|^p$. 今后, $L^p(E)$ 几乎处处相等的函数认为是同一个函数, 因此, 严格地说, $L^p(E)$ 中元素是 p 次可积函数的等价类. 对于 $f\in L^p(E)$, 令

$$\|f\|_p = \left(\int_E |f(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}},$$

则

$$L^p(E) = \{f\in\mathcal{M}(E) \mid \|f\|_p<\infty\},$$

这里 $\mathcal{M}(E)$ 表示 E 上可测函数全体.

设 $f\in\mathcal{M}(E)$, 如果存在一正常数 μ, 使得 $|f(x)|\leqslant\mu$, a.e. 于 E, 则称 f 是一本性有界函数; 对于如此的上界 μ 取下确界, 记作 $\|f\|_\infty$, 称为 f 的本性上界. $L^\infty(E)$ 表示 E 上所有本性有界函数构成的集合. 容易验证, 对于 $f\in L^\infty(E)$ 有

$$\|f\|_\infty = \inf_{\omega\subset E,\, \mathrm{m}(\omega)=0} \ \sup_{x\in E\setminus\omega} |f(x)|.$$

设 $f,g\in L^p(E)$, 并且 $p\geqslant 1, q\geqslant 1$, 则从式 (3.2.4) 可知

$$|f(x)+g(x)|^p \leqslant 2^p(|f(x)|^p+|g(x)|^p), \quad x\in E.$$

上式两边在 E 上积分, 得到

$$\int_E |f(x)+g(x)|^p\mathrm{d}x \leqslant 2^p\left(\int_E |f(x)|^p\mathrm{d}x + \int_E |g(x)|^p\mathrm{d}x\right).$$

由此可见当 $f,g\in L^p(E)$ 时, $f+g\in L^p(E)$, 而若 $\alpha\in\mathbb{K}$, 则 $\alpha f\in L^p(E)$ 是显然的. 因此, $L^p(E)$ 是一个线性空间. 这一结论显然对于 $p=\infty$ 也是对的. □

我们将证明 $\|f\|_p$ 是 $L^p(E)$ 中的范数. 为此, 我们需要一些准备. 利用类似于 ℓ^p 情形的方法, 可以证明函数形式的 Hölder 不等式和 Minkowski 不等式.

引理 3.2.4 (Hölder 不等式) 设 $p>1,\ q>1,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,\ f\in L^p(E),\ g\in L^q(E)$. 那么如下 Hölder 不等式成立

$$\int_E |f(x)g(x)|\mathrm{d}x \leqslant \left(\int_E |f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_E |g(x)|^q\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{3.2.5}$$

引理 3.2.5 (Minkowski 不等式) 设 $p \geqslant 1$, $f, g \in L^p(E)$. 那么如下 Minkowski 不等式成立

$$\left(\int_E |f(x)+g(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int_E |f(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_E |g(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.2.6}$$

例 3.2.3 (例 3.2.2 的继续) 下面证明 $\|f\|_p$ 是 $L^p(E)$ 中的范数. 首先考虑 $1 \leqslant p < \infty$ 的情形. 从勒贝格积分理论可知, $\|f\|_p = 0$ 等价于 $f(x) = 0$, a.e. 于 E, f 是零元, 于是范数性质 (1) 成立; 范数性质 (2) 是显然的; 从 Minkowski 不等式直接可得范数性质 (3) 成立. 因此 $\|f\|_p$ 确实是一个范数. 当 $p = \infty$ 时, 证明将更直接简单. □

下面考虑 $L^p(E)$ 空间的完备性. 设 $\{f_n \mid n \geqslant 1\}$ 是 $L^p(E)$ 的一基本列, 我们要证明存在 $f \in L^p(E)$ 使得 $f_n \to f (n \to \infty)$. 由于 $\|f_n - f_m\|_p \to 0\,(n, m \to \infty)$, 故可取一列自然数 $\{n_j \mid j \geqslant 1\}$, $n_1 < n_2 < \cdots$, 使得

$$\|f_{n_{j+1}} - f_{n_j}\|_p < 1/2^j.$$

对于每个自然数 k, 记 $E_k = E \cap \{x \in \mathbb{R} \mid |x| < k\}$, 则 $\mathrm{m}(E_k) < \infty$, 并且

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k.$$

在 E_k 上对函数 $|f_{n_{j+1}} - f_{n_j}|$ 和常值函数 1 应用 Hölder 不等式, 得到

$$\int_{E_K} |f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x)| \mathrm{d}x \leqslant \mathrm{m}(E_k)^{1/q} \|f_{n_{j+1}} - f_{n_j}\|_p.$$

于是

$$\begin{aligned}
&\int_{E_k} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left| f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x) \right| \right) \mathrm{d}x \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \int_{E_k} \left| f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x) \right| \mathrm{d}x \\
&\leqslant \mathrm{m}(E_k)^{1/q} \sum_{j=1}^{\infty} \|f_{n_{j+1}} - f_{n_j}\|_p < \mathrm{m}(E_k)^{1/q} < \infty.
\end{aligned}$$

由此可见, 当 $k \to \infty$ 时

$$|f_{n_1}(x)| + \sum_{j=1}^{k-1} |f_{n_{j+1}} - f_{n_j}|$$

在 E_k 上几乎处处收敛, 因为否则积分将发散. 从而

$$f_{n_1}(x) + \sum_{j=1}^{k-1} \left(f_{n_{j+1}} - f_{n_j}\right) = f_{n_k}(x)$$

在 E_k 上也几乎处处收敛. 记 f 为其极限函数, 这里在 f_{n_k} 不收敛的点 x 上定义 $f(x)=0$. f 是 E 上的可测函数.

对于任给 $\varepsilon>0$, 由于 $\{f_n\}$ 是 $L^p(E)$ 中基本列, 故存在自然数 N, 使得

$$\int_E |f_n(x)-f_m(x)|^p\mathrm{d}x<\varepsilon^p,\quad \forall m,n>N.$$

今取自然数 J 充分大, 使得 $n_J>N$. 于是

$$\int_E |f_n(x)-f_{n_j}(x)|^p\mathrm{d}x<\varepsilon^p,\quad \forall n>N, j>J.$$

固定 n, 对于非负函数列 $\{|f_n(x)-f_{n_j}(x)|\,|\,j\geqslant 1\}$ 应用定理 2.9.6 (Fatou 引理), 得到

$$\int_E |f_n(x)-f(x)|^p\mathrm{d}x<\varepsilon^p,\quad \forall n>N.$$

这表明 $f_n-f\in L^p(E)$, 从而 $f\in L^p(E)$, 并且 $f_n\to f(n\to\infty)$, 即 $L^p(E)$ 中基本列有极限. 因此, $L^p(E)$ 是 Banach 空间.

至于 $L^\infty(E)$ 的完备性的证明则更简单, 读者可作为练习.

下一定理说明赋范线性空间中线性运算对于范数的连续性.

定理 3.2.1 设 X 是数域 $\mathbb{K}$ 上的赋范线性空间, 令

$$f(x,y)=x+y,\quad g(\lambda,x)=\lambda x,\quad h(x)=\|x\|,$$

那么 $f:X\times X\to X$, $g:\mathbb{K}\times X\to X$, $h:x\to\mathbb{R}$ 都是连续函数.

证明 设 $\{x_n\}$, $\{y_n\}\subset X$, $\{\lambda_n\}\subset\mathbb{R}$, $x,y\in X$, 使得 $x_n\to x$, $y_n\to y$, $\lambda_n\to\lambda$. 于是从范数的定义可得

$$\|f(x_n,y_n)-f(x,y)\|\leqslant\|x_n-x\|+\|y_n-y\|\to 0(n\to\infty),$$

$$\begin{aligned}\|f(\lambda_n,x_n)-f(\lambda,x)\|&\leqslant\|\lambda_n x_n-\lambda_n x\|+\|\lambda_n x-\lambda x\|\\&\leqslant|\lambda_n|\,\|x_n-x\|+|\lambda_n-\lambda|\,\|x\|\to 0(n\to\infty),\end{aligned}$$

$$|h(x_n)-h(x)|\leqslant\|x_n-x\|\to 0(n\to\infty).$$

□

3.1 节定义了同一集合上不同距离之间的等价性, 据此, 一个线性空间 X 上两个范数 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 称为等价, 是指对于 X 中点列 $\{x_n\}$ 有

$$\|x_n\|_1\to 0\Longleftrightarrow\|x_n\|_2\to 0.$$

定理 3.2.2 线性空间 X 上两个范数 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 等价的充分必要条件是存在两个正常数 μ_1 和 μ_2, 使得

$$\mu_1\|x\|_2\leqslant\|x\|_1\leqslant\mu_2\|x\|_2,\quad\forall x\in X.$$

证明 充分性是显然的, 下面用反证法证明必要性. 假定两个范数 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 等价, 但不存在正常数 μ_2, 使得 $\|x\|_1 \leqslant \mu_2\|x\|_2, \forall x \in X$. 于是对于每一 n, 存在 $x_n \in X$, 使得 $\|x_n\|_1 > n\|x_n\|_2$, 从而若令 $y_n = \|x_n\|_1^{-1}x_n$, 则 $\|y_n\|_2 < 1/n$, 即 $\|y_n\|_2 \to 0(n \to \infty)$. 但 $\|y_n\|_1 = 1$, 与两个范数的等价性假设相矛盾. 同理可证存在正常数 μ_1, 使得 $\mu_1\|x\|_2 \leqslant \|x\|_1, \forall x \in X$. □

赋范线性空间 X 称为是有穷维的, 是指线性空间 X 的维数 $\dim X = n < \infty$. 设 X_n 是 n 维赋范线性空间, $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 是线性空间 X_n 的基. 于是每一 $x \in X_n$ 可唯一表示为

$$x = \xi_1 e_1 + \cdots + \xi_n e_n,$$

其中 $\xi_k \in \mathbb{R}($ 或 $\mathbb{C})$ 为 x 的坐标.

定理 3.2.3 设 X_n 是 n 维赋范线性空间, 那么 X_n 上的任意两个范数都是等价的.

证明 如上, 设 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 为 X_n 的基, X_n 上任意元 x 唯一地表示为 $x = \xi_1 e_1 + \cdots + \xi_n e_n$. 设 $\|\cdot\|$ 为 X_n 的一个范数, 首先我们证明存在两个正常数 ν 和 μ, 使得

$$\nu\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^2} \leqslant \|x\| \leqslant \mu\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^2}, \quad \forall x \in X_n. \tag{3.2.7}$$

事实上, 令 $f(\xi_1, \cdots, \xi_n) = \|x\| = \|\xi_1 e_1 + \cdots + \xi_n e_n\|$, 显然 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是 n 元连续函数. 令

$$E = \{(\xi_1, \cdots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n \mid |\xi_1|^2 + \cdots + |\xi_n|^2 = 1\}.$$

显然 E 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界闭集. 于是 f 在 E 上达到最大值 μ 和最小值 ν. 容易看出 $\nu > 0$, 因为否则的话, 存在 $x \in E$, 使得 $f(x) = \|x\| = 0$, 从而 $x = \xi_1 e_1 + \cdots + \xi_n e_n = 0$, 即 $\xi_1 = \xi_2 = \cdots = \xi_n = 0$, 与 $|\xi_1|^2 + \cdots + |\xi_n|^2 = 1$ 相矛盾. 于是 $\nu > 0$.

现在任取 $x = \xi_1 e_1 + \cdots + \xi_n e_n$. 令 $y = x/\sqrt{|\xi_1|^2 + \cdots + |\xi_n|^2}$, 则显然 $y \in E$, 从而 $\nu \leqslant f(y) = \|x\|/\sqrt{|\xi_1|^2 + \cdots + |\xi_n|^2} \leqslant \mu$, 即得式 (3.2.7).

现在设 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 是 X_n 上的两个范数. 于是根据上述, 存在 4 个正常数 ν_1, μ_1, ν_2 和 μ_2, 使得

$$\nu_1\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^2} \leqslant \|x\|_1 \leqslant \mu_1\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^2}, \quad \forall x \in X_n;$$

$$\nu_2\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^2} \leqslant \|x\|_2 \leqslant \mu_2\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^2}, \quad \forall x \in X_n.$$

由此从上述两式不难推出

$$\frac{\nu_1}{\mu_2}\|x\|_2 \leqslant \|x\|_1 \leqslant \frac{\mu_1}{\nu_2}\|x\|_2, \quad \forall x \in X_n.$$

即 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 等价. □

3.3 内积空间

本节介绍内积空间, 它是 n 维欧氏空间向量内积的无穷维推广.

定义 3.3.1 设 X 是数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间. 定义在 $X\times X$ 上的泛函 $\langle x,y\rangle$ 叫做 X 上的内积, 如果它满足

(1) 正定性: $\forall x\in X, \langle x,x\rangle\geqslant 0$, 并且 $\langle x,x\rangle=0\Longleftrightarrow x=0$;

(2) 共轭对称性: $\forall x,y\in X, \langle x,y\rangle=\overline{\langle y,x\rangle}$;

(3) 关于第一变元的线性性: $\forall x,y\in X, \forall\alpha,\beta\in\mathbb{K}, \langle\alpha x+\beta y,z\rangle=\alpha\langle x,z\rangle+\beta\langle y,z\rangle$.

这里对于 $\alpha\in\mathbb{K}$, $\overline{\alpha}$ 表示 α 的复共轭 (当 $\mathbb{K}$ 是复数域 $\mathbb{C}$ 时).

赋以内积的线性空间叫做内积空间, 记作 $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$, 而在不致引起混淆的情形下, 简记内积空间 X.

记 $\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}$, 称为元 x 的范数. 下面我们将证明如此定义的 $\|x\|$ 确实满足范数的条件, 从而是 X 中的范数. 一个内积空间, 如果它按其内积导出的范数是完备的, 则称此内积空间为 Hilbert 空间.

例 3.3.1 n 维欧氏空间 $\mathbb{K}^n$, 这里 $\mathbb{K}$ 取 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$, 分别得到实欧氏空间和复欧氏空间. 在 $\mathbb{K}^n$ 中定义内积

$$\langle x,y\rangle=\sum_{k=1}^{n}=\xi_k\overline{\eta}_k,\quad \forall x=(\xi_1,\cdots,\xi_n), y=(\eta_1,\cdots,\eta_n)\in\mathbb{K}^n.$$

由该内积导出的范数正好是前面已经引入的欧氏范数. $\mathbb{K}^n$ 是有限维 Hilbert 空间. □

例 3.3.2 空间 ℓ^2. 对于 $x=\{\xi_k\}$, $y=\{\eta_k\}\in\ell^2$, 定义

$$\langle x,y\rangle=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\overline{\eta}_k,$$

则不难验证, $\langle x,y\rangle$ 是 ℓ^2 中的内积, 并且由 $\langle x,y\rangle$ 导出的范数恰好是前面定义的 ℓ^2 中的范数, 从而 ℓ^2 是 Hilbert 空间. □

例 3.3.3 空间 $L^2(a,b)$. 设 $x,y\in L^2(a,b)$, 定义

$$\langle x,y\rangle=\int_a^b x(t)\overline{y(t)}\mathrm{d}t,$$

则不难验证, $\langle x,y\rangle$ 是 $L^2(a,b)$ 中的内积, 并且内积 $\langle x,y\rangle$ 导出的范数恰好是前面定义的 $L^2(a,b)$ 中的范数, 从而 $L^2(a,b)$ 是 Hilbert 空间. □

例 3.3.4 空间 $C[a,b]$. 定义

$$\langle x,y\rangle=\int_a^b x(t)\overline{y(t)}\,\mathrm{d}t,\quad \forall x,y\in C[a,b],$$

则不难验证, $\langle x,y\rangle$ 是 $C[a,b]$ 中内积, 但在 3.1 节中知道, $C[a,b]$ 在由该内积 $\langle x,y\rangle$ 导出的范数下是不完备的, 从而不是 Hilbert 空间. □

命题 3.3.1 设 X 是一内积空间, 则

(1) $\forall x,y\in X$, 成立如下的 Schwarz 不等式

$$|\langle x,y\rangle|\leqslant\|x\|\,\|y\|;$$

(2) $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|, \forall x,y\in X$.

证明 (1) 不妨设 $x\neq 0$. 对任意 $x,y\in X$, $\alpha,\beta\in\mathbb{K}$, 有

$$\begin{aligned}0\leqslant&\langle\alpha x+\beta y,\alpha x+\beta y\rangle\\=&|\alpha|^2\|x\|^2+\alpha\overline{\beta}\langle x,y\rangle+\overline{\alpha}\beta\langle y,x\rangle+|\beta|^2\|y\|^2\\=&\left(\alpha\|x\|+\beta\|x\|^{-1}\langle y,x\rangle\right)\overline{\left(\alpha\|x\|+\beta\|x\|^{-1}\langle y,x\rangle\right)}\\&+|\beta|^2\left(\|y\|^2-\|x\|^{-2}|\langle x,y\rangle|\right).\end{aligned}$$

特别取 $\alpha=-\beta\|x\|^{-2}|\langle x,y\rangle$, 得到 $|\langle x,y\rangle|^2\leqslant\|x\|^2\|y\|^2$. 由此即得 Schwarz 不等式.

(2) 直接由 Schwarz 不等式得出

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2=\langle x+y,x+y\rangle&=\|x\|^2+2\mathrm{Re}\,\langle x,y\rangle+\|y\|^2\\&\leqslant\|x\|^2+2\|x\|\,\|y\|+\|y\|^2=(\|x\|+\|y\|)^2.\end{aligned}$$

□

由命题 3.3.1 不难验明 $\|x\|$ 确实满足范数的所有要求.

命题 3.3.2 设 X 是一内积空间, 则其内积 $\langle x,y\rangle$ 是双变元连续泛函, 即若 $x_n\to x_0$, $y_n\to y_0$, 则 $\langle x_n,y_n\rangle\to\langle x_0,y_0\rangle$.

证明 我们有

$$\begin{aligned}|\langle x_n,y_n\rangle-\langle x_0,y_0\rangle|&\leqslant|\langle x_n,y_n-y_0\rangle|+|\langle x-x_0,y_0\rangle|\\&\leqslant\|x_n\|\,\|y_n-y_0\|+\|x_n-x_0\|\,\|y\|\to 0(n\to\infty),\end{aligned}$$

这里我们利用了收敛列范数的有界性. □

三维空间中两个向量 x 和 y 之间夹角 θ 的余弦可表示成

$$\cos\theta=\frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\,\|y\|}.$$

在一般内积空间中, 根据内积性质有 $\frac{|\langle x,y\rangle|}{\|x\|\,\|y\|}\leqslant 1$, 从而在无穷维内积空间中, 也可按照上式定义两个向量之间的夹角. 这样就可以讨论内积空间中许多几何性质. 为此, 我们给出如下定义.

定义 3.3.2 设 X 是一内积空间, M, N 为 X 的两非空子集.

(1) 对于 $x,y\in X$, 若 $\langle x,y\rangle=0$, 则称 x 与 y 相互直交, 记作 $x\perp y$;

(2) 如果 $\langle x,y\rangle=0, \forall y\in M$, 则称 x 与 M 直交, 记作 $x\perp M$;

(3) M 的直交补是指集合 $M^{\perp}=\{x\in X\,|\,\langle x,y\rangle=0,\ \forall y\in M\}$;

(4) M 和 N 称为相互直交, 记作 $M\perp N$, 是指 $\langle x,y\rangle=0, \forall x\in M, y\in N$.

命题 3.3.3 设 X 是一内积空间, M、N 为 X 中两个子集.

(1) (勾股定理) 若 $x,y\in X$, $x\perp y$, 则

$$\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2;$$

(2) 若 $M\perp N$, 则它们的闭包也相互直交, 即 $\overline{M}\perp\overline{N}$;

(3) 若 $\overline{M}=X$, 即 M 在 X 中稠, 且 $x\perp M$, 则 $x=0$;

(4) 若 $M\subset N$, 则 $N^{\perp}\subset M^{\perp}$;

(5) $M^{\perp}$ 是 X 中一闭子空间.

证明 将 $\|x+y\|^2=\langle x+y,x+y\rangle$ 展开即得 (1). 利用命题 3.3.2 可得 (2) 和 (3), 而 (5) 的证明是显见的. □

下面的结论称为直交分解定理.

定理 3.3.1 设 M 是 Hilbert 空间 H 中的闭线性子空间, 那么 H 中任意元 x 可唯一地表示成 $x=y+z$, 其中 $y\in M$, $z\in M^{\perp}$, 而且

$$\|y-x\|=\inf_{v\in M}\|v-x\|,$$

即 y 是 M 中距 x 最近的点.

证明 首先我们来找出 M 中距 x 最近的向量. 令

$$\alpha=\inf_{v\in M}\|v-x\|,$$

根据下确界的定义, 对于任意自然数 n, M 中有元 y_n, 使得

$$\alpha\leqslant\|y_n-x\|<\alpha+1/n,$$

从而 $\|y_n-x\|\to\alpha$. 今证 $\{y_n\}$ 是基本列. 事实上, 根据命题 3.3.1 的平行四边形公式有

$$\begin{aligned}\|y_m-y_n\|^2&=\|(y_m-x)-(y_n-x)\|^2\\&=2\left(\|y_m-x\|^2+\|y_n-x\|^2\right)-\|(y_m-x)+(y_n-x)\|^2\\&=2\|y_m-x\|^2+2\|y_n-x\|^2-4\left\|\frac{y_m+y_n}{2}-x\right\|^2.\end{aligned}$$

由于 $y_m, y_n \in M$, 故 $\frac{1}{2}(y_m + y_n) \in M$, 从而

$$\alpha \leqslant \left\| \frac{y_m + y_n}{2} - x \right\|.$$

注意到 $\|y_n - x\| \to \alpha$, $\|y_m - x\| \to \alpha$, 可知当 m, n 充分大时 $\|y_m - y_n\|$ 可任意小, 从而 $\{y_n\}$ 是一个基本列.

由于 H 是完备的, 故 $\{y_n\}$ 在 H 中有极限 y. 由假设 M 是闭的, 故 $y \in M$. 于是 $\|y - x\| = \alpha$, 即 y 是 M 中距 x 最近的向量.

下面证明 $(x - y) \perp M$. 事实上, 若不然, 则存在 $u \in M$, 使得 $\beta = \langle x - y, u \rangle \neq 0$. 令 $w = y + \beta u$, 则 $w \in M$, 并且

$$\begin{aligned}
\|x - w\|^2 &= \langle x - y - \beta u, x - y - \beta u \rangle \\
&= \|x - y\|^2 - \overline{\beta}\langle x - y, u \rangle - \beta \langle u, x - y \rangle + |\beta|^2 \\
&= \|x - y\|^2 - \overline{\beta}\beta - \beta\overline{\beta} + |\beta|^2 = \|x - y\|^2 - |\beta|^2 \\
&< \|x - y\|^2,
\end{aligned}$$

与 y 是 M 中距 x 最近的假设矛盾.

于是若令 $z = x - y$, 则 $x = y + z$, $y \in M$, $z \in M^{\perp}$. 现在证明 x 的这种分解是唯一的. 事实上, 如果还有一个分解: $x = y' + z'$, $y' \in M$, $z' \in M^{\perp}$, 则得 $y - y' = z' - z$, 从而

$$\|y' - y\|^2 = \|z' - z\|^2 = \langle y' - y, z - z' \rangle = 0.$$

这正是说 $y' = y$, $z' = z$. □

定理 3.3.1 中的元 y 叫做 x 在 M 中投影, 记作 $y = Px$, P 叫做 H 到闭子空间 M 上的投影算子. 不难看出, P 是 H 中的有界线性算子, 并且 $P^2 = P$.

定理 3.3.1 的结果可叙述成如下形式: 对于 Hilbert 空间 H 中任意闭线性子空间 M, H 可表示成 M 和 $M^{\perp}$ 的直交和

$$H = M \oplus M^{\perp}.$$

$M^{\perp}$ 叫做 M 的直交补.

设 $\{e_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ 是 Hilbert 空间 H 中一列相互直交的单位向量

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}, \quad \forall i, j \in \mathbb{N}.$$

这样的序列叫做直交规范组. 对于任意 $x \in H$

$$\left\langle x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k, e_i \right\rangle = \langle x, e_i \rangle - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle \delta_{ik} = 0, \quad \forall 1 \leqslant i \leqslant n.$$

因此 $\left(x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k\right) \perp e_i$, $\forall i = 1, 2, \cdots, n$. 若记 M 为由 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 张成的 n 维线性子空间, 则 $x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \in M^{\perp}$. 由此可见, $x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k$ 恰是 x 在 M 中离 x 最近的元, 即 x 在 M 中的投影.

定理 3.3.2 (Bessel 不等式) 设 $\{e_k\}$ 为 Hilbert 空间中一直交规范组. 那么对于任意 $x \in H$, 有

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2 \leqslant \|x\|^2, \quad \forall n \geqslant 1. \tag{3.3.1}$$

证明 对任意自然数 n, 经直接计算可得

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \left\langle x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k, x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \right\rangle \\ &= \|x\|^2 - 2\sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i \rangle|^2 + \sum_{i,k=1}^{n} \langle x, e_i \rangle \overline{\langle x, e_k \rangle} \delta_{ik} \\ &= \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i \rangle|^2, \end{aligned} \tag{3.3.2}$$

由此即得

$$\sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 \leqslant \|x\|^2, \quad \forall n \geqslant 1.$$

在上式中让 $n \to \infty$ 就得到式 (3.3.1). □

一般来说, 有可能式 (3.3.1) 是真不等式, 但若式 (3.3.1) 是等式, 则根据式 (3.3.2), 有

$$\lim_{n\to\infty} \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \right\| = 0.$$

这就是说, 如下无穷级数按 H 的范数收敛到 x

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle e_k. \tag{3.3.3}$$

反过来, 由式 (3.3.2) 可见, 从式 (3.3.3) 也能推出式 (3.3.1) 成为等式.

如果一直交规范组 $\{e_k\}$ 使得每一个 $x \in H$ 都能表示成式 (3.3.3) 的形式, 则称 $\{e_k\}$ 是 H 的一直交规范基. 这时式 (3.3.3) 叫做 x 按直交基 $\{e_k\}$ 的 Fourier 展开, 而 $\langle x, e_k \rangle$ 则叫做 x 按直交基 $\{e_k\}$ 的 Fourier 系数.

从式 (3.3.3) 可见, 若 $\{e_k\}$ 是 H 的直交基, 则

$$\langle x, e_k \rangle = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N} \Longrightarrow x = 0. \tag{3.3.4}$$

反过来, 若有一元 $x \in H$, $x \neq 0$, 使得 $\langle x, e_k \rangle = 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$, 那么式 (3.3.1) 不能成为等式, 从而式 (3.3.3) 对于 x 不成立. 因此 $\{e_k\}$ 不是 H 的直交基. 这就是说, 式 (3.3.4) 是直交组 $\{e_k\}$ 成为 H 的直交基的充分必要条件.

例 3.3.5 空间 $L^2(0,2\pi)$ 中三角函数. 令

$$e_k(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-ikt},\quad k\in\mathbb{Z},$$

其中 $\mathbb{Z}$ 表示所有整数组成的集合. 那么 $\{e_k\,|\,k\in\mathbb{Z}\}$ 是 $L^2(0,2\pi)$ 的直交规范基.

之所以将上式称为三角函数, 是由于 De Morgan 公式

$$\mathrm{e}^{i\theta}=\cos(\theta)+i\sin(\theta),\quad \theta\in\mathbb{R}.$$

□

例 3.3.6 空间 ℓ^2 的直交规范基. 设 e_k 为 ℓ^2 中第 k 个分量为 1 而其余分量都为 0 的元, 那么 $\{e_k\,|\,k\in\mathbb{N}\}$ 是 ℓ^2 的直交规范基. □

显然, 具有可数直交规范基的 Hilbert 空间必定是可分的. 一个自然的问题是, 是否每个可分 Hilbert 空间都存在可数的直交规范基呢? 答案是肯定的. 我们有如下定理.

定理 3.3.3 每个可分 Hilbert 空间 H 都具有可数直交规范基.

证明 我们仅给出证明的大体思路. 设 $\{x_k\,|\,k\in\mathbb{N}\}$ 是 H 中一可数稠子集, 我们可利用归纳法构造 $\{x_k\,|\,k\in\mathbb{N}\}$ 的子集 $G=\{y_1,y_2,\cdots\}$, 使得 G 中任何有限个向量是线性无关的, 并且每个 x_n 是 G 中有限个元的线性组合. 这样, 由 G 张成的闭线性子空间 $\overline{\mathrm{span}\,G}=H$.

然后在 G 的基础上, 利用 Schmidt 直交化程序构造 H 的一组直交规范基. 对于每个 $n\in\mathbb{N}$, 记 $H_n=\mathrm{span}\{y_1,\cdots,y_n\}$, P_n 为 H 到 H_n 上的投影算子. 我们用归纳法来构造 e_k.

令 $e_1=\|y_1\|^{-1}y_1$, 则 $\mathrm{span}\,\{e_1\}=H_1$. 假定已找到直交组 $\{e_1,\cdots,e_n\}$, 使得 $H_m=\mathrm{span}\{e_1,\cdots,e_m\}, \forall m\leqslant n$. 注意 $y_{n+1}\notin H_n$, 因为否则 $y_1,\cdots,y_{n+1}$ 就线性相关了. 于是根据直交分解定理, $y_{n+1}-P_ny_{n+1}\in H_n^{\perp}$. 令 $e_{n+1}=\|y_{n+1}-P_ny_{n+1}\|^{-1}(y_{n+1}-P_ny_{n+1})$, 则显然有 $\mathrm{span}\,\{e_k\,|\,1\leqslant k\leqslant n+1\}=H_{n+1}$. 若 H 为有限维空间, 则上述过程在有限步后停止, 从而得到有限个元构成的直交规范组; 否则这一过程会无限进行下去, 得到一列直交规范组 $\{e_k\,|\,k\in\mathbb{N}\}$, 使得 $\mathrm{span}\,\{e_1,\cdots,e_n\}=H_n$, $\forall n\in\mathbb{N}$, 并且 $\overline{\mathrm{span}\,\{e_k\,|\,k\in\mathbb{N}\}}=H$. □

3.4 有界线性算子

在有穷维线性空间理论中, 空间之间的线性变换, 其在空间基底下的表现形式就是矩阵, 这是线性代数理论研究的中心内容之一. 同样在无穷维 Banach 空间理论中, 空间之间的变换, 通常称为映射或算子, 则是泛函分析中研究的中心内容之一. 本节介绍赋范线性空间中有界线性算子的定义和基本性质.

定义 3.4.1 设 X 和 Y 是同一数域 $\mathbb{K}$ 上的两个线性赋范空间, 今后为记号简单起见, 两个空间中的范数, 在不致引起混淆的情形下, 都将记作 $\|\cdot\|$. 设 D 是 X 中一线性

子空间, 由 D 到 Y 的映射 T, 记作 $T: D \to Y$, D 叫做 T 的定义域, 记作 $\mathcal{D}(T)$, 而集合 $\mathcal{R}(T) = \{Tx \mid x \in \mathcal{D}(T)\}$ 则叫做 T 的值域.

(1) T 称为线性算子, 如果它满足

$$T(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha T x_1 + \beta T x_2, \quad \forall x_1, x_2 \in D(T), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}.$$

(2) 设 $x_0 \in D(T)$, 如果对任意收敛于 x_0 的点列 $\{x_n\} \subset D(T)$, 有 $Tx_n \to Tx_0$, 则称 T 在 x_0 处连续; 而如果 T 在 $D(T)$ 的每一点处连续, 则称 T 是连续算子.

(3) 如果对于任意有界子集 $B \subset D$, 像集 $TB = \{Tx \mid x \in B\}$ 是 Y 中有界集, 则称 T 是有界算子.

定理 3.4.1　设 X 和 Y 是同一数域 $\mathbb{K}$ 上的两个线性赋范空间, D 是 X 中一线性子空间, $T: D \to Y$ 为线性算子, 那么

(1) T 有界的充要条件是存在正常数 μ, 使得

$$\|Tx\| \leqslant \mu \|x\|, \quad \forall x \in D; \tag{3.4.1}$$

(2) T 在 D 上连续的充要条件是 T 在 D 的某一点 x_0 上连续;

(3) T 为有界算子的充要条件是 T 为连续算子.

证明　(1) 充分性显然. 今用反证法证明必要性. 设 T 有界, 但不存在常数 $\mu \geqslant 0$ 使得式 (3.4.1) 成立. 于是对于每一 n, 必存在 $x_n \in D$, 使得

$$\|Tx_n\| > n\|x_n\|.$$

令 $z_n = \|x_n\|^{-1} x_n$. 由于 D 是线性子空间, 故 $z_n \in D$, 并且 $\|z_n\| = 1$, $n = 1, 2, \cdots$. 但 $\|Tz_n\| > n$, $n = 1, 2, \cdots$, 这与 T 的有界性矛盾, 因此式 (3.4.1) 成立.

(2) 只需证充分性. 设 T 在某点 x_0 连续. 今任取 $x \in D$, 并设 $\{x_n\} \subset D$, $x_n \to x$, 从而 $x_n - x + x_0 \to x_0$. 于是由 T 在 x_0 连续, 可知 $Tx_n - Tx + Tx_0 \to Tx_0$, 即得 $Tx_n \to Tx$. 由于 $x \in D$ 的任意性, 故得证 T 在 D 上连续.

(3) 根据 (1), 必要性显然. 下面用反证法证明充分性. 设 T 连续但无界, 于是对于每一自然数 n, 存在 $x_n \in D$, 使得

$$\|Tx_n\| > n\|x_n\|.$$

显然 $x_n \neq 0$. 令 $z_n = (n\|x_n\|)^{-1} x_n$, 则 $\|z_n\| = \frac{1}{n}$, 从而 $z_n \to 0$. 但 $\|Tz_n\| > 1$, 这与 T 的连续性矛盾, 故 T 有界. □

定义 3.4.2　设 X 和 Y 是同一数域 $\mathbb{K}$ 上的两个线性赋范空间, D 是 X 中一线性子空间, $T: D \to Y$ 为有界线性算子. 令

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| \mid x \in D, \|x\| \leqslant 1\},$$

称 $\|T\|$ 为线性算子 T 的范数.

定理 3.4.2 设 X 和 Y 是同一数域 $\mathbb{K}$ 上的两个线性赋范空间, D 是 X 中一线性子空间, $T: D \to Y$ 为线性算子, 那么

(1) $\|Tx\| \leqslant \|T\|\|x\|, \ \forall x \in D$;

(2) $\|T\| = \sup\{\|Tx\| \mid x \in D, \|x\| = 1\} = \sup\{\|Tx\|/\|x\| \mid x \in D, x \neq 0\}$;

(3) $\|T\| = \inf\{\mu \geqslant 0 \mid \|Tx\| \leqslant \mu\|x\|, \forall x \in D\}$.

证明 (1) 任取 $x \in D$, $x \neq 0$, 令 $y = \|x\|^{-1}x$, 则 $\|y\| = 1$, 从而依据算子范数定义有 $\|Ty\| \leqslant \|T\|$, 由此即得 $\|Tx\| \leqslant \|T\|\,\|x\|, \forall x \in D$.

(2) 显然 $\sup\{\|Tx\| \mid x \in D, \|x\| = 1\} \leqslant \sup\{\|Tx\| \mid x \in D, \|x\| \leqslant 1\}$. 另一方面, 对于任意 $x \in D$, $x \neq 0$, $\|x\| \leqslant 1$, 令 $y = \|x\|^{-1}x$, 则 $\|y\| = 1$. 于是, 由于 $\|x\|^{-1} \geqslant 1$, 故 $\|Tx\| \leqslant \|Tx\|\|x\|^{-1} = \|Ty\| \leqslant \sup\{\|Tz\| \mid z \in D, \|z\| = 1\}$. 因此 $\sup\{\|Tx\| \mid x \in D, \|x\| = 1\} = \|T\|$. 至于 (2) 中的第二等号成立是显然的.

(3) 如果 $\mu \geqslant 0$ 满足 $\|Tx\| \leqslant \mu\|x\|, \forall x \in D$, 则 $\|Tx\|/\|x\| \leqslant \mu, \forall x \in D$. 因此根据 (1), $\|T\| \leqslant \mu$, 由此从 (1) 即得 (3) 成立. □

例 3.4.1 恒等算子和零算子. 设 X 是赋范线性空间, 令 $id_X(x) = x, \forall x \in X$, 则 id_X 称为 X 中的恒等算子, 而若令 $\theta x = 0, \forall x \in X$, 则称 θ 为 X 中的零算子. 如无混淆, id_X 简记作 I. 显然 I 和 θ 都是 X 中的有界线性算子, 并且 $\|I\| = 1$, $\|\theta\| = 0$. □

例 3.4.2 设 $\mathbb{R}^n$ 中向量 x 表示成列向量形式: $x = (\xi_1, \cdots, \xi_n)^{\mathrm{T}}$, 设 $A = (a_{ij})$ 为 $n \times n$ 方阵, 则 A 可以看成 $\mathbb{R}^n$ 中算子: $Ax = y$ 是指 A 把 $x = (\xi_1, \cdots, \xi_n)^{\mathrm{T}}$ 变换成 $y = (\eta_1, \cdots, \eta_n)^{\mathrm{T}}$, 其中

$$\eta_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_j, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

按照矩阵的运算法则, 容易看出 A 是 $\mathbb{R}^n$ 中的线性算子. 设在 $\mathbb{R}^n$ 中赋以欧氏范数. 于是根据 Cauchy 不等式, 有

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \eta_i^2\right)^{1/2} \leqslant \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2\right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^{n} \xi_j^2\right)^{1/2},$$

即

$$\|Ax\| \leqslant \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2\right)^{1/2} \|x\|, \ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

从而 A 是 $\mathbb{R}^n$ 中一有界线性算子, 并且

$$\|A\| \leqslant \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2\right)^{1/2}.$$

□

例 3.4.3 $[0,1]$ 上连续函数空间 $C[0,1]$ 中赋以范数 $\|x\|_0=\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|x(t)|$; 而 $[0,1]$ 上连续可微函数空间 $C^1[0,1]$ 中赋以范数 $\|x\|_1=\|x\|_0+\|x'\|_0$, 这里 x' 表示函数 x 的微商. 容易验证 $C^1[0,1]$ 也是一 Banach 空间. 定义 $C^1[0,1]$ 到 $C[0,1]$ 的微分算子 $T=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ 为

$$(Tx)(t)=\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t},\ \ \forall x\in C^1[0,1].$$

显然, T 是 $C^1[0,1]$ 到 $C[0,1]$ 的线性算子, 并且

$$\|Tx\|_0=\|x'\|_0\leqslant\|x'\|_0+\|x\|_0=\|x\|_1,\quad\forall x\in C^1[0,1].$$

因此 T 是 $C^1[0,1]$ 到 $C[0,1]$ 的有界线性算子, 并且 $\|T\|\leqslant 1$.

但是, 若把微分算子 T 看成 $C[0,1]$ 到 $C[0,1]$ 的线性算子, 其定义域 D 是 $C[0,1]$ 中连续可微函数全体构成的一个线性子空间, 那么 T 不是有界算子. 事实上, 设 $x_n(t)=\mathrm{e}^{-nt}$, 则 $\{x_n\,|\,n\geqslant 1\}\subset D$, 并且 $\frac{\mathrm{d}x_n(t)}{\mathrm{d}t}=-nx_n(t)$, $\|x_n\|=1$, $n=1,2,\cdots$. 于是 $M=\{x_n\,|\,n\geqslant 1\}\subset D$ 是 $C[0,1]$ 中的有界集, 而 $TM=\{Tx_n\,|\,n\geqslant 1\}=\{-nx_n\,|\,n\geqslant 1\}$ 则是 $C[0,1]$ 中的无界集, 因此 T 是 $C[0,1]$ 中的无界算子. □

例 3.4.4 设在 Banach 空间 $C[0,1]$ 中定义积分算子 T 如下

$$(Tx)(t)=\int_0^1 K(t,s)x(s)\mathrm{d}s,\quad\forall x\in C[0,1],$$

其中积分核 $K(t,s)$ 是 $[0,1]\times[0,1]$ 上的连续函数. 显然 T 是 $C[0,1]$ 中的线性算子. 我们有

$$\|Tx\|=\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\left|\int_0^1 K(t,s)x(s)\mathrm{d}s\right|\leqslant\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\int_0^1|K(t,s)|\mathrm{d}s\|x\|,\ \forall x\in C[0,1].$$

因此 T 是 $C[0,1]$ 中的有界线性算子, 并且

$$\|T\|\leqslant\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\int_0^1|K(t,s)|\mathrm{d}s.$$

□

3.5 有界线性泛函和伴随算子

有界线性泛函是一种特殊的有界线性算子, 其值域空间为数域 $\mathbb{K}$. 下面介绍的 Hahn-Banach 延拓定理在泛函分析的理论和应用中起着十分重要的作用.

定理 3.5.1 (Hahn-Banach 定理) 设 X_0 为赋范线性空间 X 的一线性子空间, f_0 是 X_0 上的一有界线性泛函, 那么存在定义在全空间 X 上的有界线性泛函 f, 使得

(1) $f(x)=f_0(x),\forall x\in X_0$;

(2) $\|f\|=\|f_0\|_{X_0}$, 这里 $\|f_0\|_{X_0}$ 表示 f_0 在 X_0 上的范数.

定理是说, 定义在一子空间上的有界线性泛函可以保范地延拓到全空间. 该定理的证明比较复杂, 这里从略, 有兴趣的读者可参阅文献 [18, 40] 等.

无论在理论上还是应用上, 有界线性泛函的存在性是一个重要的问题. 下一定理是说, 任意赋范线性空间上不仅存在有界线性泛函, 而且还“足够多”. 为了简单起见, 我们用 X^* 表示赋范线性空间 X 上所有有界线性泛函组成的集合.

推论 3.5.1 (1) 每个赋范线性空间 X 上有“足够多”的有界线性泛函, 更确切地说, 对于每个 $x_0 \in X$, $x_0 \neq 0$, 必有定义在全 X 上的有界线性泛函 f, 即 $f \in X^*$, 使得 $f(x_0) = \|x_0\|$, 并且 $\|f\| = 1$.

(2) 对于给定的元 $x_0 \in X$, 如果 $f(x_0) = 0$, $\forall f \in X^*$, 则 $x_0 = 0$.

证明 令 $X_0 = \{\alpha x_0 \,|\, \alpha \in \mathbb{K}\}$, 即 X_0 是由 x_0 张成的一维线性子空间. 在 X_0 上定义线性泛函 $f_0(\alpha x_0) = \alpha\|x_0\|$, 于是 $f_0(x_0) = \|x_0\|$, 并且易见 $\|f_0\| = 1$. 现在利用 Hahn-Banach 延拓定理, 把 f_0 保范地延拓成全空间 X 上的有界线性泛函 f, 显然 f 满足推论中 (1) 的要求. (2) 是 (1) 的直接结果. □

注意推论中第二个结论实质上描述了 X 上有界线性泛函“足够多”的含义: X 上有界线性泛函足够多, 多到可以区分 X 中的元, 即对于给定的 $x, y \in X$, 若 $f(x) = f(y)$, $\forall f \in X^*$, 则必 $x = y$.

推论 3.5.2 设 X 为赋范线性空间, 则对于每个 $x \in X$, 有

$$\|x\| = \sup\{|f(x)| \,|\, f \in X^*, \|f\| = 1\}.$$

证明 依线性泛函范数的定义, 若 $f \in X^*$, $\|f\| = 1$, 则有

$$|f(x)| \leqslant \|f\|\,\|x\| = \|x\|.$$

因此 $\sup\{|f(x)| \,|\, f \in X^*, \|f\| = 1\} \leqslant \|x\|$. 另一方面, 根据推论 3.5.1, 存在 $f \in X^*$, 使得 $\|f\| = 1$, $f(x) = \|x\|$, 从而所要结论成立. □

推论 3.5.3 设 X_0 为赋范线性空间 X 的线性子空间. 若 $x_1 \in X$ 到 X_0 的距离大于零, 即

$$d(x_1, X_0) = \inf\{\|x_1 - y\| \,|\, y \in X_0\} = h > 0,$$

则必有 $f \in X^*$, 使得 $\|f\| = 1$, 且 $f(y) = 0$, $\forall y \in X_0$.

证明 设 X_1 是由 x_1 和 X_0 张成的线性子空间

$$X_1 = \{\alpha x_1 + y \,|\, \alpha \in \mathbb{K}, y \in X_0\}.$$

X_1 中的元 $x = \alpha x_1 + y$ 由 α 和 y 唯一确定. 事实上, 对于 $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $y, z \in X_0$, 若 $\alpha x_1 + y = \beta x_1 + z$, 则 $(\alpha - \beta)x_1 = z - y \in X_0$. 由此可见, 只能有 $\alpha = \beta$, $y = z$, 否则 $x_1 \in X_0$, 导致矛盾. 于是可以在 X_1 上定义线性泛函 f_1

$$f_1(\alpha x_1 + y) = \alpha h, \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall y \in X_0.$$

显然 $f_1(x_1)=h$, 并且 $f_1(y)=0, \forall y\in X_0$. 另一方面, 对于 $\alpha\in\mathbb{K}$,

$$\|\alpha x_1+y\|=|\alpha|\|x_1-(-\alpha^{-1}y)\|\geqslant|\alpha|h, \quad \forall y\in X_0.$$

从而

$$|f_1(\alpha x_1+y)|=|\alpha|h\leqslant\|\alpha x_1+y\|,$$

即 f_1 是 X_1 上的有界线性泛函, 并且 $\|f_1\|_{X_1}\leqslant 1$. 从 h 的定义, 我们可取 $y_n\in X_0$, 使得 $\|y_n-x_1\|\to h$. 于是

$$|f_1(y_n-x_1)|=|f_1(x_1)|=h\leqslant\|f_1\|_{X_1}\|y_n-x_1\|.$$

在上式中让 $n\to\infty$, 得到 $\|f_1\|_{X_1}\geqslant 1$. 于是我们有 $\|f_1\|_{X_1}=1$. 最后, 利用定理 3.5.1, 将 f_1 保范延拓到全 X 上, 即得所要的 $f\in X^*$. □

现在我们在有界线性泛函集 X^* 中引入加法和数乘法如下

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x), \quad \forall f,g\in X^*, \forall x\in X,$$

$$(\alpha f)(x)=\overline{\alpha}f(x), \quad \forall f\in X^*, \forall\alpha\in\mathbb{K}, \forall x\in X.$$

这样 X^* 成为一线性空间, 并且在线性泛函范数下构成一 Banach 空间. 有时为了方便起见, 往往把线性泛函 f 在点 x 的值记作

$$f(x)=\langle x,f\rangle.$$

于是 $\langle x,f\rangle$ 具有类似 "内积" 的一些性质 (关于内积, 见 3.3 节)

$$\langle\alpha x,f\rangle=\alpha\langle x,f\rangle, \quad \langle x,\alpha f\rangle=\overline{\alpha}\langle x,f\rangle.$$

这也是在定义 X^* 中数乘法式时不用 $(\alpha f)(x)=\alpha f(x)$ 的原因之一.

X^* 叫做 X 的对偶空间, 也称 X 的共轭空间. X^* 作为 Banach 空间也有自己的对偶空间 $(X^*)^*=X^{**}$, 叫做 X 的第二对偶空间. X^{**} 当然也是一个 Banach 空间.

对于 $x\in X$, 定义 X^* 上的泛函

$$\varphi_x(f)=\overline{f(x)}, \quad \forall f\in X^*.$$

不难验证, φ_x 是 X^* 上的线性泛函, 并且

$$|\varphi_x(f)|\leqslant\|f\|\,\|x\|,$$

从而 $\varphi_x\in X^{**}$. 根据推论 3.5.2, $\|\varphi_x\|=\|x\|$.

现在定义映射 $T:X\to X^{**}$ 为 $Tx=\varphi_x$. 对于任意 $x,y\in X, \forall\alpha,\beta\in\mathbb{K}$, 有

$$\begin{aligned}\varphi_{\alpha x+\beta y}(f)&=\overline{f(\alpha x+\beta y)}=\overline{\alpha f(x)}+\overline{\beta f(x)}\\&=(\alpha\varphi_x)(f)+(\beta\varphi_y)(f), \quad \forall f\in X^*,\end{aligned}$$

从而 T 是线性映射. 此外, T 还是一一的, 因为 $\varphi_x=\varphi_y\Longrightarrow f(x)=f(y), \forall f\in X^*$, 从而依据推论 3.5.1, $x=y$.

定义 3.5.1 两个赋范线性空间 X 和 Y 叫做等价的, 是指存在 X 到 Y 上的一一线性映射 T, 并且 T 还是等距的: $\|Tx\| = \|x\|, \forall x \in X$. 这时 T 叫做由 X 到 Y 上的等价映射.

上面的分析证明了如下定理.

定理 3.5.2 设 X 是一赋范线性空间, 则 X 必等价于 X^{**} 的一个线性子空间. 如果 X 是完备的, 则 X 等价于 X^{**} 的一个闭线性子空间.

这个定理常常表达成 $X \subset X^{**}$. 当 X 与 X^{**} 等价时, 称 X 是自反的, 记作 $X = X^{**}$. 自反空间显然必定是一 Banach 空间.

下面给出对偶空间的一些例子.

例 3.5.1 序列空间 ℓ^p $(1 < p < \infty)$ 上的有界线性泛函. 设 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. 为简单起见, 我们考虑实 ℓ^p 空间, 即其中每个元的分量都是实数. 任取 $y = \{\eta_n\} \in \ell^q$, 定义 ℓ^p 上的线性泛函 f

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \eta_n, \quad \forall x = \{\xi_n\} \in \ell^p. \tag{3.5.1}$$

根据引理 3.2.2 (Hölder 不等式), $|f(x)| \leqslant \|x\|_p \|y\|_q$, 这里 $\|x\|_p$ 和 $\|y\|_q$ 分别表示 ℓ^p 和 ℓ^q 范数. 因此 $f \in (\ell^p)^*$, 并且 $\|f\| \leqslant \|y\|_q$. 下面证对于任意 $f \in (\ell^p)^*$, 必有 $y = \{\eta_n\} \in \ell^q$, 使得 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \eta_n, \forall x = \{\xi_n\} \in \ell^p$.

为此, 令 $e_n = \{\delta_{nk} \mid k \geqslant 1\}$, 这里当 $k = n$ 时 $\delta_{nk} = 1$, 而当 $k \neq n$ 时 $\delta_{nk} = 0$. 不难看出, x 可表成 $x = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n e_n$. 令 $\eta_n = f(e_n)$, 则由 f 的线性和连续性可知

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n f(e_n) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \eta_n.$$

记 $y = \{\eta_n\}$, 显然 y 由 f 唯一确定. 今证 $y \in \ell^q$. 事实上, 令 $z_n = \{\xi_k^{(n)}\}$, 其中

$$\xi_k^{(n)} = \begin{cases} |\eta_k|^{q-1} \operatorname{sgn} \eta_k, & 若\ k \leqslant n, \\ 0, & 若\ k > n, \end{cases}$$

sgn 为符号函数: 当 $\xi > 0$ 时 $\operatorname{sgn} \xi = 1$, 当 $\xi = 0$ 时 $\operatorname{sgn} \xi = 0$, 而当 $\xi < 0$ 时 $\operatorname{sgn} \xi = -1$. 于是

$$f(z_n) = \sum_{k=1}^{n} |\eta_k|^q \leqslant \|f\| \|z_n\|_p = \|f\| \left(\sum_{k=1}^{n} |\eta_k|^q \right)^{\frac{1}{p}},$$

即

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |\eta_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \|f\|.$$

让 $n \to \infty$, 得到

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\eta_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \|f\|.$$

因此 $y \in \ell^q$, 从而由 $\|f\| \leqslant \|y\|_q$ 可知 $\|f\| = \|y\|_q$. 这表明, 式 (3.5.1) 是 ℓ^p 上有界线性泛函的一般表达形式, 并且 $\|f\| = \|y\|_q$.

于是若定义映射 $T : (\ell^p)^* \to \ell^q$ 为 $Tf = y$, 则 T 是 $(\ell^p)^*$ 到 ℓ^q 上的等距线性一一映射. 因此, $(\ell^p)^*$ 与 ℓ^q 等价: $(\ell^p)^* = \ell^q$. 同理, $(\ell^q)^*$ 与 ℓ^p 等价, 因此 $(\ell^p)^{**}$ 与 ℓ^p 等价: $(\ell^p)^{**} = \ell^p$, 即 ℓ^p 是自反的. □

限于篇幅, 下面我们列出 $L^p(a, b)$ 上的有界线性泛函, 读者可参阅文献 [18, 40] 等.

例 3.5.2 函数空间 $L^p(a, b)$ $(1 < p < \infty)$ 上的有界线性泛函的一般形式是

$$f(x) = \int_a^b x(t)y(t)\mathrm{d}t, \quad \forall\, x \in L^p(a, b), \tag{3.5.2}$$

其中 $y \in L^q(a, b)$, $\|f\| = \|y\|_{L^q}$. $(L^p(a, b))^*$ 与 $L^q(a, b)$ 等价, $(L^p(a, b))^{**}$ 与 $L^p(a, b)$ 等价, 从而 $(L^p(a, b))^{**} = L^p(a, b)$, 即 $L^p(a, b)$ 是自反的. □

下一个定理刻画出 Hilbert 空间上的有界线性泛函.

定理 3.5.3 (Riesz 表现定理) 设 H 为 Hilbert 空间, $f \in H^*$, 则必有唯一元 $y \in H$, 使得

$$f(x) = \langle x, y\rangle, \quad \forall\, x \in H, . \tag{3.5.3}$$

并且 $\|f\| = \|y\|$.

证明 若 $f = 0$, 则取 $y = 0$ 即可. 因此不妨设 $f \neq 0$. 由于 f 连续, 故 f 的零空间 $\mathcal{N}(f)$ 是 H 中一闭子空间. 于是 H 有直交分解: $H = \mathcal{N}(f) \oplus \mathcal{N}(f)^{\perp}$. 今取 $z \in \mathcal{N}(f)^{\perp}$, $\|z\| = 1$. 显然 $f(z) \neq 0$. 对于任意 $x \in H$, 由于 $f(x - f(x)f(z)^{-1}z) = 0$, 故 $x - f(x)f(z)^{-1}z \in \mathcal{N}(f)$. 于是 $\langle x - f(x)f(z)^{-1}z, z\rangle = 0$,即

$$f(x) = f(z)\langle x, z\rangle.$$

令 $y = \overline{f(z)}z$, 即得式 (3.5.3). 从式 (3.5.3) 得到 $|f(x)| \leqslant \|y\|\,\|x\|$, $\forall\, x \in H$. 因此 $\|f\| \leqslant \|y\|$. 由 $|f(y)|\,\|y\|^{-1} = \|y\|$, 可知 $\|f\| = \|y\|$.

现在假定另有一元 $w \in H$, 使得 $f(x) = \langle x, w\rangle$, $\forall\, x \in H$. 于是 $\langle x, y - w\rangle = 0$, $\forall\, x \in H$, 从而 $w = y$. □

定义 3.5.2 赋范线性空间 X 中的序列 $\{x_n\}$ 叫做弱收敛于 $x_0 \in X$, 如果它满足

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0), \quad \forall\, f \in X^*;$$

X^* 中序列 $\{f_n\}$ 叫做弱 * 收敛于 $f_0 \in X^*$, 如果它满足

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f_0(x), \quad \forall\, x \in X.$$

赋范线性空间 X 中序列 $\{x_n\}$ 通常的收敛是指 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-x_0\|=0$, 有时也称为强收敛. 显然, 强收敛隐含弱收敛.

根据 Riesz 表现定理, Hilbert 空间 H 中序列 $\{x_n\}$ 弱收敛于 $x_0\in H$ 等价于

$$\lim_{n\to\infty}\langle x,x_n\rangle=\langle x,x_0\rangle,\quad \forall x\in H.$$

例 3.5.3　设 $\{e_n\}$ 为 Hilbert 空间 H 中直交规范基, 那么 $\{e_n\}$ 弱收敛于零元. 事实上, 根据 $\{e_n\}$ 是直交规范基的性质, 有

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\langle x,e_n\rangle|^2=\|x\|^2,\quad \forall x\in H.$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}\langle x,e_n\rangle=0,\ \ \forall x\in H,$$

这正是说 $\{e_n\}$ 弱收敛于零元. 另一方面, 由于 $\|e_n\|=1$, 故 $\{e_n\}$ 不可能强收敛于 0.　□

在定理 3.5.3 中若记 $Tf=y$, 则不难验证 T 是 H^* 到 H 之上的线性一一等距满射, 从而 H^* 与 H 等价: $H=H^*$. 这正是说 Hilbert 空间是自对偶空间.

下面我们介绍线性算子的伴随算子概念. 首先从有界线性算子的伴随说起. 设 X 和 Y 为两个赋范线性空间, $T\in\mathcal{L}(X,Y)$. 对于每个 $g\in Y^*$, 令

$$f(x)=g(Tx)=\langle Tx,g\rangle,\quad \forall x\in X,$$

显然 f 是 X 上的线性泛函. 由于 $|f(x)|\leqslant\|g\|\,\|Tx\|, \forall x\in X$, 故 $f\in X^*$, 并且 f 由 g 唯一确定, 记作 $f=T^*g$. 容易验证 T^* 是 Y^* 到 X^* 的线性算子, 称为 T 的伴随算子, 有时也简称伴随. 注意 T^* 的定义可写成

$$\langle Tx,g\rangle=\langle x,T^*g\rangle,\quad \forall x\in X,\ g\in Y^*,$$

于是 $\|T^*g\|\leqslant\|T\|\,\|g\|$, 从而 T^* 是有界算子, 并且 $\|T^*\|\leqslant\|T\|$.

定理 3.5.4　设 X,Y,Z 是同一数域 $\mathbb{K}$ 上的三个赋范数线性空间, $T,T_1,T_2\in\mathcal{L}(X,Y)$, $S\in\mathcal{L}(Y,Z)$, $\alpha,\beta\in\mathbb{K}$. 那么

(1) $T^*\in\mathcal{L}(Y^*,X^*)$, 并且 $\|T^*\|=\|T\|$;

(2) $(\alpha T_1+\beta T_2)^*=\overline{\alpha}T_1^*+\overline{\beta}T_2^*$;

(3) $(ST)^*=T^*S^*$;

(4) 若 T 可逆, 并且 $T^{-1}\in\mathcal{L}(Y,X)$, 则 T^* 也可逆, 并且 $(T^*)^{-1}\in\mathcal{L}(X^*,Y^*)$, $(T^*)^{-1}=(T^{-1})^*$.

证明　这里我们仅证 (1) 和 (4). 为证 (1), 根据上面的分析, 只需证明 $\|T\|\leqslant\|T^*\|$. 事实上, 对于 $x\in X$, 且 $Tx\neq 0$, 由推论 3.5.1, 存在 $g_0\in Y^*$, 使得 $\|g_0\|=1, \langle Tx,g_0\rangle=\|Tx\|$. 从而

$$\|Tx\|=\langle Tx,g_0\rangle=\langle x,T^*g_0\rangle\leqslant\|T^*\|\,\|x\|.$$

显然, 当 $Tx=0$ 时上述不等式也成立. 但上式表明 $\|T\| \leqslant \|T^*\|$.

(4) 记 $I_X, I_Y, I_{X^*}, I_{Y^*}$ 分别表示 X, Y, X^*, Y^* 中的恒定算子. 不难验证 $(I_X)^* = I_{X^*}, (I_Y)^* = I_{Y^*}$. 于是由 (3) 推出

$$I_{Y^*} = (TT^{-1})^* = (T^{-1})^* T^*,$$

$$I_{X^*} = (T^{-1}T)^* = T^*(T^{-1})^*.$$

由此即得 $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$. □

现在对线性算子 T 既不作有界的假定, 也不作定义在全空间 X 上的假定. 仿照有界算子情形, 如果 T 的伴随算子 T^* 存在, 则它是 Y^* 到 X^* 的线性算子. 对于 $g \in \mathcal{D}(T^*)$, 要求 $f(x) = \langle Tx, g\rangle$ 是 $x \in \mathcal{D}(T)$ 的连续线性泛函. 根据定理 3.5.1, 若 $\mathcal{D}(T)$ 在 X 中稠, 则 f 可唯一地延拓成 X 上的有界线性泛函, 仍记作 f, 并且 $T^*g = f$. 这里为了延拓的唯一性, $\mathcal{D}(T)$ 在 X 中稠是必需的.

因此, 在讨论 T 的伴随算子时总是假定 T 是稠定的, 即 $\mathcal{D}(T)$ 在 X 中稠. 依定义, T 的伴随 T^* 由下式唯一确定

$$\langle Tx, g\rangle = \langle x, T^*g\rangle, \quad \forall\, x \in \mathcal{D}(T),\ g \in \mathcal{D}(T^*),$$

$$\mathcal{D}(T^*) = \{g \in Y^* \mid \langle x, T^*g\rangle \text{ 在 } \mathcal{D}(T) \text{ 上连续}\}.$$

定义 3.5.3 设 X 和 Y 是同一数域 $\mathbb{K}$ 上的两个赋范线性空间, 称线性算子 $T: \mathcal{D}(T) \subset X \to Y$ 是闭的, 指它满足: 如果 $\{x_n\} \subset \mathcal{D}(T)$, $x_n \to x_0$, 且 $Tx_n \to y_0$, 那么 $x_0 \in \mathcal{D}(T)$, 并且 $y_0 = Tx_0$.

在乘积空间 $X \times Y = \{[x,y] \mid x \in X, y \in Y\}$ 中引入自然的线性运算

$$\alpha[x_1, y_1] + \beta[x_2, y_2] = [\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2],$$

则 $X \times Y$ 形成一线性空间. 令

$$\|[x,y]\| = \|x\|_1 + \|y\|_2, \quad \forall\, x \in X, y \in Y,$$

其中 $\|x\|_1$ 和 $\|y\|_2$ 各表示 X 和 Y 中的范数. 容易验证, $\|[x,y]\|$ 是 $X \times Y$ 中的范数, 从而 $X \times Y$ 也是一个赋范线性空间. 如果 X 和 Y 是完备的, 则 $X \times Y$ 是 Banach 空间.

$X \times Y$ 中子集

$$G(T) = \{\,[x, Tx] \mid x \in \mathcal{D}(T)\},$$

$$G'(T) = \{\,[Tx, x] \mid x \in \mathcal{D}(T)\},$$

分别称为线性算子 T 的图像和反图像. 称线性算子 $T: \mathcal{D}(T) \subset X \to Y$ 是线性算子 $S: \mathcal{D}(S) \subset X \to Y$ 的延拓, 是指 $G(S) \subset G(T)$, 即 $\mathcal{D}(S) \subset \mathcal{D}(T)$, 并且 $x \in \mathcal{D}(S) \Longrightarrow Tx = Sx$.

容易看出, 为了线性算子 $T: \mathcal{D}(T) \subset X \to Y$ 是闭的, 必须且只需 $G(T)$ 是乘积空间 $X \times Y$ 中的闭集.

由于 Hilbert 空间是自对偶的, Hilbert 空间之间的线性算子的伴随算子不必在其对偶空间上定义, 直接在 Hilbert 空间中定义就可以了. 设 X 到 Y 为两个 Hilbert 空间, T 为 X 到 Y 的稠定线性算子. 伴随算子 T^* 由下式确定

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle, \quad \forall\, x \in \mathcal{D}(T),\ y \in \mathcal{D}(T^*).$$

因此, 伴随 T^* 是 Y 到 X 的线性算子.

设 X 和 Y 是两个内积空间. 在乘积空间 $X \times Y$ 中定义内积

$$\langle [x_1, y_1], [x_2, y_2]\rangle = \langle x_1, x_2\rangle + \langle y_1, y_2\rangle, \quad \forall [x_1, y_1], [x_2, y_2] \in X \times Y,$$

则 $X \times Y$ 成为新的 Hilbert 空间. 在上式中, 空间 X, Y 和 $X \times Y$ 中的内积采用了同一记号而不致混淆.

引理 3.5.1 设 X, Y 是同一数域 $\mathbb{K}$ 上的两个 Hilbert 空间, T 是 X 到 Y 的稠定线性算子, 那么 $G(T^*) = G'(-T)^{\perp}$.

证明 任取 $y \in \mathcal{D}(T^*)$, 则

$$\langle [y, T^*y], [-Tx, x]\rangle = \langle T^*y, x\rangle - \langle y, Tx\rangle = 0, \quad \forall\, x \in \mathcal{D}(T).$$

因此, $G(T^*) \perp G'(-T)$, 即 $G(T^*) \subset G'(-T)^{\perp}$. 为证反包含, 任取 $[y, z] \in G'(-T)^{\perp}$, 则

$$0 = \langle [-Tx, x], [y, z]\rangle = -\langle Tx, y\rangle + \langle x, z\rangle, \quad \forall\, x \in \mathcal{D}(T),$$

即 $\langle Tx, y\rangle = \langle x, z\rangle$, $\forall\, x \in \mathcal{D}(T)$. 从而 $y \in \mathcal{D}(T^*)$, 并且 $z = T^*y$. 因此, $[y, z] \in G(T^*)$, 即 $G'(-T)^{\perp} \subset G(T^*)$, 证毕. □

一般说来, T^* 的定义域未必是稠定的, 甚至有可能 $\mathcal{D}(T^*) = \{0\}$. 但我们有

定理 3.5.5 设 X, Y 是同一数域 $\mathbb{K}$ 上的两个 Hilbert 空间, T 是 X 到 Y 的稠定线性算子, 那么

(1) T^* 是闭线性算子;

(2) 若 T 还是闭的, 则 T^* 必定是稠定的, 并且 $T^{**} = T$.

证明 (1) 是引理 3.5.1 中 $G(T^*) = G'(-T)^{\perp}$ 的直接结果. 下面证明 (2). 根据引理 3.5.1, $G'(-T) = \overline{G'(-T)} = G(T^*)^{\perp}$, 这是因为 $G(T)$ 闭等价于 $G'(-T)$ 闭. 如果 $\mathcal{D}(T^*)$ 在 Y 中不稠, 则存在一非零元 $y_0 \in Y$, 使得 $y_0 \perp \mathcal{D}(T^*)$, 即 $\langle y_0, y\rangle = 0, \forall \mathcal{D}(T^*)$. 于是

$$\langle [y_0, 0], [y, T^*y]\rangle = \langle y_0, y\rangle + \langle 0, T^*y\rangle = 0, \quad \forall\, y \in \mathcal{D}(T^*),$$

即 $[y_0, 0] \in G(T^*)^{\perp} = G'(-T)$. 从而 $-T0 = y_0$, 这不可能. 因此 $\mathcal{D}(T^*)$ 在 Y 中稠.

下面证明 $T = T^{**}$. 由于 T^* 也是稠定的, 故 T^{**} 存在. 于是从伴随算子的定义

$$\langle T^*y, x\rangle = \langle y, Tx\rangle, \quad \forall\, y \in \mathcal{D}(T^*),\ x \in \mathcal{D}(T),$$

可以得到 $G(T^*) = G'(-T)^{\perp}$ 和 $G(T) = G'(-T^*)^{\perp}$. 于是 $G(T^{**}) = G'(-T^*)^{\perp} = G(T)$. 因此 $T = T^{**}$. □

定理 3.5.5 的结论实际上对于自反 Banach 空间也成立, 这里我们不作详细叙述.

设 T 是 Hilbert 空间 X 中的稠定线性算子. 如果 $T \subset T^*$, 则称 T 为对称算子; 而当 $T = T^*$ 时, 则称 T 为 X 中的自伴算子. 注意 Hilbert 空间中的自伴算子必定是闭的.

例 3.5.4　设 $X = \mathbb{K}^n$ 为 n 维 Hilbert 空间, $\mathbb{K}^n$ 中的元表示成列向量形式: $x = [\xi_1, \cdots, \xi_n]^{\mathrm{T}}$. 设 e_k 表示第 k 个分量为 1 而其余分量为 0 的向量. 于是 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 是 $\mathbb{K}^n$ 上的一组规范直交基. x 可表示成 $x = \xi_1 e_1 + \cdots + \xi_n e_n$. 设 $A \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$, $Ae_k = a_{1k}e_1 + \cdots + a_{nk}e_n$, $k = 1, \cdots, n$. 于是

$$Ax = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{kj}\xi_j\right) e_k.$$

由此可见, A 可以表示成矩阵形式: $A = (a_{kj})$.

任取 $x = [\xi_1, \cdots, \xi_n]^{\mathrm{T}}$, $y = [\eta_1, \cdots, \eta_n]^{\mathrm{T}}$, 于是

$$\langle Ax, y\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_j\overline{\eta}_i = \langle x, A^*y\rangle,$$

其中 $A^* = (a^*_{ij})$, 而 $a^*_{ij} = \overline{a}_{ji}$. 这就是说, A 的伴随算子恰好是矩阵 A 的共轭转置. □

例 3.5.5　设 T 是 $L^2(a,b)$ 中的积分算子

$$(Tx)(t) = \int_a^b K(s,t)x(t)\,\mathrm{d}t, \quad \forall\, x \in L^2(a,b),\ s \in [a,b],$$

其中 $K(s,t)$ 是 $[a,b]\times[a,b]$ 上的连续函数. 任取 $x, y \in L^2(a,b)$, 有

$$\langle Tx, y\rangle = \int_a^b\int_a^b K(s,t)x(t)\overline{y}(s)\mathrm{d}t\mathrm{d}s = \langle x, T^*y\rangle,$$

其中

$$(T^*y)(t) = \int_a^b \overline{K(s,t)}y(s)\mathrm{d}s, \quad t \in [a,b].$$

因此 T^* 也是一积分算子. 特别地, 当 $K(s,t) = \overline{K(t,s)}$ 时, $T^* = T$, 即 T 为自伴的. □

例 3.5.6　设 $\{\lambda_n\}$ 是一严格递增的正数列, 并且 $\lambda_n \to \infty\ (n \to \infty)$. 在 Hilbert 空间 ℓ^2 中定义线性算子 A 如下

$$Ax = \{\lambda_n\xi_n\}, \quad \forall\, x = \{\xi_n\} \in \mathcal{D}(A),$$

$$\mathcal{D}(A) = \{x = \{\xi_n\} \mid \{\lambda_n\xi_n\} \in \ell^2\}.$$

今证 A 是 ℓ^2 中的自伴算子. 事实上, 由于有限个分量非零而其余分量都为 0 的元属于 $\mathcal{D}(A)$, 但这样的元全体显然是稠的, 从而 A 是稠定的.

今证 A 的闭性. 设 $x=\{\xi_k^{(n)}\}\in\mathcal{D}(A)$, $x_n\to x=\{\xi_k\}$, 并且 $Ax_n\to y=\{\eta_k\}$. 于是任给 $\varepsilon>0$, 存在自然数 $N_1=N_1(\varepsilon)$, 使得当 $n\geqslant N_1$ 时

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\lambda_k\xi_k^{(n)}-\eta_k|^2<\varepsilon,\quad \sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k^{(n)}-\xi_k|^2<\varepsilon.$$

由此直接可得 $\xi^{(n)}\to\xi_k$, $\forall k\in\mathbb{N}$, 并且对于任意自然数 N_2, 有

$$\sum_{k=1}^{N_2}|\lambda_k\xi_k^{(n)}-\eta_k|^2<\varepsilon,\quad \sum_{k=1}^{N_2}|\xi_k^{(n)}-\xi_k|^2<\varepsilon,\ \forall n\geqslant N_1.$$

上式中让 $n\to\infty$, 得到

$$\sum_{k=1}^{N_2}|\lambda_k\xi_k-\eta_k|^2\leqslant\varepsilon,\quad \forall N_2\in\mathbb{N}.$$

然后再令 $N_2\to\infty$, 即得 $\{\lambda_k\xi_k-\eta_k\}\in\ell^2$. 因此 $\{\lambda_k\xi_k\}\in\ell^2$. 从而 $\{\xi_k\}\in\mathcal{D}(A)$. 又上式中的 $\varepsilon>0$ 是任意的, 因此 $\{\lambda_k\xi_k=\eta_k\}$, 即 $Ax=y$. 这样就证明了 A 是闭的. 由于诸 λ_k 是实的, A 的自伴性是明显的, 读者可作为练习补足证明. □

3.6 线性算子的基本理论

本节介绍的关于线性算子的开映射定理、闭图像定理、一致有界性定理 (共鸣定理) 与 3.5 节中的关于有界线性泛函的 Hahn-Banach 延拓定理一起, 在理论上奠定了泛函分析的基础.

设 X,Y 是同一数域 $\mathbb{K}$ 上的两个赋范线性空间. 从全空间 X 到 Y 的有界线性算子全体记作 $\mathcal{L}(X,Y)$. 当 $X=Y$ 时, 简记 $\mathcal{L}(X)=\mathcal{L}(X,Y)$, 并称由 X 到 X 的线性算子为 X 中的线性算子. 在 $\mathcal{L}(X,Y)$ 中定义线性运算加法和数乘如下: $\forall T,S\in\mathcal{L}(X,Y)$, $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{K}$,

$$(\alpha T+\beta S)(x)=\alpha Tx+\beta Sx,\ \ \forall x\in X.$$

容易验证 $\alpha T+\beta S\in\mathcal{L}(X,Y)$, 从而 $\mathcal{L}(X,Y)$ 是 $\mathbb{K}$ 上的一个线性空间. 对于 $T\in\mathcal{L}(X,Y)$, 今证定义 3.4.2 所给出的算子范数 $\|T\|$ 确实是这个线性空间上的一个范数. 事实上, $\|T\|\geqslant 0$, 并且零算子 θ 的范数是 0; 反之, 若 $\|T\|=0$, 则 $\forall x\in X$, 有 $\|Tx\|\leqslant\|T\|\,\|x\|=0$, 即 $Tx=0$, $\forall x\in X$, 从而 T 是零算子. 这表明范数属性 (1) 成立. 此外

$$\begin{aligned}\|\alpha T\|&=\sup_{x\in X,\|x\|=1}\|\alpha Tx\|=|\alpha|\sup_{x\in X,\|x\|=1}\|Tx\|\\&=|\alpha|\,\|T\|,\ \forall T\in\mathcal{L}(X,Y),\ \forall\alpha\in\mathbb{K},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|T+S\|&=\sup_{x\in X,\|x\|=1}\|(T+S)x\|\leqslant\sup_{x\in X,\|x\|=1}\|Tx\|+\sup_{x\in X,\|x\|=1}\|Sx\|\\&=\|T\|+\|S\|,\ \forall T,S\in\mathcal{L}(X,Y).\end{aligned}$$

因此范数属性 (2) 和 (3) 也成立. 这样, $\mathcal{L}(X,Y)$ 是一赋范线性空间.

设 $\{T_n\}$ 为 $\mathcal{L}(X,Y)$ 中一序列, $T_n \to T \in \mathcal{L}(X,Y)$, 则称算子列 $\{T_n\}$ 按算子范数收敛于 T, 或称算子列 $\{T_n\}$ 一致收敛于 T. 如果对于任意 $x \in X$, $T_n x \to Tx$, 则称 $\{T_n\}$ 强收敛于 T, 有时也称 $\{T_n\}$ 点点收敛于 T.

从 $\|T_n x - Tx\| \leqslant \|T_n - T\|\,\|x\|$ 可知, 若 $\{T_n\}$ 一致收敛于 T, 则 $\{T_n\}$ 也强收敛于 T. 但反之则未必成立.

定理 3.6.1 设 X 是一赋范线性空间, Y 是一 Banach 空间, 则 $\mathcal{L}(X,Y)$ 是一 Banach 空间.

证明 设 $\{T_n\}$ 是 $\mathcal{L}(X,Y)$ 中一基本列. 于是对于任意 $x \in X$, 由于 $\|T_m x - T_n x\| \leqslant \|T_m - T_n\|\,\|x\|$, 故 $\{T_n x\}$ 是 Y 中的基本列. 但假设 Y 是完备的, 所以 $\{T_n x\}$ 在 Y 中收敛. 于是可以定义 X 到 Y 的算子 T

$$Tx = \lim_{n\to\infty} T_n x, \quad \forall x \in X.$$

对于任意 $x, z \in X$ 和 $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, 有

$$T(\alpha x + \beta z) = \lim_{n\to\infty} T_n(\alpha x + \beta z) = \alpha \lim_{n\to\infty} T_n x + \beta \lim_{n\to\infty} T_n z = \alpha Tx + \beta Tz.$$

因此 T 是一线性算子.

下面证明 $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. 事实上, 从 $|\|T_n\| - \|T_m\|| \leqslant \|T_n - T_m\|$ 可知 $\{\|T_n\|\}$ 是 $\mathbb{R}$ 中的收敛数列. 从而存在 $\mu \geqslant 0$ 使得 $\|T_n\| \leqslant \mu$, $\forall n \geqslant 1$. 于是

$$\|T_n x\| \leqslant \|T_n\|\,\|x\|, \quad \forall x \in X, \forall n \geqslant 1.$$

让 $n \to \infty$, 即得 $\|Tx\| \leqslant \mu\|x\|$, $\forall x \in X$, 从而 T 是有界算子.

最后证明 $\|T_n - T\| \to 0$. 事实上, 由于 $\{T_n\}$ 是基本列, 故对于任给的 $\varepsilon > 0$, 存在自然数 N, 使得 $\|T_m - T_n\| < \varepsilon$, $\forall m, n > N$. 于是

$$\|T_m x - T_n x\| < \varepsilon, \quad \forall m, n > N, \forall x \in X, \|x\| = 1.$$

在上式中任意固定一 $n > N$, 让 $m \to \infty$, 得到

$$\|T_n x - Tx\| \leqslant \varepsilon, \quad \forall x \in X, \|x\| = 1.$$

由此即得

$$\|T_n - T\| = \sup_{x \in X, \|x\|=1} \|T_n x - Tx\| \leqslant \varepsilon, \quad \forall n > N.$$

这正是说 $\{T_n\}$ 一致收敛于 T. □

设 X 和 Y 为两个集合, 映射 $T: X \to Y$ 称为满射, 如果其值域 $\mathcal{R}(T) = Y$, 即对于任意 $y \in Y$, 都存在 $x \in X$ 使得 $Tx = y$; $T: X \to Y$ 称为一一映射, 是指当 $x_1, x_2 \in X$

满足 $Tx_1 = Tx_2$, 则必有 $x_1 = x_2$. 于是若 $T: X \to Y$ 是一个一一满射, 则 T 有定义在全 Y 上的逆映射 T^{-1}, 即对于每一 $y \in Y$, 有唯一元 $x = T^{-1}y \in X$, 使得 $Tx = y$.

显然, 若映射 $T: X \to Y$ 的逆存在, 并且其定义域是整个 Y, 则 $(T^{-1})^{-1} = T$. 此外, 若 $A: X \to Y$ 和 $B: Y \to X$ 分别具有定义在整个 Y 和 X 上的逆映射 A^{-1} 和 B^{-1}, 那么乘积映射 $AB: X \to X$ 有定义在全 X 上的逆映射 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

设 X 和 Y 是同一数域 $\mathbb{K}$ 上的两个线性空间, $T: X \to Y$ 为线性算子. 若 T 是一一映射, 则 T^{-1} 也是线性算子, 其定义域是 $\mathcal{R}(T)$. 事实上, 设 $y_1, y_2 \in \mathcal{R}(T)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, 则存在 $x_1, x_2 \in X$, 使得 $Tx_1 = y_1$, $Tx_2 = y_2$. 于是

$$
\begin{aligned}
T^{-1}(\alpha y_1 + \beta y_2) &= T^{-1}(\alpha Tx_1 + \beta Tx_2) = T^{-1}T(\alpha x_1 + \beta x_2) \\
&= \alpha x_1 + \beta x_2 = \alpha T^{-1}y_1 + \beta T^{-1}y_2.
\end{aligned}
$$

定理 3.6.2 设 X 和 Y 是同一数域 $\mathbb{K}$ 上的两个赋范线性空间, $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, 则 T^{-1} 存在且有界的充要条件是, 存在常数 $\mu > 0$ 使得

$$
\|Tx\| \geqslant \mu\|x\|, \quad \forall x \in X. \tag{3.6.1}
$$

证明 先证充分性. 设式 (3.6.1) 成立. 于是若 $Tx = 0$, 则 $x = 0$, 从而 T 是一一映射, 因此 T 可逆. 对 $y \in \mathcal{R}(T)$, 令 $x = T^{-1}y$, 从式 (3.6.1) 得到

$$
\|T^{-1}y\| \leqslant \mu^{-1}\|y\|, \quad \forall y \in \mathcal{R}(T).
$$

这正是说 T^{-1} 有界. 必要性类似可证. □

定理 3.6.3 设 X 是赋范线性空间, Y 是 Banach 空间, $T: \mathcal{D}(T) \subset X \to Y$ 是一连续线性算子. 如果 $\mathcal{D}(T)$ 在 X 中稠, 那么 T 能唯一地延拓到整个 X 上成为定义在 X 上的有界线性算子 S (这样的延拓叫做按连续性延拓), 而且 $\|S\| = \|T\|$.

证明 任取 $x \in X$, 由于 $\mathcal{D}(T)$ 在 X 中稠, 必存在序列 $\{x_n\} \subset \mathcal{D}(T)$, 使得 $x_n \to x$. 从 T 连续可知存在常数 $\mu > 0$, 使得 $\|Tx\| \leqslant \mu\|x\|$, $\forall x \in \mathcal{D}(T)$. 于是 $\|Tx_m - Tx_n\| \leqslant \mu\|x_m - x_n\|$, 从而 $\{Tx_n\}$ 是 Y 中的基本列. 但假设 Y 是完备的, 故 $\{Tx_n\}$ 在 Y 中有极限 y, 而且不难看出极限 y 仅与 x 有关, 而与 $\mathcal{D}(T)$ 中收敛到 x 的特定的序列 $\{x_n\}$ 无关. 因此我们可以记 $y = Sx$. 容易验证 S 是线性的, $\mathcal{D}(S) = X$, 并且当 $x \in \mathcal{D}(T)$ 时 $Sx = Tx$. 至于 S 的有界性和保范性 $\|S\| = \|T\|$ 是直接的, 读者可作为练习. □

下面, 为强调赋范空间 X 中的开球 $B_\varepsilon(x)$ 与 X 有关, 也将其记作 $B_X(x, \varepsilon)$.

定理 3.6.4 (开映射定理) 设 X 和 Y 是两个 Banach 空间, $T: \mathcal{D}(T) \subset X \to Y$ 是一闭线性算子, 并且 T 的值域 $\mathcal{R}(T) = Y$. 那么对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, 使得 $B_Y(0, \delta) \subset T(\mathcal{D}(T) \cap \overline{B}(0, \varepsilon))$, 即对于每个 $y \in Y$, $\|y\| < \delta$, 必有 $x \in \mathcal{D}(T)$, $\|x\| \leqslant \varepsilon$, 使得 $y = Tx$.

这个定理的证明要用到纲推理, 比较复杂, 这里从略, 读者可参阅相关参考书, 如文献 [18, 40].

定理 3.6.5 (Banach 逆算子定理) 设 X 和 Y 是两个 Banach 空间, 并设 $T:\mathcal{D}(T)\subset X\to Y$ 是闭的一一线性算子, 并且是满射的, 即 $\mathcal{R}(T)=Y$. 那么 T 的逆算子 T^{-1} 有界, 即 $T^{-1}\in\mathcal{L}(X,Y)$.

证明 依开映射定理, 存在常数 $\delta>0$, 使得 $B_Y(0,\delta)\subset T\left(\mathcal{D}(T)\cap\overline{B}_X(0,1)\right)$. 由此推出 $T^{-1}B_Y(0,\delta)\subset\mathcal{D}(T)\cap\overline{B}_X(0,1)$, 即

$$\|T^{-1}y\|\leqslant 1,\quad \forall y\in Y, \|y\|\leqslant\delta.$$

由此可见 T^{-1} 有界, 并且 $\|T^{-1}\|\leqslant\delta^{-1}$. □

定理 3.6.6 (闭图像定理) 设 X 和 Y 是两个 Banach 空间, T 是 X 到 Y 的闭线性算子, 并且 $\mathcal{D}(T)=X$, 那么 T 是有界线性算子.

证明 从 T 的闭性可知 T 的图像 $G(T)$ 是 $X\times Y$ 中闭线性子空间, 从而 $G(T)$ 本身也是一个 Banach 空间. 定义线性算子 $S:G(T)\to X$ 为

$$S[x,Tx]=x,\quad \forall\,[x,Tx]\in G(T).$$

于是

$$\|S[x,Tx]\|=\|x\|\leqslant\|x\|+\|Tx\|=\|[x,Tx]\|,\quad \forall\,[x,Tx]\in G(T).$$

因此 $S:G(T)\to X$ 是有界线性算子, 并且 $\mathcal{R}(S)=X$. 容易验证 S 还是一一的, 于是根据定理 3.6.5, S^{-1} 是有界线性算子, 从而

$$\|[x,Tx]\|=\|S^{-1}x\|\leqslant\|S^{-1}\|\,\|x\|,\quad \forall x\in X.$$

由此即得

$$\|Tx\|\leqslant\|S^{-1}\|\,\|x\|,\quad \forall x\in X,$$

即 T 是有界线性算子. □

定理 3.6.7 (一致有界性定理或共鸣定理) 设 X 和 Y 是两个 Banach 空间, $G\subset\mathcal{L}(X,Y)$. 假定 $\sup\{\|Tx\|\,|\,T\in G\}<\infty, \forall x\in X$, 则存在常数 $\mu>0$, 使得 $\sup\{\|T\|\,|\,T\in G\}\leqslant\mu$.

证明 定义

$$\|x\|_G=\|x\|+\sup\{\|Tx\|\,|\,T\in G\},\quad \forall x\in X.$$

容易验证, $\|\cdot\|_G$ 是 X 的一范数. 今证 $X_G=(X,\|\cdot\|_G)$ 也是一 Banach 空间. 事实上, 设 $\{x_n\}\subset X_G$ 是一基本列, 即

$$\|x_m-x_n\|_G=\|x_m-x_n\|+\sup_{T\in G}\|Tx_m-Tx_n\|\to 0\ (m,n\to\infty).$$

于是存在 $x \in X$, 使得 $\|x_n - x\| \to 0$. 另一方面, 从上式可见对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, 使得

$$\sup_{T \in G} \|Tx_m - Tx_n\| < \varepsilon/2, \ \forall m, n \geqslant N,$$

由此得 $\sup\{\|Tx_n - Tx\| \mid T \in G\} \leqslant \varepsilon, \forall n \geqslant N$. 于是

$$\|x_n - x\|_G = \|x_n - x\| + \sup_{T \in G} \|Tx_n - Tx\| \to 0,$$

从而 X_G 是 Banach 空间.

注意 $\|x\| \leqslant \|x\|_G$. 今定义线性算子 $J : X_G \to X$ 为 $Jx = x, \forall x \in X_G$. 由于 $\|Jx\| = \|x\| \leqslant \|x\|_G, \forall x \in X_G$, 故 $J \in \mathcal{L}(X_G, X)$. 此外, 显然 J 是满射. 因此根据 Banach 逆算子定理, $J^{-1} \in \mathcal{L}(X, X_G)$. 从而存在常数 $\mu > 0$, 使得

$$\|x\|_G = \|x\| + \sup_{T \in G}\{\|Tx\| \mid T \in G\} \leqslant \mu\|x\|, \ \ \forall x \in X.$$

由此即得所需结论. □

定理 3.6.8 (Banach-Steinhaus 定理) 设 X 和 Y 是两个 Banach 空间, M 为 X 的稠子集. 设 $T_n, T \in \mathcal{L}(X, Y)$, $n \in \mathbb{N}$. 那么 T_n 强收敛于 T 的充分必要条件是

(1) $\|T_n\|$ 一致有界;

(2) $\lim\limits_{n \to \infty} T_n x = Tx, \forall x \in M$.

证明 必要性由共鸣定理直接推出, 今证充分性. 设 $\|T_n\| \leqslant \mu, \forall n \in \mathbb{N}$. 任意取定 $x \in X$, 对于任给 $\varepsilon > 0$, 取 $y \in M$ 使得

$$\|x - y\| < \frac{\varepsilon}{2(\mu + \|T\|)}.$$

再取 $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ 充分大, 使得

$$\|T_n y - Ty\| < \varepsilon/2, \ \ \forall n \geqslant N.$$

于是当 $n \geqslant N$ 时, 有

$$\begin{aligned}\|T_n x - Tx\| &\leqslant \|T_n x - T_n y\| + \|T_n y - Ty\| + \|Ty - Tx\| \\ &\leqslant \mu\|x - y\| + \varepsilon/2 + \|T\|\,\|x - y\| < \varepsilon,\end{aligned}$$

从而 $T_n x \to Tx, \forall x \in X$. □

3.7 有界线性算子的正则集和谱集

定义 3.7.1 设 X 为复 Banach 空间, $T\in\mathcal{L}(X)$, I 是 X 中的恒等算子.

(1) 称 $\lambda\in\mathbb{C}$ 为 T 的正则点, 是指 $\lambda I-T$ 可逆, 并且 $(\lambda I-T)^{-1}\in\mathcal{L}(X)$; T 的正则点全体记作 $\rho(T)$, 叫做 T 的正则集; 而 $R(\lambda;T)=(\lambda I-T)^{-1}$ 叫做 T 的预解式.

(2) $\sigma(T)=\mathbb{C}\setminus\rho(T)$ 叫做 T 的谱集; 谱集可分解成互不相交的 3 部分:

- 点谱 $\sigma_p(T)=\{\lambda\in\sigma(T)\,|\,\lambda I-T \text{ 不可逆}\}$;
- 连续谱 $\sigma_c(T)=\{\lambda\in\sigma(T)\,|\,\lambda I-T \text{ 可逆}, \overline{\mathcal{R}(\lambda I-T)}=X\}$;
- 剩余谱 $\sigma_r(T)=\{\lambda\in\sigma(T)\,|\,\lambda I-T \text{ 可逆}, \overline{\mathcal{R}(\lambda I-T)}\neq X\}$.

从上述定义可见, 复平面可以分解成几个互不相交的集合之并

$$\mathbb{C}=\rho(T)\cup\sigma(T)=\rho(T)\cup\sigma_p(T)\cup\sigma_c(T)\cup\sigma_r(T).$$

$\lambda\in\sigma_p(T)$ 称为 T 的本征值 (也称特征值), 这时必有非零 $x\in X$ 使得 $Tx=\lambda x$, x 称为 T 的与 λ 相应的本征向量或本征元 (也称特征向量或特征元). 注意, 若 $\lambda I-T$ 可逆, 但 $\mathcal{R}(\lambda I-T)=X$, 则依据 Banach 逆算子定理 3.6.5, $(\lambda I-T)^{-1}\in\mathcal{L}(X)$, 从而 $\lambda\in\rho(T)$. 因此, 当 $\lambda\in\sigma(T)$ 时, 只可能或者 $\lambda I-T$ 不可逆, 或者 $\lambda I-T$ 可逆, 但 $\mathcal{R}(\lambda I-T)\neq X$.

引理 3.7.1 设 X 为 Banach 空间, $T\in\mathcal{L}(X)$, I 是 X 中的恒等算子. 假定 $\|T\|<1$, 则 $1\in\rho(T)$, 并且

$$(I-T)^{-1}=\sum_{k=1}^{\infty}T^k, \tag{3.7.1}$$

$$\|(I-T)^{-1}\|\leqslant(1-\|T\|)^{-1}. \tag{3.7.2}$$

证明 由于 $\sum_{k=0}^{\infty}\|T^k\|\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}\|T\|^k<\infty$, 于是级数 $\sum_{n=0}^{\infty}T^n$ 也按算子范数收敛于某个 $S\in\mathcal{L}(X)$. 今证 $S=(I-T)^{-1}$. 事实上, 令 $S_n=\sum_{k=0}^{n}T^k$, 则

$$(I-T)S_n=I-T^{n+1}=S_n(I-T).$$

显然, T^{n+1} 按算子范数收敛于零算子, 从而在上式中让 $n\to\infty$, 有 $(I-T)S=I=S(I-T)$. 上式表明 $I-T$ 可逆, $S=(I-T)^{-1}$, 并且式 (3.7.1) 成立. 由此可得

$$\|(I-T)^{-1}\|\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}\|T\|^k=\frac{1}{1-\|T\|}.$$

□

引理 3.7.2 设 X 为 Banach 空间, $T,S\in\mathcal{L}(X)$. 设 T 可逆, 并且 $T^{-1}\in\mathcal{L}(X)$. 如果 $\|S\|<\|T^{-1}\|^{-1}$, 则 $T+S$ 也可逆, $(T+S)^{-1}\in\mathcal{L}(X)$, 并且

$$(T+S)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(T^{-1}S)^nT^{-1}.$$

证明 注意到 $T+S=T(I+T^{-1}S)$, 并且 $\|T^{-1}S\| \leqslant \|T^{-1}\|\,\|S\|<1$, 所需结论从引理 3.7.1 直接得到. □

定理 3.7.1 设 X 为 Banach 空间, $T \in \mathcal{L}(X)$. 那么

(1) 当 $|\lambda|>\|T\|$ 时, $\lambda \in \rho(T)$, 并且

$$R(\lambda;T)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{T^n}{\lambda^{n+1}},$$

$$\|R(\lambda;T)\| \leqslant (|\lambda|-\|T\|)^{-1}.$$

(2) 设 $\lambda \in \rho(T)$, 则当 $\mu \in \mathbb{C}$, $|\mu|<\|R(\lambda;T)\|^{-1}$ 时, $\lambda+\mu \in \rho(T)$, 并且 $R(\lambda+\mu;T)$ 可展开成

$$R(\lambda+\mu;T)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\mu^n R(\lambda;T)^{n+1}.$$

(3) $\rho(T)$ 是复平面中的开集, 而 $\sigma(T)$ 是有界闭集.

证明 (1) 注意当 $|\lambda|>\|T\|$ 时, $\|\lambda^{-1}T\|<1$, 于是 (1) 是引理 3.7.1 的直接结论.

(2) 注意 $(\lambda+\mu)I-T=(\lambda I-T)+\mu I$. 由于 $R(\lambda;T)\in\mathcal{L}(X)$, 所需结论从引理 3.7.2 得到.

(3) 从 (2) 可知 $\rho(T)$ 是开集, 从而 $\sigma(T)$ 是有界闭集. □

下面列出定理 3.7.2 和定理 3.7.3, 略去证明. 有兴趣的读者可查阅文献 [18, 40] 等.

定理 3.7.2 设 X 为 Banach 空间, 则对任意 $T\in\mathcal{L}(X)$, $\sigma(T)\neq\varnothing$.

定义 3.7.2 设 X 为 Banach 空间, $T\in\mathcal{L}(X)$, 那么称 $r(T)=\sup\{|\lambda|\,|\,\lambda\in\sigma(T)\}$ 为 T 的谱半径.

定理 3.7.3 设 X 为 Banach 空间, $T\in\mathcal{L}(X)$, 那么

$$r(T)=\lim_{n\to\infty}\|T^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

3.8 紧算子的谱理论

Banach 空间中重要的一类算子是所谓的紧算子类, 它最接近有限维空间中的线性变换, 在数学发展中它是由积分算子发展而来的. 首先给出紧算子的定义及其基本性质.

定义 3.8.1 设 X, Y 为两个 Banach 空间, $T: X\to Y$ 为线性算子, $\mathcal{D}(T)=X$. T 称为紧算子, 如果 T 把 X 中的每个有界集映成 Y 中的相对列紧子集. X 到 Y 的所有紧算子组成的集合记作 $\mathcal{K}(X,Y)$, 并且当 $X=Y$ 时, 简记 $\mathcal{K}(X)=\mathcal{K}(X,Y)$.

注意 Banach 空间中相对列紧子集是有界的, 故紧算子必定是有界的, 从而 $\mathcal{K}(X,Y)\subset\mathcal{L}(X,Y)$. 由定义看出, T 是紧算子当且仅当对于 X 中任意有界点列 $\{x_n\}$, $\{Tx_n\}$ 恒有收敛子列.

对于 $T\in\mathcal{L}(X,Y)$, 当 $\mathcal{R}(T)$ 是有限维子空间时, 称 T 为有限秩算子.

例 3.8.1 有限秩算子 $T\in\mathcal{L}(X,Y)$ 必定是紧算子. □

例 3.8.2 无限维 Banach 空间中的恒等算子不可能是紧的, 这是因为 I 把 X 中的单位球映成 X 中单位球, 但我们知道无限维 Banach 空间中的单位球不是相对紧的. □

定理 3.8.1 设 X,Y 为两个 Banach 空间, 那么

(1) 若 $T,S\in\mathcal{K}(X,Y)$, $\lambda,\mu\in\mathbb{K}$, 则 $\lambda T+\mu S\in\mathcal{K}(X,Y)$;

(2) 若 $T\in\mathcal{K}(X)$, $S\in\mathcal{L}(X)$, 则 $TS,ST\in\mathcal{K}(X)$.

证明 留作练习. □

定理 3.8.2 设 X,Y 为 Banach 空间, 则 $\mathcal{K}(X,Y)$ 是 $\mathcal{L}(X,Y)$ 中一闭子空间.

证明 注意依定理 3.1.7, 在赋范空间中集合的相对紧性与全有界性是等价的. 设 $B_1=B(0,1)$ 是 X 中的闭单位球. 为证 T 的紧性, 只需证明 $T(B_1)$ 在 Y 中是全有界的. 设 $T_n,T\in\mathcal{K}(X,Y)$, $T_n\to T$ (按算子范数收敛), 于是对于任意 $\varepsilon>0$, 存在 $n\in\mathbb{N}$, 使得 $\|T_nx-Tx\|<\frac{\varepsilon}{3}$, $\forall x\in M$. 因为 $T_n(B_1)$ 是全有界的, 故存在有限个点 $x_1,\cdots,x_k\in B_1$, 使得

$$T_n(B_1)\subset\bigcup_{j=1}^{k}B\left(T_nx_j,\frac{\varepsilon}{3}\right).$$

于是对于任意给定的 $x\in B_1$, 必有某个 x_j 使得 $\|T_nx_j-T_nx\|<\frac{\varepsilon}{3}$. 因此

$$\begin{aligned}\|Tx-Tx_j\|&\leqslant\|Tx-T_nx\|+\|T_nx-T_nx_j\|+\|T_nx_j-Tx_j\|\\&\leqslant\frac{2}{3}\varepsilon+\|T_nx-T_nx_j\|<\varepsilon,\end{aligned}$$

这就是说 $\{Tx_1,\cdots,Tx_k\}$ 是 $T(B_1)$ 的有限 ε-网, 从而 $T(B_1)$ 是全有界的. □

例 3.8.3 考察 $L^2(a,b)$ 中的积分算子 K

$$(Kx)(t)=\int_a^b k(s,t)x(t)\mathrm{d}t,\quad\forall x\in L^2(a,b).$$

假定 $k\in L^2((a,b)\times(a,b))$, 则 K 是 $L^2(a,b)$ 中的紧线性算子. □

例 3.8.4 假定上例中积分核 $k\in C[a,b]$, 则 K 可以看作 $C[a,b]$ 中的线性算子. 利用 Arzela-Ascoli 定理 3.1.8, 可以证明 K 是 $C[a,b]$ 中的紧算子. □

定理 3.8.3 设 $T\in\mathcal{K}(X,Y)$, 那么 T 把 X 中的弱收敛列映成 Y 中的强收敛列.

证明 设 $\{x_n\} \subset X$, $x_n \rightharpoonup x$, 依共鸣定理, $\{x_n\}$ 有界. 于是由 T 的紧性, 存在子列 $\{x_{n_k}\}$, 使得 $Tx_{n_k} \to y$. 由此得到

$$\langle Tx_{n_k} - Tx, g\rangle = \langle x_{n_k} - x, T^*g\rangle \to 0, \quad \forall g \in Y^*,$$

从而 $Tx = y$. 因此, $Tx_{n_k} \to Tx$. 注意, 实际上我们证明了 $\{x_n\}$ 的每个子列都有一子子列 $\{x_{n_k}\}$, 使得 $Tx_{n_k} \to Tx$, 因此 $Tx_n \to Tx$. □

定理 3.8.4 设 $T \in \mathcal{K}(X, Y)$, 那么 $T^* \in \mathcal{K}(Y^*, X^*)$.

证明 设 B_1 和 M_1 分别是 X 和 Y^* 中的单位球. 为证 T^* 紧, 只需证明 $T^*(M_1)$ 是 X^* 中相对紧集. 对于 $g \in M_1$, 令 $\varphi_g(y) = \langle y, g\rangle$, $\forall y \in \overline{T(B_1)}$. 显然 $\varphi_g \in C(\overline{T(B_1)})$, 这里 $C(\overline{T(B_1)})$ 是紧集 $\overline{T(B_1)}$ 上的连续函数空间. 此外

$$\|\varphi_g\|_C = \sup_{y \in \overline{T(B_1)}} |\langle y, g\rangle| = \sup_{x \in B_1} |\langle x, T^*g\rangle| = \|T^*g\|.$$

因此, $\{\varphi_g \,|\, g \in M_1\}$ 在 $C(\overline{T(B_1)})$ 中相对紧与集合 $T^*(M_1)$ 在 Y^* 中相对紧是等同的. 下面我们证明 $\{\varphi_g \,|\, g \in M_1\}$ 在 $C(\overline{T(B_1)})$ 中相对紧. 我们有

$$|\varphi_g(y)| \leqslant \|g\|\,\|y\| \leqslant \|T\|, \quad \forall g \in M_1, \forall y \in \overline{T(B_1)},$$

$$|\varphi_g(y) - \varphi_g(z)| \leqslant \|g\|\,\|y - z\| \leqslant \|T\|, \quad \forall g \in M_1, \forall y, z \in \overline{T(B_1)},$$

这表明 $\{\varphi_g \,|\, g \in M_1\}$ 在 $C(\overline{T(B_1)})$ 中一致有界且等度连续, 由 Arzela-Acsoli 定理的推广形式, 可知 $\{\varphi_g \,|\, g \in M_1\}$ 在 $C(\overline{T(B_1)})$ 相对紧. □

定理 3.8.5 *设 $T \in \mathcal{K}(X)$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$, 那么值域 $\mathcal{R}(\lambda I - T)$ 和 $\mathcal{R}(\lambda I - T^*)$ 都是闭子空间.*

证明 由于 T^* 也是紧算子, 故只需证明 $\mathcal{R}(\lambda I - T)$ 闭就够了. 令 $S = \lambda I - T$. 设 $\{y_n\} \subset \mathcal{R}(S)$, $y_n \to y$. 我们要证 $y \in \mathcal{R}(S)$. 如果能证明存在一有界列 $\{x_n\} \subset X$, 使得 $y_n = Sx_n = (\lambda I - T)x_n$, 则存在子列 $\{x_{n_k}\}$, $\{Tx_{n_k}\}$ 收敛, 从而 $\{x_{n_k}\}$ 也收敛. 设 $x_{n_k} \to x$, 于是 $y = \lambda x - Tx \in \mathcal{R}(\lambda I - T)$.

因此只需证明存在一有界列 $\{x_n\} \subset X$, 使得 $y_n = Sx_n = (\lambda I - T)x_n$. 由于 $\{y_n\} \subset \mathcal{R}(S)$, 故存在 $\{z_n\} \subset X$, 使得 $y_n = Sz_n$, 但 $\{z_n\}$ 未必有界. 若 $\{u_n\} \subset \mathcal{N}(S)$, 则 $y_n = Sx_n$, 其中 $x_n = z_n - u_n$. 下面我们设法选择一列 $\{u_n\} \subset \mathcal{N}(S)$, 使得 $\{z_n - u_n\}$ 有界. 为此, 只需证明 $d(z_n) = \inf\{\|z_n - v\| \,|\, v \in \mathcal{N}(S)\}$ 对于 $n \in \mathbb{N}$ 有界就可以了. 设不然, $d(z_n)$ 无界, 不妨假定 $d(z_n) \to \infty$. 令 $\widetilde{z}_n = z_n / d(z_n)$, 则易见 $d(\widetilde{z}_n) = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, 这里对于任意 $u \in X$, $d(u) = \inf\{\|u - v\| \,|\, v \in \mathcal{N}(S)\}$. 从而存在一列 $\{u_n\} \subset \mathcal{N}(S)$, 使得 $\|\widetilde{z}_n - u_n\| \leqslant 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$. 令 $v_n = \widetilde{z}_n - u_n$, 则 $\{v_n\}$ 有界. 由于 T 紧, 不妨设 $\{Tv_n\}$ 收敛 (否则用子列代替). 又

$$\lambda v_n - Sv_n = S\widetilde{z}_n = Sz_n / d(z_n) = y_n / d(z_n) \to 0.$$

因此 $\{v_n\}$ 收敛于某个极限 v. 于是 $\lambda v - Tv = 0$, 即 $v \in \mathcal{N}(S)$. 由此得出矛盾

$$0 = d(v) = \lim_{n\to\infty} d(v_n) = \lim_{n\to\infty} d(\widetilde{z}_n) = 1.$$

□

类似于 Hilbert 空间的直交补, 对于 Banach 空间 X, 设 $M \subset X$, $N \subset X^*$, 集合

$$M^{\perp} = \{f \in X^* \mid \langle x, f\rangle = 0, \forall x \in M\},$$

$${}^{\perp}N = \{x \in X \mid \langle x, f\rangle = 0, \forall f \in N\}$$

分别称为 M 和 N 的直交补. 显然 $M^{\perp}$ 和 ${}^{\perp}N$ 分别是 X^* 和 X 中的闭线性子空间, 并且 $(\operatorname{span} M)^{\perp} = M^{\perp}$, ${}^{\perp}(\operatorname{span} N) = {}^{\perp}N$.

定理 3.8.6 设 $T \in \mathcal{K}(X)$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$, 那么

(1) $\mathcal{R}(\lambda I - T) = {}^{\perp}\mathcal{N}(\overline{\lambda} I - T^*)$;

(2) $\mathcal{R}(\overline{\lambda} I - T^*) = \mathcal{N}(\lambda I - T)^{\perp}$.

证明 为记号简单起见, 记 $A = \lambda I - T$, 于是 $A^* = \overline{\lambda} I - T^*$.

(1) 我们有

$$\langle Ax, f\rangle = \langle x, A^* f\rangle = 0, \quad \forall x \in X, \forall f \in \mathcal{N}(A^*).$$

这表明 $\overline{\mathcal{R}(A)} \subset {}^{\perp}\mathcal{N}(A^*)$. 今若有 $y \in {}^{\perp}\mathcal{N}(A^*) \setminus \overline{\mathcal{R}(A)}$, 则从推论 3.5.3, 存在 $f \in X^*$, $f(y) = \langle y, f\rangle \neq 0$, 并且 $0 = \langle Ax, f\rangle = \langle x, A^* f\rangle$, $\forall x \in X$. 这表明 $f \in \mathcal{N}(A^*)$, 于是从 $y \in {}^{\perp}\mathcal{N}(A^*)$ 可知 $\langle y, f\rangle = 0$, 矛盾. 因此, 只能是 $\mathcal{R}(A) = {}^{\perp}\mathcal{N}(A^*)$.

(2) $\mathcal{R}(A^*) = \mathcal{N}(A)^{\perp}$ 是明显的. 现在任取 $f \in \mathcal{N}(A)^{\perp}$. 注意若 $Ax_1 = Ax_2$, 则 $x_1 - x_2 \in \mathcal{N}(A)$, 因此 $f(x_1) = f(x_2)$. 于是可以定义线性泛函 $g : \mathcal{R}(A) \to \mathbb{K}$

$$g(y) = f(x), \quad \forall y = Ax \in \mathcal{R}(A).$$

今证 g 在 $\mathcal{R}(A)$ 上是有界的. 实际上, 由于 $\mathcal{R}(A)$ 是闭的, 利用开映射定理, 可以证明存在常数 $\mu > 0$, 使得对于任意 $y \in \mathcal{R}(A)$, 有一元 $x \in X$ 满足 $y = Ax$, 并且 $\|x\| \leqslant \mu\|y\|$. 于是

$$|\langle y, g\rangle| = |f(x)| \leqslant \|f\|\,\|x\| \leqslant \mu\|f\|\,\|y\|, \quad \forall y \in \mathcal{R}(A).$$

上式表明 g 在 $\mathcal{R}(A)$ 上有界, 从而依据 Hahn-Banach 定理, g 可以延拓至全 X 上的有界线性泛函, 仍记作 g. 于是

$$\langle Ax, g\rangle = \langle x, f\rangle, \quad \forall x \in X.$$

依定义, $f = A^* g$. 因此 $\mathcal{R}(A^*) = \mathcal{N}(A)^{\perp}$. □

引理 3.8.1 设 $T \in \mathcal{K}(X)$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$, 那么必存在自然数 $k \geqslant 1$, 使得 $\mathcal{N}((\lambda I - T)^k) = \mathcal{N}((\lambda I - T)^{k+1})$.

证明 令 $\mathcal{N}_n = \mathcal{N}((\lambda I - T)^{n+1}), \forall n \geqslant 1$. 用反证法, 假定 $\mathcal{N}_n \neq \mathcal{N}_{n+1}, \forall n \geqslant 1$. 那么 $\mathcal{N}_n$ 是 $\mathcal{N}_{n+1}$ 的真子空间. 一般地, 若 M 是 X 的真子空间, 则不难证明, 对于任意 $\varepsilon \in (0,1)$, 存在 $x \in X$, $\|x\| = 1$, 使得 $d(x, M) = \inf\{\|x - u\| \mid u \in M\} > \varepsilon$. 由此可知存在一列元 $\{x_n\} \subset X$, 使得 $x_n \in \mathcal{N}_{n+1}$, $\|x_n\| = 1$, $\|x_n - x\| > 1/2, \forall x \in \mathcal{N}_n$. 设 $m > n$, 则有

$$(\lambda I - T)^m[(\lambda I - T)x_m + Tx_n] = (\lambda I - T)^{m+1}x_m + T(\lambda I - T)^m x_n = 0,$$

即 $(\lambda I - T)x_m + Tx_n \in \mathcal{N}_m$. 因此

$$|\lambda|^{-1}\|Tx_m - Tx_n\| = \|x_m - \lambda^{-1}[(\lambda I - T)x_m + Tx_n]\| > 1/2,$$

从而 $\{Tx_n\}$ 不收敛, 这与 T 的紧性矛盾. □

引理 3.8.2 设 $T \in \mathcal{K}(X)$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$, 那么 $\mathcal{R}(\lambda I - T) = X$, 当且仅当 $\mathcal{N}(\lambda I - T) = \{0\}$.

证明 首先假定 $\mathcal{R}(\lambda I - T) = X$. 若 $\mathcal{N}(\lambda I - T) \neq \{0\}$, 则存在非零 $x_1 \in \mathcal{N}(\lambda I - T)$. 由于 $\mathcal{R}(\lambda I - T) = X$, 存在一列元 $\{x_n\}$, 使得 $(\lambda I - T)x_{n+1} = x_n, \forall n \geqslant 1$, 并且

$$(\lambda I - T)^n x_{n+1} = x_1 \neq 0,$$

$$(\lambda I - T)^{n+1} x_{n+1} = (\lambda I - T)x_1 = 0.$$

于是 $\mathcal{N}((\lambda I - T)^{n+1}) \neq \mathcal{N}((\lambda I - T)^n), \forall n \geqslant 1$, 这与引理 3.8.1 矛盾, 从而必有 $\mathcal{N}(\lambda I - T) = \{0\}$.

现在设 $\mathcal{N}(\lambda I - T) = \{0\}$, 于是依据定理 3.8.6 (2), $\mathcal{R}(\overline{\lambda} I - T^*) = X^*$. 但 T^* 也是紧算子, 因此依据上面证明了的结论, $\mathcal{N}(\overline{\lambda} I - T^*) = \{0\}$. 再从定理 3.8.6 (1), 可知 $\mathcal{R}(\lambda I - T) = X$. □

这个引理具有重要的理论和实际意义, 它是说, 当 $\lambda \neq 0$ 时, $\lambda I - T$ 可逆当且仅当 $\lambda \in \rho(T)$, 即 $(\lambda I - T)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$. 这是有限维空间中线性代数有关结论在无限维情形下的最令人满意的推广. 利用齐次方程 $(\lambda I - T)x = 0$ 和非齐次方程 $(\lambda I - T)x = y$ 解的语言, 可表达成经典积分方程理论中 Fredholm 二择一原理的形式.

定理 3.8.7 设 $T \in \mathcal{K}(X)$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$, 那么下面两个结论之一成立:

(1) 齐次方程 $(\lambda I - T)x = 0$ 仅有零解, 这时 $\lambda \in \rho(T)$, 而非齐次方程 $(\lambda I - T)x = y$ 对任意 $y \in X$ 有唯一解 $x = (\lambda I - T)^{-1}y$;

(2) 齐次方程 $(\lambda I - T)x = 0$ 有非零解, 这时非齐次方程 $(\lambda I - T)x = y$ 有解, 当且仅当 $\langle y, f\rangle = 0, \forall f \in \mathcal{N}(\overline{\lambda} I - T^*)$.

定理 3.8.8 (Riesz-Schauder **定理**) 设 X 为无限维 Banach 空间, $T \in \mathcal{K}(X)$, 那么

(1) $\sigma(T)$ 由原点和非零本征值组成, 并且对应于非零本征值的本征子空间是有限维的;

(2) $\sigma(T)$ 或者有限, 或者可数无限, 而在后者情形下零点是其唯一可能的极限点.

证明 (1) 若 $0 \notin \sigma(T)$, 则 $\mathcal{R}(T) = X$. 依据开映射定理, 对于 X 中的单位球 $B_1(0)$, 其像集 $TB_1(0)$ 是开集, 从而存在 $r > 0$, 使得 $\overline{B_r(0)} \subset TB_1(0)$. 但 $TB_1(0)$ 是相对紧的, 因此 $\overline{B_r(0)}$ 是紧集, 从而 X 本身是有限维的, 得出矛盾. 于是 $0 \in \sigma(T)$. 由定理 3.8.7 可知 T 的每个非零谱点是本征值. 由于 T 紧, $\mathcal{N}(\lambda I - T)$ 中每个有界集 $\{x_n\}$ 都有收敛子列 $\{x_{n_k}\}$, 使得 $\{Tx_{n_k}\}$ 收敛. 但 $\lambda x_n = Tx_n$, 从而 $\{x_{n_k}\}$ 本身收敛. 这就是说, $\mathcal{N}(\lambda I - T)$ 的每个有界列必有收敛子列, 从而 $\mathcal{N}(\lambda I - T)$ 只可能是有限维子空间.

(2) 用反证法, 假定对某个常数 $\varepsilon > 0$, 存在 T 的不同本征值组成的无限数列 $\{\lambda_n\}$, 使得 $|\lambda_n| \geqslant \varepsilon$, $\forall n \in \mathbb{N}$. 设 x_n 是对应于 λ_n 的本征元, 并记 $M_n = \operatorname{span}\{x_1, \cdots, x_n\}$. 注意诸 x_k 是线性无关的, 从而 M_n 是 M_{n+1} 的真子空间. 于是利用引理 3.8.1 中的证明, 存在一列 $\{y_n\}$, $y_n \in M_n$, $\|y_n\| = 1$, $\forall n > 1$, 使得

$$\|y_n - y\| \geqslant \frac{1}{2}, \quad \forall y \in M_{n-1}.$$

由于 $y_n \in M_n$, 故存在 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, 使得 $y_n = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n$. 由此 $Ty_n \in M_n$, 并且

$$(\lambda_n I - T)y_n = \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k(\lambda_n - \lambda_k)x_k \in M_{n-1}.$$

对于任意自然数 m, $1 \leqslant m < n$, 令 $x = (\lambda_n I - T)y_n + Ty_m$. 显然从上述可见 $x \in M_{n-1}$. 通过计算有

$$Ty_n - Ty_m = \lambda_n(y_n - \lambda_n^{-1}x),$$

从而 $\|Ty_n - Ty_m\| \geqslant \frac{1}{2}|\lambda_n| \geqslant \frac{1}{2}\varepsilon$. 因此, $\{y_n\}$ 为有界列, 但 $\{Ty_n\}$ 无收敛子列, 与 T 的紧性相矛盾. □

在 Hilbert 空间中紧的自伴算子具有简单的谱结构, 一个重要结论是说, 其本征元全体构成 Hilbert 空间的基. 这个结论在带有 Hermite 核的积分方程以及某些微分方程中有重要的应用.

定理 3.8.9 设 H 为 Hilbert 空间, $T \in \mathcal{L}(H)$ 是自伴算子, 那么 T 的每个本征值都是实的, 并且对应于不同本征值的本征元相互直交.

证明 设 $Tx = \lambda x$, $x \neq 0$. 于是 $\langle Tx, x\rangle = \lambda\|x\|^2 = \langle x, Tx\rangle = \bar{\lambda}\|x\|^2$, 从而 $\lambda = \bar{\lambda}$, 即 $\lambda \in \mathbb{R}$.

现在设 $\lambda, \mu \in \sigma_p(T)$, $\lambda \neq \mu$, $Tx = \lambda x$, $Ty = \mu y$, $x \neq 0$, $y \neq 0$. 于是 $\langle Tx, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle = \langle x, Ty\rangle = \mu\langle x, y\rangle$, 从而 $(\lambda - \mu)\langle x, y\rangle = 0$. 由于 $\lambda \neq \mu$, 故 $\langle x, y\rangle = 0$. □

设 H 是 Hilbert 空间, $T \in \mathcal{K}(H)$ 为自伴算子. 设 $\{\lambda_n\} = \sigma_p(T)$. 对应于本征值 λ_n 的本征子空间的维数 r_n 称为 λ_n 的重数. 为了方便起见, 对于重数为 r_n 的本征值 λ_n, 在序列 $\{\lambda_n\}$ 中将重复出现 r_n 次. 序列 $\{\lambda_n\}$ 的排序满足 $|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant \cdots$. 设 φ_n 是对应于 λ_n 的本征元, 满足 $\|\varphi_n\| = 1$, 并且诸 φ_n 彼此直交. 上述最后一点总能做到, 因为当 λ_n 为重本征值时, 可在其本征子空间 M_n 中取 r_n 个元构成 M_n 的直交规范基. 本小段中将采用上述这些记号而不再特别说明.

定理 3.8.10 设 H 为 Hilbert 空间, $T \in \mathcal{L}(H)$ 是自伴算子, 那么

(1) $\sigma(T) \subset [m_1, m_2]$, 其中

$$m_1 = \inf_{x \in H, \|x\|=1} \langle Tx, x \rangle, \quad m_2 = \max_{x \in H, \|x\|=1} \langle Tx, x \rangle;$$

(2) T 的谱半径 $r(T) = \|T\| = \max\{m_1, m_2\}$, 并且 $m_1, m_2 \in \sigma(T)$.

证明 (1) 若 $\lambda > m_2$, 则

$$(\lambda - m_2)\|x\|^2 \leqslant |\langle(\lambda I - T)x, x\rangle| \leqslant \|(\lambda I - T)x\| \, \|x\|, \quad \forall x \in H.$$

因此, $\|(\lambda I - T)x\| \geqslant (\lambda - m_2)\|x\|, \forall x \in H$, 故 $\lambda \in \rho(T)$. 同理可证, 当 $\lambda < m_1$ 时, $\lambda \in \rho(T)$.

依 m_1 的定义, 存在一列 $\{x_n\} \subset H, \|x_n\| = 1$, 使得 $\langle(m_1 I - T)x_n, x_n\rangle \to 0$. 一般地, 对于任意自伴算子 $A \in \mathcal{L}(H)$, 若 $\langle Ax, x\rangle \geqslant 0, \forall x \in H$, 则易证

$$|\langle Ax, y\rangle|^2 \leqslant |\langle Ax, x\rangle| \, |\langle Ay, y\rangle|, \quad \forall x, y \in H.$$

于是若取 $x = x_n, y = (m_1 I - T)x_n, A = m_1 I - T$, 则得

$$\begin{aligned}\|(m_1 I - T)x_n\|^2 &\leqslant |\langle(m_1 I - T)x_n, x_n\rangle| |\langle(m_1 I - T)^2 x_n, (m_1 I - T)x_n\rangle| \\ &\leqslant \|m_1 I - T\|^2 \|(m_1 I - T)x_n\| \|x_n\|.\end{aligned}$$

因此 $\|(m_1 I - T)x_n\| \leqslant \|m_1 I - T\|^2 \|x\| \to 0$, 从而 $m_1 \in \sigma(T)$. 类似地可以证明 $m_2 \in \sigma(T)$.

(2) 只需证 $r(T) = \|T\|$. 根据定理 3.7.3, $r(T) = \lim\limits_{n \to \infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$. 注意到

$$\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx\rangle = \langle T^2 x, x\rangle \leqslant \|T^2\| \, \|x\|^2, \quad \forall x \in H,$$

我们有 $\|T\|^2 \leqslant \|T^2\|$. 另一方面, $\|T^2 x\| \leqslant \|T\| \|Tx\| \leqslant \|T\|^2 \|x\|$. 因此, $\|T\|^2 = \|T^2\|$. 同理 $\|T^{2^k}\| = \|T\|^{2^k}, \forall k \geqslant 1$. 于是

$$r(T) = \lim_{k \to \infty} \|T^{2^k}\|^{\frac{1}{2^k}} = \left(\|T\|^{2^k}\right)^{\frac{1}{2^k}} = \|T\|.$$

□

定理 3.8.11 (Hilbert-Schmidt 定理) 设 $T \in \mathcal{K}(H)$ 为自伴算子, 那么 T 的本征元全体 $\{\varphi_n\}$ 构成 H 的直交基. 进而假定每个 φ_n 都是单位元, 即 $\|\varphi_n\| = 1$, 从而 $\{\varphi_n\}$ 是 H 的直交规范基. 那么对于任意 $x \in H$, 有展开式

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, \varphi_n\rangle \varphi_n.$$

证明　设 $M=\overline{\operatorname{span}\{\varphi_n\}}$. 根据 Hilbert 空间中的投影定理, $H=M\oplus M^{\perp}$, 并且容易验证 $TM\subset M$, $TM^{\perp}\subset M^{\perp}$. 设 T 在 $M^{\perp}$ 上的限制记作 T_0, 那么 $T_0: M^{\perp}\to M^{\perp}$ 也是紧自伴算子. 若 T_0 有非零本征值 λ, 则 $\lambda\in\sigma_p(T)$, 从而其本征元属于 M, 这不可能, 因为 M 和 $M^{\perp}$ 是直交的. 因此, $\sigma(T_0)=\{0\}$, 依定理 3.8.10, $T_0=0$. 因此 $TM^{\perp}=\{0\}$, 从而 $M^{\perp}$ 中的元必是 T 的本征元, 这只能是 $M^{\perp}=\{0\}$, 即 $M=H$.

现在设 $\|\varphi_n\|=1$, 从而 $\{\varphi_n\}$ 是 H 的直交规范基. 于是 Tx 在直交基 $\{\varphi_n\}$ 下可展开成

$$Tx=\sum_{n=1}^{\infty}\langle Tx,\varphi_n\rangle\varphi_n=\sum_{n=1}^{\infty}\langle x,T\varphi_n\rangle\varphi_n$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\langle x,\varphi_n\rangle\varphi_n.$$

□

3.9　Sobolev 空间*

Sobolev 空间理论在现代偏微分方程中已成为不可或缺的工具. 历史上, Sobolev 空间理论的建立要比 Shwartz 广义函数 (或分布) 理论早一些. 但广义函数理论能使我们更简洁地叙述 Sobolev 空间理论. 这里我们仅简单地介绍 Sobolev 空间理论的主要概念和一些常用的基本结果, 一般情况下我们不一一列举出处, 详细请参阅文献 [46, 92].

设 Ω 为 $\mathbb{R}^N$ 中带充分光滑边界 $\varGamma$ 的开集. $\mathcal{D}(\Omega)=C_0^{\infty}(\Omega)$ 表示定义在 Ω 上取值在 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$ 中无穷次可微且具紧支集的函数空间. 这里对于 Ω 上一个连续函数 φ, 将 $\varphi(x)\neq 0$ 的点全体的闭包称为 φ 的支集, 即

$$\operatorname{supp}\varphi=\overline{\{x\in\Omega\,|\,\varphi(x)\neq 0\}}.$$

$\mathcal{D}(\Omega)$ 上定义如下拓扑: 序列 $\{\varphi_n\}\subset\mathcal{D}(\Omega)$ 收敛于 0 是指它满足

(1) 诸 φ_n 的支集位于 Ω 的一固定紧集中;

(2) φ_n 及其各阶导数均一致收敛于 0.

(参见下一章关于邻域基的说明.)

$\mathcal{D}'(\Omega)$ 表示 $\mathcal{D}(\Omega)$ 上的连续线性泛函空间, $\mathcal{D}'(\Omega)$ 中的元叫做 Ω 上的广义函数或分布.

对于 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_N)$, α_k 为任意非负整数, 记 $|\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_N$,

$$D^{\alpha}=D_1^{\alpha_1}\cdots D_N^{\alpha_N},\quad D_k=\frac{\partial}{\partial x_k}.$$

我们定义 $f\in\mathcal{D}'(\Omega)$ 的任意阶导数 $D^{\alpha}f$

$$\langle D^{\alpha}f,\varphi\rangle=(-1)^{|\alpha|}\langle f,D^{\alpha}\varphi\rangle,\quad\forall\,\varphi\in\mathcal{D}(\Omega),$$

这里 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示 $\mathcal{D}'(\Omega)$ 与 $\mathcal{D}(\Omega)$ 之间的标量积, 即 $\langle f,\varphi\rangle = f(\varphi)$ 为 f 在 φ 处的取值. 对于定义在 Ω 上的局部可积函数 f, 由

$$\langle \widetilde{f},\varphi\rangle = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x, \quad \forall\,\varphi\in\mathcal{D}(\Omega)$$

定义的 $\widetilde{f}$ 是 Ω 上的分布, 通常我们把 $\widetilde{f}$ 等同于 f.

例 3.9.1　对于 $x_0\in\Omega$, $\delta_{x_0}(x)=\delta(x-x_0)$ 表示 Dirac δ-函数, 定义为

$$\langle \delta_{x_0},\varphi\rangle = \int_\Omega \delta(x-x_0)\varphi(x)\mathrm{d}x = \varphi(x_0).$$

不难看出, $\delta_{x_0}\in\mathcal{D}'(\Omega)$. □

例 3.9.2　设单位阶跃函数 $H(x)$ 定义为

$$H(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

函数 $H(x)$ 当 $x\neq 0$ 时是可微的, 并且 $H'(x)=0$; 但在 $x=0$ 处是间断的, 从而在常义下在 $x=0$ 处不可微. 但是, 显然 $h\in\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, 从而在广义下 H 的导数存在, 并且 $H'(x)=\delta(x)$, 这是因为对于任意 $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$, 依据广义函数导数的定义

$$\langle H',\varphi\rangle = -\langle H,\varphi'\rangle = -\int_0^\infty \varphi'(x)\mathrm{d}x = \varphi(0).$$

□

广义函数序列 $\{f_n\}\subset\mathcal{D}'(\Omega)$ 称为 (弱) 收敛于 $f\in\mathcal{D}'(\Omega)$, 如果它满足

$$\lim_{n\to\infty}\langle f_n,\varphi\rangle = \langle f,\varphi\rangle, \quad \forall\,\varphi\in\mathcal{D}(\Omega).$$

例 3.9.3　函数序列 $f_n(x)=\frac{1}{\pi}\frac{\sin nx}{x}$ 当 $n\to\infty$ 时收敛于 $\delta(x)=\delta_0(x)$, 这是因为对于任意 $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$, 我们有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin nx}{x}\varphi(x)=\varphi(0).$$

□

对于正整数 m 和实数 $p\geqslant 1$, 我们定义

$$H^{m,p}(\Omega)=\{f\in L^p(\Omega)\,|\,D^\alpha f\in L^p(\Omega),\ \forall\alpha,\ |\alpha|\leqslant m\},$$

在 $H^{m,p}(\Omega)$ 中赋以范数

$$\|f\|_{H^{m,p}(\Omega)}=\left(\sum_{|\alpha|\leqslant m}\|D^\alpha f\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}},$$

则 $H^{m,p}(\Omega)$ 是一 Banach 空间, 叫做 ($L^p(\Omega)$ 上的 m 阶) Sobolev 空间. 当 $p=2$ 时, 记 $H^m(\Omega)=H^{m,2}(\Omega)$. 我们在 $H^m(\Omega)$ 中定义内积

$$\langle f,g\rangle_{H^m(\Omega)}=\sum_{|\alpha|\leqslant m}\langle D^\alpha f,D^\alpha g\rangle_{L^2(\Omega)},$$

则 $H^m(\Omega)$ 是一 Hilbert 空间.

类似地, 我们可以在边界流形 Γ 上定义 $\mathcal{D}(\Gamma)$, $\mathcal{D}'(\Gamma)$, $L^p(\Gamma)$, $W^{m,p}(\Gamma)$ 和 $H^m(\Gamma)$ 等.

特别当 $n=1$, $\Omega=(a,b)$ 时, 我们有

$$H^m(a,b)=\Big\{f\in L^2(a,b)\,|\,f,f',\cdots,f^{(m-1)}\text{ 绝对连续},\\ \text{并且 } f',\cdots,f^{(m-1)}\in L^2(a,b)\Big\}.$$

通过傅里叶展开或插值等方法, 对于任意实数 s, 可以定义非整数阶 Sobolev 空间 $H^s(\Omega)$ (可以参见文献 [9]).

定理 3.9.1 (迹定理)　*对于任意 $f\in H^m(\Omega)$, 我们可以定义 f 在边界 Γ 上的迹为*

$$\gamma(f)=\left[f\big|_\Gamma,\left.\frac{\partial f}{\partial\nu}\right|_\Gamma,\cdots,\left.\frac{\partial^{m-1}f}{\partial\nu^{m-1}}\right|_\Gamma\right].$$

我们有

$$\left.\frac{\partial^k f}{\partial\nu^k}\right|_\Gamma\in H^{m-k-\frac12}(\Gamma),\quad 0\leqslant k\leqslant m-1,$$

(这里 ν 为边界的法向量) 并且

(1) 迹映射 $\gamma: H^m(\Omega)\to\prod_{k=0}^{m-1}H^{m-k-\frac12}(\Gamma)$ 是线性连续满射;

(2) γ 的零空间

$$\mathcal{N}(\gamma)=\left\{f\in H^m(\Omega)\,\left|\,\left.\frac{\partial^k f}{\partial\nu^k}\right|_\Gamma=0,\ 0\leqslant k\leqslant m-1\right.\right\}$$

恰好是 $\mathcal{D}(\Omega)$ 在 $H^m(\Omega)$ 中的闭包 $H_0^m(\Omega)$, 从而

$$H_0^m(\Omega)=\left\{f\in H^m(\Omega)\,\left|\,\left.\frac{\partial^k f}{\partial\nu^k}\right|_\Gamma=0,\ 0\leqslant k\leqslant m-1\right.\right\}.$$

由于 $\mathcal{D}(\Omega)$ 在 $H_0^m(\Omega)$ 中稠, 从而可以把 $H_0^m(\Omega)$ 的对偶等同于 $\mathcal{D}'(\Omega)$ 的一个子空间. 于是定义

$$H^{-m}(\Omega)=(H_0^m(\Omega))'.$$

显然我们有

$$H_0^m(\Omega)\subset L^2(\Omega)\subset H^{-m}(\Omega).$$

对于 $f \in H^{-m}(\Omega)$, 必定存在 $f_\alpha \in L^2(\Omega), 0 \leqslant |\alpha| \leqslant m$, 使得

$$f = \sum_{|\alpha| \leqslant m} D^\alpha f_\alpha.$$

上述迹定理对于非整数 $s > 0$ 也成立: 这时对于 $f \in H^s(\Omega)$, 我们有

$$\gamma(f) \in \prod_{k=0}^{m-1} H^{s-k-\frac{1}{2}}(\Gamma),$$

其中

$$\gamma(f) = \left[f\big|_\Gamma, \frac{\partial f}{\partial \nu}\bigg|_\Gamma, \cdots, \frac{\partial^{m-1} f}{\partial \nu^{m-1}}\bigg|_\Gamma \right], \quad s - m + \frac{1}{2} > 0.$$

对于非负整数 m 和 $\varepsilon, 0 \leqslant \varepsilon < 1$, $C^{m,\varepsilon}(\Omega)$ 表示 Ω 上直到 m 次连续可微, 并且 m 次导数为 ε-Hölder 连续的函数空间: $f \in C^{m,\varepsilon}(\Omega)$,

$$\|f\|_{C^{m,\varepsilon}} = \sum_{|\alpha| \leqslant m} \sup_{x \in \Omega} |D^\alpha f(x)| + \sum_{|\alpha| = m} \inf_{\substack{x,y \in \Omega \\ x \neq y}} \frac{|D^\alpha f(x) - D^\alpha f(y)|}{|x - y|^\varepsilon} < \infty.$$

定理 3.9.2 (Sobolev 嵌入定理) 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 为有界开区域, 边界 $\partial\Omega$ 充分光滑, 设 $s = m + N/2 + \varepsilon$, $0 < \varepsilon < 1$, m 为非负整数, 则嵌入

$$H^s(\Omega) \hookrightarrow C^{m,\varepsilon}(\Omega)$$

是连续的.

根据定理 3.9.2, 若空间维数 $N = 1$, $\Omega = (a, b)$, 则 $H^1(a, b) \hookrightarrow C^{0,\frac{1}{2}}(a, b)$, 故 $f \in H^1(a, b)$ 至少在 (a, b) 上是连续的. 但当 $N = 2$ 时, $H^1(\Omega)$ 中的元未必是连续的. 例如, 取 Ω 为 $\mathbb{R}^2$ 中半径为 $\frac{1}{2}$ 中心在原点的开圆盘, $y(x) = \ln\ln(|x|^{-1})$, 则 $y \in H^1(\Omega)$, 但 y 显然在 $x = 0$ 处是不连续的.

定理 3.9.3 (Sobolev 紧嵌入定理) 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 为有界开区域, 边界 $\partial\Omega$ 充分光滑, 设 $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$, $s_2 > s_1$, 则嵌入 $H^{s_2}(\Omega) \hookrightarrow H^{s_1}(\Omega)$ 是紧的, 即对于 $H^{s_2}(\Omega)$ 中的有界序列 $\{y_k\}$, 必有 $\{y_k\}$ 的子序列 $\{y_{k_i}\}$ 使得 $\|y_{k_i} - y\|_{H^{s_1}(\Omega)} \to 0 \ (i \to \infty)$, 其中 $y \in H^s(\Omega)$.

对于一般的 Sobolev 空间 $H^{m,p}$ 有如下结论[9].

定理 3.9.4 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 为有界开集, 边界 $\partial\Omega$ 充分光滑.

(1) 如果

$$1 \geqslant \frac{1}{p} > \frac{k}{N}, \quad k \leqslant m, \quad \frac{1}{q_0} = \frac{1}{p} - \frac{k}{N}, \quad q < q_0,$$

那么从 $H^{m,p}(\Omega)$ 到 $H^{m-k,q}(\Omega)$ 的嵌入映射为紧映射.

(2) 如果

$$\frac{1}{p} \leqslant \frac{k}{N}, \quad k \leqslant m,$$

那么对任何实数 q, 从 $H^{m,p}(\Omega)$ 到 $H^{m-k,q}(\Omega)$ 的嵌入映射为紧映射.

上述定理实际上包括了许多紧嵌入的结论. 例如, $L^p(\Omega)$ 可看作 $H^{0,p}(\Omega)$. 于是, 容易得到下面的推论.

推论 3.9.1 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 为有界开集, 边界 $\partial\Omega$ 充分光滑.

(1) 嵌入映射

$$H^s(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega), \quad 当\ \frac{1}{p} > \frac{1}{2} - \frac{s}{N} > 0$$

和

$$H^s(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega), \ \ \forall p \in [1,\infty), \quad 当\ \frac{1}{2} - \frac{s}{N} = 0$$

是紧映射.

(2) 设 $m_1 > m_2 \geqslant 0$, 那么 $H^{m_1,p}(\Omega)$ 到 $H^{m_2,p}(\Omega)$ 的嵌入映射为紧映射.

定理 3.9.5 (插值不等式) 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 为有界开区域, 具有充分光滑边界, m 为自然数, 那么对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在常数 $C(\varepsilon) > 0$, 使得

$$\|f\|_{H^m(\Omega)} \leqslant \varepsilon \sum_{|\alpha| \leqslant m} \|D^\alpha f\|^2_{L^2(\Omega)} + C(\varepsilon)\|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

设 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中的单连通有界开区域, 具有充分光滑边界. 一般说来, 对于 $f \in H^m(\Omega)$, 若令

$$|f|_{m,2} = \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha f\|_{L^2(\Omega)},$$

则 $|\cdot|_{m,2}$ 仅仅是 $H_m(\Omega)$ 中一个拟范数, 就是说, 范数中条件 $|f|_{m,2} = 0 \Longrightarrow f = 0$ 不满足. 下面要说明, 如果对 f 加上适当的边条件, 则使用 f 的最高阶导数就可以定义出 $H^m(\Omega)$ 的一较小闭子空间中的范数.

在 $H^1_0(\Omega)$ 中, 我们有

$$\|f\|_{H^1(\Omega)} \leqslant C\left(\int_\Omega |\nabla f|^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall f \in H^1_0(\Omega),$$

这就是熟知的 Poincaré 不等式. 类似于这样的不等式在求得偏微分方程解的先验估计中是非常有用的. 下面的 Deny-Lions 引理是这一类 Poincaré 不等式的基础.

引理 3.9.1 (Deny-Lions 引理) 设 $P_{k-1}(\Omega)$ 表示 Ω 上所有阶 $\leqslant k-1$ 的 N 变量多项式空间. 假定 $\{\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_m\}$ 是 $H^k(\Omega)$ 上 m 个连续线性泛函, 使得 $\{\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_m\}$ 在 $P_{k-1}(\Omega)$ 上是线性无关的. 对于 $f \in H^k(\Omega)$, 令

$$\|f\|' = \left(\sum_{j=1}^m |\ell_j(f)|^2 + |f|_{k,2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

那么 $\|\cdot\|'$ 定义为 $H^k(\Omega)$ 上一等价范数, 即存在常数 $C_1, C_2 > 0$, 使得

$$C_1\|f\|' \leqslant \|f\|_{H^k(\Omega)} \leqslant C_1\|f\|', \quad \forall f \in H^k(\Omega).$$

例 3.9.4　设 $\Gamma_0 \subset \partial\Omega$ 使得 $\text{meas}\,(\Gamma_0) > 0$, 这里 $\text{meas}\,(\Gamma_0)$ 为 Γ_0 的测度. 定义

$$H^1_{\Gamma_0}(\Omega) = \left\{ f \in H^1(\Omega) \,|\, f|_{\Gamma_0} = 0 \right\}.$$

注意根据迹定理 3.9.1, 当 $f \in H^1(\Omega)$ 时, $f|_{\Gamma_0} \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0)$. 定义线性泛函 $\ell : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ 为

$$\ell(f) = \int_{\Gamma_0} f(s)\mathrm{d}s.$$

那么根据 Cauchy 不等式、紧嵌入定理 3.9.3 和迹定理 3.9.1, 存在正常数 C' 和 C, 使得

$$\begin{aligned} |\ell(f)| &\leqslant \text{meas}\,(\Gamma_0)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Gamma_0} |f(s)|^2 \mathrm{d}s \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leqslant C' \|f\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \leqslant C \|f\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

从而 ℓ 是 $H^1(\Omega)$ 上的连续线性泛函. 于是从引理 3.9.1 可知存在正常数 C_1 和 C_2, 使得

$$\begin{aligned} C_1 \left(\ell(f)^2 + \int_\Omega |\nabla f|^2 \mathrm{d}x \right) &\leqslant \int_\Omega \left(|f|^2 + |\nabla f|^2 \right) \mathrm{d}x \\ &\leqslant C_2 \left(\ell(f)^2 + \int_\Omega |\nabla f|^2 \mathrm{d}x \right), \qquad \forall\, f \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega). \end{aligned}$$

现在对于 $f \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$, 有 $\ell(f) = 0$, 因此我们得到

$$\begin{aligned} C_1 \int_\Omega |\nabla f|^2 \mathrm{d}x &\leqslant \int_\Omega \left(|f|^2 + |\nabla f|^2 \right) \mathrm{d}x \\ &\leqslant C_2 \int_\Omega |\nabla f|^2 \mathrm{d}x, \quad \forall\, f \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega). \end{aligned}$$

这表明双线性泛函

$$a(\varphi, \psi) = \int_\Omega \nabla f \cdot \overline{\nabla g} \mathrm{d}x, \quad \forall\, \varphi, \psi \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$$

是 $H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$ 上一等价内积, 并给出等价的诱导范数.　□

定理 3.9.6 (Poincaré 不等式)　设 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 为有界开区域, m 为一正整数, 则存在正常数 $C = C(m, N, \Omega)$ 使得

$$\|\varphi\|_{H^m(\Omega)} \leqslant C \left(\sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha \varphi\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall\, \varphi \in H^m_0(\Omega).$$

证明　定义 $H^m(\Omega)$ 上线性泛函

$$\ell_k(f) = \int_{\Gamma_0} \frac{\partial f}{\partial \nu^k} \mathrm{d}s, \quad \forall\, f \in H^m(\Omega),\ k = 0, 1, \cdots, m-1.$$

容易验证 $\ell_0, \ell_1, \cdots, \ell_{m-1}$ 是 $P_{m-1}(\Omega)$ 上 m 个线性无关的连续线性泛函. 由于

$$\ell_k(f)=0, \quad \forall f\in H_0^m(\Omega),\ k=0,1,\cdots,m-1,$$

故根据 Deney-Lions 引理, 可知定理结论成立. □

3.10 注释与参考

在第 1 章最速落径问题中已涉及到泛函, 实际上, 变分法的研究是泛函分析的一个重要起源. 泛函分析的另一个重要来源是对积分方程的研究. 著名的希尔伯特空间就是希尔伯特 (Hilbert, 1862–1943) 在研究积分方程时提出的.

波兰数学家 Banach 利用范数代替希尔伯特空间的内积概念, 极大地拓广了泛函分析的疆域, 他并证明了一批泛函分析的重要结果, 成为现代泛函分析的奠基人.

粗略地说, 泛函分析是 20 世纪初在集合论的影响下函数概念与空间概念相结合的产物. 与线性代数研究的有穷维空间不同, 泛函分析研究的对象是无穷维空间. 在这类空间上的动态系统通常称为无穷维系统或分布参数系统. 分布参数系统的控制问题是现代控制理论的一个重要组成部分. 由于泛函分析是分布参数控制系统研究的理论基础, 它在控制界也很受重视.

泛函分析在我国比较普及. 我国有许多优秀的泛函分析专家, 如关肇直、张恭庆等. 关肇直先生的文献 [18], 张恭庆教授等的文献 [40] 都是泛函分析很好的参考书. 文献 [69] 也较简明易懂.

3.11 习题

3.1 证明一个 Banach 空间是一个 T_4 空间, 即设 C_1, C_2 为两个不相交闭集, 则存在不相交的开集 U_1, U_2 使 $C_1\subset U_1$, $C_2\subset U_2$.

3.2 设 X 为一距离空间, $W\subset X$ 为一紧子集. $f: W\to\mathbb{R}$ 为一连续函数. 证明 f 有界, 且它可以达到上、下界.

3.3 在 $C[0,1]$ 上定义两个范数

$$\|f\|_1=\sqrt{\int_0^1 |f(x)|^2\mathrm{d}x}; \quad \|f\|_2=\sqrt{\int_0^1 (2+3x)|f(x)|^2\mathrm{d}x}.$$

证明 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 是 $C[0,1]$ 中的两个等价范数.

3.4 设 $C_B[0,\infty)$ 为 $[0,\infty)$ 上连续有界函数集. $a>0$, 定义范数

$$\|f\|_a=\sqrt{\int_0^\infty |\mathrm{e}^{ax}f(x)|^2\mathrm{d}x}.$$

(1) 证明 $\|\cdot\|_a$ 是 $C_B[0,\infty)$ 上的范数.

(2) 设 $b>0$, $b\neq a$, $\|\cdot\|_b$ 与 $\|\cdot\|_a$ 等价吗?

3.5 设 H 为一 Hilbert 空间, $A \subset H$, $\text{span}\{A\}$ 为由 A 张成的子空间, 证明

(1)

$$A^{\perp} = (\overline{\text{span}\{A\}})^{\perp};$$

(2)

$$A^{\perp\perp} = \overline{\text{span}\{A\}}.$$

3.6 在 $L^2[-a,a]$ 中, 问偶函数集合的正交补是什么? 证明你的结论.

3.7 设 X 为一 Hilbert 空间, $x_0 \in X$, $r > 0$. 令

$$B = \{x \in X \mid \|x - x_0\| \leqslant r\}.$$

(1) 证明: B 为 X 中闭凸集.

(2) 设 $x \in B^c$, 定义 $y = x_0 + r(x - x_0)/\|x - x_0\|$. 证明: y 是 x 在 B 中的最佳逼近 (距离最小).

3.8 设 A, B 为 Hilbert 空间 H 的闭线性子空间, P_A, P_B 为 H 到 A, B 的投影算子. 证明:

(1) $A \perp B \iff P_A P_B = 0$;

(2) $A = B^{\perp} \iff P_A + P_B = id_H$.

3.9 设

$$C_0(\mathbb{R}) = \left\{ x \in C(\mathbb{R}) \,\middle|\, \lim_{|t|\to\infty} x(t) = 0 \right\}$$

定义 $\|x\| = \sup_{t\in\mathbb{R}} |x(t)|$, 则 $C_0(\mathbb{R})$ 是一个可分 Banach 空间, 试证之.

3.10 设 S 为序列集合, $s = \{x_i\} \in S$, 定义

$$\|s\| = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x_n|}{1 + |x_n|},$$

证明 S 依距离 $d(x,y) = \|x - y\|$ 是一个完备距离空间. S 是否是一个 Banach 空间?

3.11 设 $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 为线性算子: $x \mapsto Ax$, 这里 A 为一 $n \times n$ 矩阵. 证明 $\|A\| = \sqrt{\sigma_{\max}}$, 这里 $\sigma_{\max}$ 为 $A^{\mathrm{T}}A$ 的最大特征值.

提示: 利用以下结论: 设 P 为对称矩阵, 其最大、最小特征值分别为 $\sigma_{\max}$、$\sigma_{\min}$. 那么

$$\sigma_{\min} x^{\mathrm{T}} x \leqslant x^{\mathrm{T}} P x \leqslant \sigma_{\max} x^{\mathrm{T}} x.$$

3.12 设 X 为一 Banach 空间, $x \in X$, 又设 $T \in \mathcal{L}(X)$ 为 X 上的有界线性算子. 定义 $\varphi(T) = Tx$, 则 $\varphi \in L(L(X), X)$. 求 $\|\varphi\|$.

3.13 设 X 为一 Banach 空间, $X_0 \subset X$ 为 X 的闭子空间. $\varphi : X \to X/X_0$ 定义为

$$\varphi(x) = [x], \quad x \in X$$

上的有界线性算子. 证明: 如果存在 $m > 0$, 使得

$$|\langle Ax, x\rangle| \geqslant m\|x\|^2, \quad \forall x \in H,$$

则存在 $A^{-1} \in \mathcal{L}(H)$.

3.14 设 $\mathcal{B}$ 为赋范线性空间, $\{x_i\} \subset \mathcal{B}$ 为 $\mathcal{B}$ 中的点. 如果 $\forall f \in \mathcal{B}^*$ 数列 $\{f(x_i)\}$ 有界, 证明 $\{x_i\}$ 在 $\mathcal{B}$ 内有界.

3.15 设 $\mathcal{B}$ 为赋范线性空间, $x_1, \cdots, x_n \in \mathcal{B}$ 线性无关. 证明: 存在 n 个 $f_1, \cdots, f_n \in \mathcal{B}^*$, 使得

$$f_i(x_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

3.16 设 X 为 Banach 空间, $A \in \mathcal{L}(X)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, 求证当 $|\lambda| > \|A\|$ 时, 算子 A 的 Neuman 级数 $\sum_{k=0}^{\infty} A^k/\lambda^{k+1}$ 按算子范数收敛于 $(\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$, 其中 I 为 X 中的恒等算子.

3.17 试证 $L^2(-\pi, \pi)$ 中的泛函序列

$$f_n(\varphi) = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \cos nt \, \mathrm{d}t, \quad \varphi \in L^2(-\pi, \pi)$$

弱收敛于零.

3.18 设 X 是 Banach 空间. 序列 $\{x_n\} \subset X$ 满足

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| = \mu < \infty.$$

试证级数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ 收敛, 即存在 $x \in X$ 使得 $x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k$. 此外, 有 $\|x\| \leqslant \mu$.

3.19 定义线性算子 $A: C[0,1] \to C[0,1]$ 如下

$$(Af)(t) = \int_0^1 K(t,s) f(s) \mathrm{d}s, \quad \forall f \in C[0,1],$$

其中核函数 $K(t,s)$ 在 $[0,1] \times [0,1]$ 上连续. 试证 A 是有界的.

3.20 A 仍由上题给出, 但 $A: L^2(0,1) \to L^2(0,1)$, 而 $K(t,s)$ 是 $L^2((0,1) \times (0,1))$ 中的函数. 试问 A 有界吗?

3.21 设 X 是 Hilbert 空间, 证明: X 是局部序列紧的, 即 X 中任意强有界序列必含有一弱收敛的子序列. (该命题对自反 Banach 空间均成立.)

3.22 设 X, Y 为 Banach 空间, $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. 试证:

(1) 若 A 为紧算子, 则 A 把 X 中的弱收敛序列变成 Y 中的强收敛序列;

(2) 当 X 为自反时, (1) 的逆命题也成立, 这就是说, 若 A 把 X 中的弱收敛序列变成 Y 中的强收敛序列, 则 A 是紧算子.

3.23 在 ℓ^2 中定义线性算子 A $Ax = (\alpha_1 \xi_1, \cdots, \alpha_k, \cdots)$, $\forall x = (\xi_k) \in \ell^2$, 其中 α_k 为已知常数. 试指出对于什么样的 α_k, A 是有界的, 或是紧的.

3.24 设 A 是 Banach 空间 X 中的紧线性算子. 试证存在一单位元 $x \in X$, 使得 $\|Ax\| = \|A\|$.

3.25 在 Hilbert 空间 $L^2(0,1)$ 中定义线性算子 A:

$$(Af)(t) = \int_0^t f(s)\mathrm{d}s, \quad \forall f \in L^2(0,1).$$

试找出 A 的谱 $\sigma(A)$、点谱 $\sigma_p(A)$、连续谱 $\sigma_c(A)$ 和剩余谱 $\sigma_r(A)$, 并证明 $\|A\| = \frac{2}{\pi}$.

第 4 章 概率论

一个物理量或动态过程的描述大致可分为两类: 确定的或随机的. 概率论是研究随机变量的基本工具, 公理化的概率论是本章的主要对象, 但本章第一节仍然对经典概率的一些方法做一个综述, 因为它们在一些工程问题, 包括自动控制的分析与设计中依然是重要的.

随机变量是概率论与随机过程的研究对象, 本章从测度论的观点出发定义随机变量, 研究它的一些基本性质, 包括其分布、期望和条件期望、收敛性、极限定理等. 本章介绍近代概率论的基础, 它也为下一章研究随机过程做准备.

4.1 经典概率

本节对经典概率作一综述性复习, 不追求概念的严格定义. 概率论研究的对象全体称为事件域. 事件域的任一子集称为事件. 下面给几个常见例子.

例 4.1.1 (1) 投骰子: 这时可能出现六种不同的点数. 于是, 事件域为

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

举几个可能的事件:

① 投得点数为 1, 该事件可记作 $A = \{1\}$;

② 投得点数不大于 2, 该事件可记作 $B = \{1, 2\}$;

③ 投得点数为偶数, 该事件可记作 $C = \{2, 4, 6\}$;

④ 投得点数小于 1, 该事件是不可能的, 记作 $D = \varnothing$.

(2) 抓牌: 从一副牌 (52 张) 中抓 1 张牌.

$$S = \{s_i, h_j, d_k, c_\ell \mid i, j, k, \ell = 1, 2, \cdots, 13\}.$$

这里, s: 黑桃, h: 红心, d: 方块, c: 梅花. 举几个可能的事件:

① 抓到黑桃, $A = \{s_i \mid i = 1, 2, \cdots, 13\}$;

② 抓到红牌, $B = \{h_j, d_k \mid j, k = 1, 2, \cdots, 13\}$;

③ 抓到点 (A, K, Q, J), $C = \{s_i, h_j, d_k, c_\ell \mid i, j, k, \ell = 1, 11, 12, 13\}$. □

拉普拉斯最先给出概率的古典定义: 事件 A 的概率等于一次试验中有利于事件 A 的可能结果数与该事件中所有可能结果数之比. 实际上, 这个定义隐含了每种结果是等概率的. 而且, 严格地说, 所有可能结果是有限的. 根据这个定义, 考查例 4.1.1, 可知

例 4.1.2 在例 4.1.1 中, 计算各事件概率.

(1) 投骰子

① A: 投得点数为 1. $P(A)=1/6$;

② B: 投得点数不大于 2. $P(B)=2/6=1/3$;

③ C: 投得点数为偶数. $P(C)=3/6=1/2$;

④ D: 投得点数小于 1. $P(D)=0$.

(2) 抓牌

① A: 抓到黑桃. $P(A)=13/52=1/4$;

② B: 抓到红牌. $P(B)=26/52=1/2$;

③ C: 抓到点 (A,K,Q,J). $P(C)=(4\times 4)/52=4/13$. □

定义 4.1.1 (1) 两事件 A, B 称为互斥的, 如果

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B). \tag{4.1.1}$$

(2) 两事件 A, B 称为独立的, 如果

$$P(A\cap B)=P(A)P(B). \tag{4.1.2}$$

(3) 设事件组 A_i, $i=1,\cdots,n$ 为两两独立的事件. 这组事件称为完备组, 如果

$$P(\cup_{i=1}^n A_i)=1. \tag{4.1.3}$$

定义 4.1.2 在事件 A 发生的条件下事件 B 发生的概率, 称为 B 在 A 下的条件概率, 记作 $P(B|A)$.

初等概率里有一些常用公式, 述如下.

定理 4.1.1 (1) 加法定理

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=\sum_{k=1}^n\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n}(-1)^{k-1}P(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_k}). \tag{4.1.4}$$

(2) 条件概率

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}. \tag{4.1.5}$$

(3) 全概率公式: 设 A_i, $i=1,\cdots,n$ 为一完备组, 则

$$P(B)=\sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i). \tag{4.1.6}$$

(4) 假设事件定理

$$P(A_i|B)=\frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(B)}. \tag{4.1.7}$$

(5) 贝叶斯 (Bayes) 公式: 设 A_i, $i=1,\cdots,n$ 为一完备组, 则

$$P(A_i|B)=\frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(A_j)P(B|A_j)}. \tag{4.1.8}$$

为计算所有可能情况与有利情况, 排列组合起着重要作用. 这种方法在许多实际问题, 如一些工程问题的控制设计中, 仍然十分有效. 下面给出一些典型例子.

例 4.1.3 某一批产品, 其中合格 n 件, 不合格 m 件.

(1) 查得前 s 件均合格, 问下一件仍合格的概率.

样本集现变为 $n-s$ 件合格, m 件不合格. 设 A 为下一件合格, 则

$$P(A)=\frac{n-s}{n+m-s}.$$

(2) 查 s 件, k 件合格的概率.

全部可能情况: C_{m+n}^{s}, 有利情况 (A): $C_n^kC_m^{s-k}$. 故

$$P(A)=\frac{C_n^kC_m^{s-k}}{C_{m+n}^{s}}=\frac{n!m!s!(n+m-s)!}{k!(n-k)!(s-k)!(m-s+k)!(m+n)!}$$

(3) 查 s 件, 前 k 件均合格, 求在此情况下 s 件全合格的概率.

A: 前 k 件合格, B: s 件均合格. 则

$$\begin{aligned}P(B|A)&=\tfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{C_n^s}{C_{n+m}^s}}{\frac{C_n^k}{C_{n+m}^k}}\\&=\tfrac{(n-k)(n-k-1)\cdots(n-s+1)}{(n+m-k)(n+m-k-1)\cdots(n+m-s+1)}.\end{aligned}$$

□

例 4.1.4 某一批产品, 分别由三个工厂生产, 产量分别为 m_i, 合格律分别为 r_i, $i=1,2,3$.

(1) 任选 1 产品, 问查到不合格产品的概率.

设 A_i 为第 i 个工厂的产品, B 为合格产品, 由全概率公式

$$\begin{aligned}P(B)&=P(B|A_1)P(A_1)+P(B|A_2)P(A_2)+P(B|A_3)P(A_3)\\&=\tfrac{r_1m_1}{m_1+m_2+m_3}+\tfrac{r_2m_2}{m_1+m_2+m_3}+\tfrac{r_3m_3}{m_1+m_2+m_3}.\end{aligned}$$

因此, 不可格品概率为

$$P(B^c)=1-P(B)=1-\frac{r_1m_1+r_2m_2+r_3m_3}{m_1+m_2+m_3}.$$

(2) 任选 2 产品, 问查到不合格产品的概率.

A_i 意义同上, B 为两个全好. 用 $A_i \times A_j$ 表示选到的两产品一个出自 A_i, 一个出自 A_j. 现在 $A_1 \times A_1$, $A_1 \times A_2$, $A_1 \times A_3$, $A_2 \times A_2$, $A_2 \times A_3$, $A_3 \times A_3$ 形成一个完备组. 在完备组中每个事件下 B 的条件概率容易算得, 即

$$P(B|A_i \times A_j) = r_i r_j, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

因此

$$\begin{aligned}
P(B) = {} & P(B|A_1 \times A_1)P(A_1 \times A_1) + P(B|A_1 \times A_2)P(A_1 \times A_2) \\
& + P(B|A_1 \times A_3)P(A_1 \times A_3) + P(B|A_2 \times A_2)P(A_2 \times A_2) \\
& + P(B|A_2 \times A_3)P(A_2 \times A_3) + P(B|A_3 \times A_3)P(A_3 \times A_3) \\
= {} & r_1^2 \left(\frac{m_1^2}{m^2}\right) + r_1 r_2 \left(\frac{m_1 m_2}{m^2}\right) + r_1 r_3 \left(\frac{m_1 m_3}{m^2}\right) \\
& + r_2^2 \left(\frac{m_2^2}{m^2}\right) + r_2 r_3 \left(\frac{m_2 m_3}{m^2}\right) + r_3^2 \left(\frac{m_3^2}{m^2}\right),
\end{aligned}$$

这里 $m = m_1 + m_2 + m_3$. □

几何概率是按事件点分布区域 (S) 上事件 E 有利区域 (S_E) 所占份额来确定事件 E 的概率. 即

$$P(E) = \frac{S_E}{S}. \tag{4.1.9}$$

区域可能是长度、面积或容积, 这里假定区域内概率是均匀分布的.

例 4.1.5　两人约好在 2 点至 3 点在某处见面, 到达后等 20 分钟即可离开. 问两人见面的概率?

设甲到达时刻为 x, 乙到达时刻为 y, 则有利情况为

$$|x - y| \leqslant \frac{1}{3}.$$

容易算出 (见图 4.1.1)

$$P(E) = \frac{S_E}{S} = \frac{5}{9}.$$

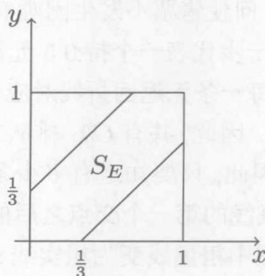


图 4.1.1　有利区域 S_E

□

几何方法有时会引起歧义, 见下例.

例 4.1.6 (伯特朗悖论 (Bertrand Paradox)**)**　在圆内任作一弦, 问其长超过该圆内接等边三角形边长的概率是多少?

(1) 设半径为 1. 由对称性, 可假定弦与 y 轴平行 (图 4.1.2 (a)). 那么, 有利情形为 $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3}{2}$. 则

$$P(E) = \frac{1.5-0.5}{2} = \frac{1}{2}.$$

(2) 由对称性, 固定弦的一个端点, 考虑它与过该点的直径间的交角 θ (图 4.1.2 (b)). 那么, 有利情形为 $|\theta| \leqslant 30°$. 则

$$P(E) = \frac{30}{90} = \frac{1}{3}.$$

(3) 讨论弦中点位置 (图 4.1.2 (c)). 那么, 有利情形 S_E 为半径为 0.5 的小圆内. 则

$$P(E) = \frac{\pi(0.5)^2}{\pi 1^2} = \frac{1}{4}.$$

这个歧义实际上是由 "任作一弦" 引起的, 它未明确均匀分布的参数. 实际上, 三种考查角度导至三种概率分布. □

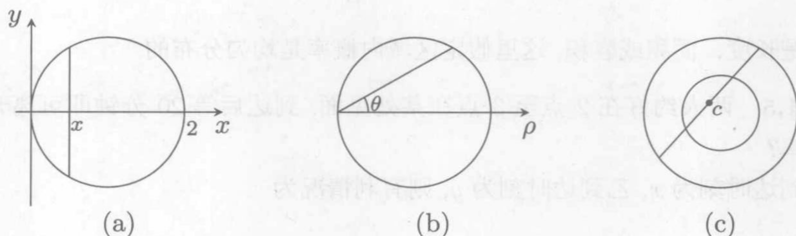


图 4.1.2　伯特朗悖论

图形方法对某些问题是十分方便的, 例如下例.

例 4.1.7　$2n$ 个人排队买票, 其中一半人持 0.5 元币, 另一半人持 1 元币. 每人买一张票, 票价 0.5 元, 售票处无零钱, 问使售票不发生困难 (困难指售票处无法找零) 的概率?

我们在平面上 x 轴方向前行一步代表一个持 0.5 元币者, y 轴方向前行一步代表一个持 1 元币者, 那么, 从 O 到 E 的每一条无返回折线对应一种排队方式 (见图 4.1.3). 例如, 图中粗虚线表示: $xyyxyyyxxxxy$. 因此, 共有 C_{2n}^n 排队方式. 发生困难的队列, 其对应的折线必与直线 $y = x + 1$ 相交. 因此, 只要知道有多少条折线与 $y = x + 1$ 相交即可. 设某折线与该直线相交, 则将其与直线的第一个交点之后的折线沿该直线对称翻转, 则它变为从 O 到 E' 的一条折线. 例如图中粗虚线变为粗实线 $xyyyxxxyyyyx$. 因为这种对应是一对一的, 则有困难的排队数 (即从 O 到 E' 的折线数) 为 C_{2n}^{n-1}. 于是, 不发生困难的概率为

$$\frac{C_{2n}^n - C_{2n}^{n-1}}{C_{2n}^n}.$$

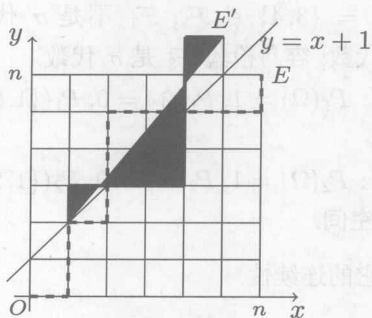


图 4.1.3 排队方式示意图

4.2 随机变量及其分布

记 Ω 为样本空间, 它的元素 $\omega \in \Omega$ 是实验的所有可能情况. $E \subset \Omega$ 称为一个事件, 所有的事件集合记作 2^{Ω}. 讨论概率时通常只关心一部分事件, $\mathcal{F} \subset 2^{\Omega}$.

定义 4.2.1 $\mathcal{F} \subset 2^{\Omega}$ 称为一个 σ 代数, 如果

(1) $\Omega \in \mathcal{F}$;

(2) 如果 $E \in \mathcal{F}$, 那么 $E^c \in \mathcal{F}$;

(3) 如果 $E_i \in \mathcal{F}, i = 1, 2, \cdots$, 那么 $\cup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{F}$.

定义 4.2.2 设 Ω 为一样本空间, $\mathcal{F} \subset 2^{\Omega}$ 为一 σ 代数. 如果存在一个集函数 $P : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$, 满足

(1) $0 \leqslant P(E) \leqslant 1, \forall E \in \mathcal{F}$;

(2) $P(\Omega) = 1$;

(3) 如果 $E_i \in \mathcal{F}, i = 1, 2, \cdots$, 并且 $E_i \cap E_j = \varnothing, i \neq j$, 那么

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i),$$

则 P 称为 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上的一个概率测度.

定义 4.2.3 设 Ω 为一样本空间, $\mathcal{F} \subset 2^{\Omega}$ 为一 σ 代数. 如果存在 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上的一个概率测度 P, 则 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 称为一个概率空间.

例 4.2.1 掷一枚骰子, 观查出现的点数, 则 $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

(1) 设

$$\mathcal{F}_1 = \{\Omega, \varnothing, \{1, 2, 3, 4\}, \{3, 4, 5, 6\}\};$$
$$\mathcal{F}_2 = \{\Omega, \varnothing, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}\};$$
$$\mathcal{F}_3 = \{\Omega, \varnothing, \{1, 2\}, \{3, 4, 5, 6\}\};$$

由于 $\{1,2,3,4\}\cap\{3,4,5,6\}=\{3,4\}\notin\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_1$ 不是 σ 代数; 由于 $\{1,2\}\cup\{3,4\}=\{1,2,3,4\}\notin\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_2$ 不是 σ 代数; 容易检验 $\mathcal{F}_3$ 是 σ 代数.

(2) 在 $\mathcal{F}_3$ 上定义 P_1 如下: $P_1(\Omega)=1, P_1(\varnothing)=0, P_1(\{1,2\})=\frac{1}{3}, P_1(\{3,4,5,6\})=\frac{2}{3}$, 则 $(\Omega,\mathcal{F}_3,P_1)$ 为一概率空间.

(3) 在 $\mathcal{F}_3$ 上定义 P_2 如下: $P_2(\Omega)=1, P_2(\varnothing)=0, P_2(\{1,2\})=\frac{2}{3}, P_2(\{3,4,5,6\})=\frac{1}{3}$, 则 $(\Omega,\mathcal{F}_3,P_2)$ 也是一个概率空间. □

概率的一个基本性质是它的连续性.

定理 4.2.1 设 $A_i\in\mathcal{F}, i=1,2,\cdots$ 为一单调序列, $\lim_{i\to\infty}A_i=A$. 则

$$\lim_{i\to\infty}P(A_i)=P(\lim_{i\to\infty}A_i)=P(A). \tag{4.2.1}$$

证明 设 $\{A_i\}$ 为单调增列. 则

$$A=\lim_{i\to\infty}A_i=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i=\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i.$$

这里 $B_i=A_i\cap A_{i-1}^c$ (令 $A_0=\varnothing$). 显然 $\{B_i\}$ 为两两互不相容事件, 于是有

$$\begin{aligned}P(A)&=P(\lim_{j\to\infty}A_j)=P(\bigcup_{j=1}^{\infty}A_j)=P(\bigcup_{j=1}^{\infty}B_j)\\&=\sum_{j=1}^{\infty}[P(A_j)-P(A_{j-1})]=\lim_{i\to\infty}\sum_{j=1}^{i}[P(A_j)-P(A_{j-1})]\\&=\lim_{i\to\infty}P(A_i).\end{aligned}$$

当 $\{A_i\}$ 为单调减列时的证明留给读者. □

定义 4.2.4 给定一个概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},P)$. $X:\Omega\to\mathbb{R}$ 称为一个随机变量, 如果对任一实数 $r\in\mathbb{R}$ 都有

$$\{\omega|X(\omega)\leqslant r\}\in\mathcal{F}.$$

注 记 $\mathcal{B}$ 为 $\mathbb{R}$ 上的 Borel 集, 那么 $(\mathbb{R},\mathcal{B})$ 是个可测空间 (见第 2 章), 于是随机变量 X 就是 $(\Omega,\mathcal{F})$ 到 $(\mathbb{R},\mathcal{B})$ 的一个可测函数, 也称 X 是 $\mathcal{F}$ 可测的.

定义 4.2.5 给定一个概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},P)$.

(1) X 为其上一随机变量, 称 $\sigma(X)$ 为由 X 生成的 σ 代数, 如果其是包含 $\{X^{-1}(B)|B\in\mathcal{B}\}$ 的最小 σ 代数.

(2) $\{X_i|i\in I\}$ 为一族随机变量, 称 $\sigma\{X_i|i\in I\}$ 为由 $\{X_i|i\in I\}$ 生成的 σ 代数, 如果其是包含 $\{X_i^{-1}(B)|B\in\mathcal{B},i\in I\}$ 的最小 σ 代数.

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 称为 Borel 函数, 如果任意 Borel 集的原像是 Borel 集, 我们有下面的定理.

定理 4.2.2 [55] (1) f 为 Borel 函数, X 为随机变量, 则 $f(X)$ 是 $\sigma(X)$ 可测的; (2) (Doob-Dynkin) X 为一随机变量, 则对任意 $\sigma(X)$ 可测的随机变量 Y, 存在 Borel 函数 f 使得 $Y = f(X)$.

定义 4.2.6 给定一个概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. 设 X 为一随机变量, 那么

$$F_X(x) := P(\omega | X(\omega) \leqslant x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{4.2.2}$$

称为 X 的分布函数.

式 (4.2.2) 常简写为 $F(x) = P(X \leqslant x)$. 分布函数有如下基本性质.

命题 4.2.1 设 $F(x)$ 为一分布函数, 则

(1) 单调性

$$F(a) \leqslant F(b), \quad a < b;$$

(2) 右连续性

$$\lim_{x \downarrow x_0} P(x) = P(x_0);$$

(3)

$$P(-\infty) = 0, \quad P(\infty) = 1.$$

一个随机变量, 如果它只能取至多可数个值 $y_1, y_2, \cdots$, 则称其为离散型随机变量. 离散型随机变量的分布函数为

$$F(x) = \sum_{y_i \leqslant x} P(X = y_i). \tag{4.2.3}$$

如果存在一个 $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ 上的可积函数 $f(x) \geqslant 0$, 使得随机变量 X 的分布函数

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(\tau) \mathrm{d}\tau, \tag{4.2.4}$$

则 X 称为一连续型随机变量, $f(x)$ 称为其分布密度.

命题 4.2.2 设 X 为一连续型随机变量, 则

(1)

$$P(X \in B) = \int_{x \in B} f(x) \mathrm{d}x, \quad \forall B \in \mathcal{B};$$

(2)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F(x) = f(x).$$

下面介绍一些常用的概率分布的例子, 先考虑离散分布.

例 4.2.2 伯努利 (Bernoulli) 试验指只有两个可能结果的重复实验. 例如掷硬币, 不是正面, 就是反面. 对于一次伯努利实验, 通常用 $X=0$ 及 $X=1$ 分别表示这两种情况. $X=1$ 通常表示 " 成功"; $X=0$ 通常表示 " 失败".

(1) 二项分布: 设某伯努利试验成功概率为 p, 问 n 次试验得到 k 次成功的概率? 设 X 为成功次数, 则显然

$$P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}, \quad k=0,1,\cdots,n. \tag{4.2.5}$$

(2) 几何分布: 设某伯努利试验成功概率为 p, 问在第 k 次首获成功的概率? 设 X 为首获成功的试验次数, 则

$$P(X=k)=p(1-p)^{k-1}, \quad k=0,1,\cdots. \tag{4.2.6}$$

□

例 4.2.3 泊松 (Poisson) 分布. 设随机变量 X 可取非负整数, 概率为

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}, \quad k=0,1,\cdots, \tag{4.2.7}$$

这里 $\lambda>0$, 则称 X 服从参数为 λ 的泊松分布.

泊松分布是二项式分布的极端情况. 考虑某电话局在 Δt 时间内接到一次电话的概率与时间长成正比, 即 $p=\alpha\Delta t$, $(\alpha>0)$. 因 Δt 很小, 假定接到多于一次电话的概率为 0. 问它在时间 t 内接到 x 次电话的概率是多少? 设 $t=n\Delta t$, 则可看作 n 次独立试验. 记 $\alpha t:=\lambda$, 则 $p=\frac{\lambda}{n}$. 利用式 (4.2.5) 可得

$$\begin{aligned}
P(X=x) &= C_n^x\left(\tfrac{\lambda}{n}\right)^x\left(1-\tfrac{\lambda}{n}\right)^{n-x}\\
&= \tfrac{n(n-1)\cdots(n-x+1)}{n^x}\times\tfrac{1}{x!}\left[\left(1-\tfrac{\lambda}{n}\right)^{-\frac{n}{\lambda}}\right]^{-\lambda}\left(1-\tfrac{\lambda}{n}\right)^{-x}\\
&\to \tfrac{1}{x!}\lambda^x\mathrm{e}^{-\lambda}, \quad \text{当}\, n\to\infty\, \text{时}.
\end{aligned}$$

□

再看连续分布. 最重要的连续分布是正态分布, 这是因为中心极限定理的缘故 (见 4.6 节).

例 4.2.4 标准正态分布. 一个连续分布的随机变量 X 称为标准正态分布, 记作 $X\sim N(0,1)$, 如果它的分布密度满足 (见图 4.2.1)

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x\in\mathbb{R}. \tag{4.2.8}$$

□

利用式 (4.2.8), 可知标准正态分布的分布函数为

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{-\frac{\tau^2}{2}}\mathrm{d}\tau.$$

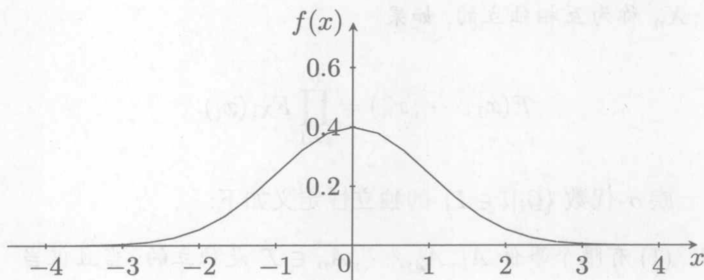


图 4.2.1 标准正态分布

设 $X_1, \cdots, X_n$ 为一组随机变量, 它们的联合分布函数定义为

$$F(x_1, \cdots, x_n) = P(X_1 \leqslant x_1, \cdots, X_n \leqslant x_n), \quad x_i \in \mathbb{R}. \tag{4.2.9}$$

联合分布函数有如下性质.

命题 4.2.3 联合分布函数 $F(x_1, \cdots, x_n)$ 满足

(1) 设 $x_i \leqslant y_i$, $i = 1, \cdots, n$, 则

$$F(x_1, \cdots, x_n) \leqslant F(y_1, \cdots, y_n).$$

(2) $F(x_1, \cdots, x_n)$ 对每个 x_i 右连续.

(3)

$$F(+\infty, \cdots, +\infty) = 1;$$
$$F(x_1, \cdots, x_{i-1}, -\infty, x_{i+1}, \cdots, x_n) = 0, \quad \forall i.$$

(4) 设 $x_i \leqslant y_i$, $i = 1, \cdots, n$. 则

$$F(y_1, \cdots, y_n) - \sum_{i=1}^{n} F_i + \sum_{i<j} F_{i,j} \pm \cdots + (-1)^n F(x_1, \cdots, x_n) \geqslant 0.$$

这里

$$F_{i_1, i_2, \cdots, i_k} = F(z_1, z_2, \cdots, z_n),$$

其中

$$z_i = \begin{cases} x_i, & i \in \{i_1, i_2, \cdots, i_k\} \\ y_i, & \text{其他}. \end{cases}$$

定义 4.2.7 设 $X_1, \cdots, X_n$ 有联合分布函数 $F(x_1, \cdots, x_n)$, $I = \{i_1, \cdots, i_k\} \subset \{1, 2, \cdots, n\}$.

(1) $X_1, \cdots, X_n$ 关于 $X_{i_1}, \cdots, X_{i_k}$ 的边缘分布, 定义为

$$F_{X_{i_1}, \cdots, X_{i_k}}(x_{i_1}, \cdots, x_{i_k}) = \lim_{x_j \to +\infty,\ j \notin I} F(x_1, \cdots, x_n).$$

(2) $X_1, \cdots, X_n$ 称为互相独立的, 如果

$$F(x_1, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(x_i).$$

更一般的, 一族 σ-代数 $\{\mathcal{G}_i | i \in I\}$ 的独立性定义如下:

定义 4.2.8 (1) 有限个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n \in \mathcal{F}$ 是独立的, 当且仅当

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n).$$

(2) 有限个 σ 代数 $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \cdots, \mathcal{G}_n$ 是独立的, 当且仅当任意 n 个事件 $A_i \in \mathcal{G}_i, i = 1, \cdots, n$ 是独立的.

(3) 一族 σ 代数 $\{\mathcal{G}_i | i \in I\}$ 是独立的, 当且仅当其中任意有限个是独立的.

可以证明, 随机变量的独立性等价于它们各自所生成的 σ 代数的独立性 (见习题 4.9). 下面再介绍几个分布函数, 它们在数理统计中有广泛应用.

例 4.2.5 χ^2 分布: 设 $X_1, \cdots, X_n$ 为相互独立的标准正态分布的随机变量, $Q = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2$, 则 Q 的分布称为具有自由度 n 的 χ^2 分布, 记作 $Q \sim \chi^2(n)$, 其分布密度为

$$f(x; n) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\frac{n}{2}-1}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \tag{4.2.10}$$

其中 Gama 函数

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} \tau^{z-1}\mathrm{e}^{-\tau}\mathrm{d}\tau.$$

图 4.2.2 为 χ^2 分布的示意图.

□

例 4.2.6 t 分布 (也称学生 t 分布): 设 $X \sim N(0,1)$, $Q \sim \chi^2(n)$, X 与 Q 为相互独立的随机变量, 又

$$T = \frac{X}{\sqrt{\frac{Q}{n}}}.$$

则 T 的分布为自由度为 n 的 t 分布, 记作 $T \sim t(n)$. 其分布密度为

$$f(x; n) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{(n\pi)^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{4.2.11}$$

图 4.2.3 为 $t(3)$ 分布示意图, $t(n)$ 与标准正态分布很接近.

□

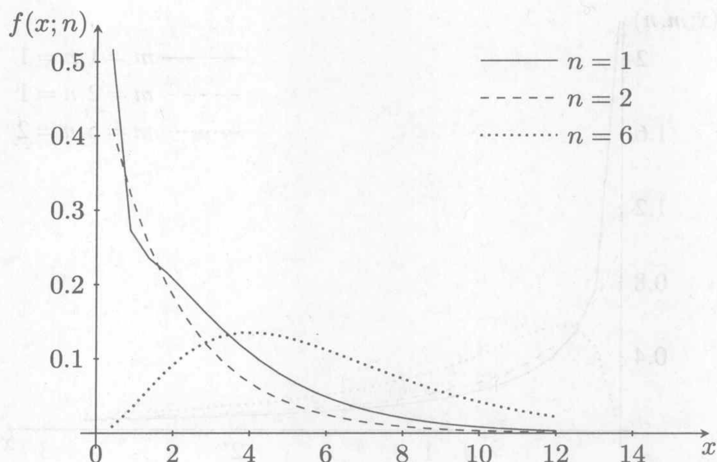


图 4.2.2 χ^2 分布

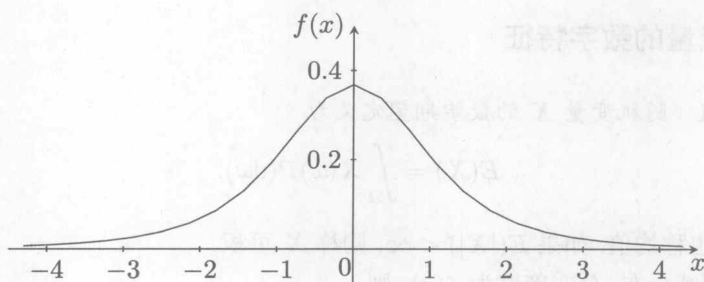


图 4.2.3 $t(3)$ 分布

例 4.2.7 F 分布: 设 $Q \sim \chi^2(m)$, $R \sim \chi^2(n)$, Q 与 R 为相互独立的随机变量, 又

$$F = \frac{Q/m}{R/n},$$

则 F 的分布称为自由度为 (m, n) 的 F 分布, 记作 $F \sim F(m, n)$, 其分布密度为

$$f(x; m, n) = \begin{cases} \frac{x^{\frac{m}{2}-1}}{B(\frac{m}{2}, \frac{n}{2})} \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}} \left(1 + \frac{mx}{n}\right)^{-\frac{m+n}{2}}, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \tag{4.2.12}$$

其中 Beta 函数

$$B(p, q) = B(q, p) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

图 4.2.4 为 $F(m, n)$ 分布示意图. □

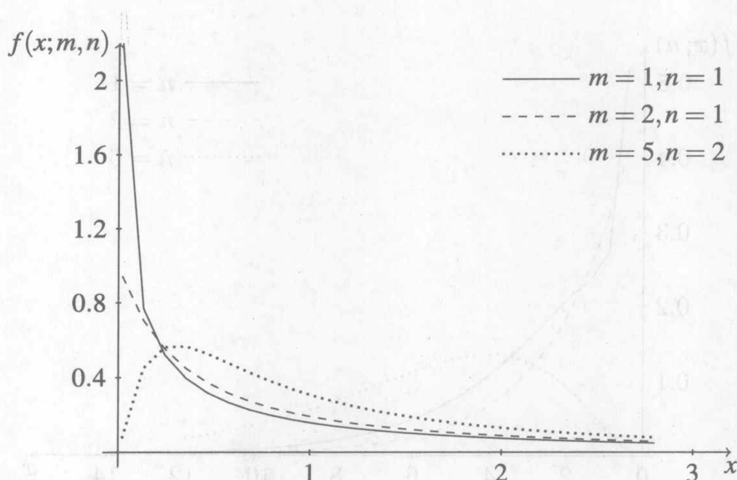


图 4.2.4 $F(m,n)$ 分布

4.3 随机变量的数字特征

定义 4.3.1 随机变量 X 的数学期望定义为

$$E(X) = \int_\Omega X(\omega)P(\mathrm{d}\omega). \tag{4.3.1}$$

数学期望也称均值. 如果 $E(|X|) < \infty$, 则称 X 可积.

设 X 为连续分布, 分布密度为 $f(x)$, 则

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\mathrm{d}x. \tag{4.3.2}$$

设 $Y = h(X)$, 这里 h 为一 Borel 函数, 则

$$E[h(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)f(x)\mathrm{d}x. \tag{4.3.3}$$

设 X 为离散分布, 则

$$E(X) = \sum_x xP(X = x). \tag{4.3.4}$$

定义 4.3.2 给定随机变量 X.

(1) $E(X^k)$ 称为 X 的 k 阶矩 $(k \geqslant 0)$;

(2) $E(|X|^k)$ 称为 X 的 k 阶绝对矩 $(k \geqslant 0)$;

(3) $E(X - EX)^k$ 称为 X 的 k 阶中心矩;

(4) X 的二阶中心矩称为 X 的方差, 记作

$$\mathrm{Var}(X) = E(X - EX)^2.$$

$\sqrt{\mathrm{Var}(X)}$ 称为 X 的标准差.

定义 4.3.3 给定随机向量 $X=(X_1,\cdots,X_n)$.

(1) X 的数学期望 $EX=(EX_1,EX_2,\cdots,EX_n)$.

(2) $E(X_i-EX_i)(X_j-EX_j)$ 称为 X_i 与 X_j 的协方差, 记作

$$\mathrm{Cov}(X_i,X_j)=E(X_i-EX_i)(X_j-EX_j)=E(X_iX_j)-E(x_i)E(X_j).$$

(3) $B=(b_{i,j})\in\mathcal{M}_{n\times n}$ 称为 X 的协方差矩阵, 这里 $b_{i,j}=\mathrm{Cov}(X_i,X_j)$.

例 4.3.1 (1) 考虑标准正态分布 $X\sim N(0,1)$, 则

$$EX=\int_{-\infty}^{\infty}x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x=0.$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X)&=EX^2-(EX)^2=\textstyle\int_{-\infty}^{\infty}x^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x\\&=-\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\textstyle\int_{-\infty}^{\infty}x\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\right)\\&=\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\Big|_{\infty}^{-\infty}+\textstyle\int_{-\infty}^{infty}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x\right]\\&=1.\end{aligned}$$

(2) 设 $\frac{Y-\mu}{\sigma}=X$, 则 $Y=\sigma X+\mu$, $EY=\mu$,

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(Y)&=EY^2-(EY)^2=\sigma^2E(X^2)+2\sigma\mu EX+\mu^2-\mu^2\\&=\sigma^2.\end{aligned}$$

Y 称作均值为 μ、方差为 σ^2 的正态分布, 记作 $Y\sim N(\mu,\sigma^2)$. Y 的分布密度为

$$f(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

□

例 4.3.2 二维随机变量 X,Y 称具有二元正态分布, 如果其联合分布密度为

$$f(x,y)=\tfrac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\tfrac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\tfrac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-\tfrac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\tfrac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\},\quad x,y\in\mathbb{R},$$

其中 $\mu_1,\mu_2\in\mathbb{R}$, $\sigma_1>0$, $\sigma_2>0$, $|\rho|<1$. 记二元正态分布为 $(X,Y)\sim N_2(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$.

(X,Y) 关于 X 的边缘分布的分布密度为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}},$$

故边缘分布为 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$.

同理可得 (X,Y) 关于 Y 的边缘分布为 $Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$. □

命题 4.3.1 (Markov 不等式) 设 X 的 r 阶绝对矩存在, 则对任一 $\varepsilon>0$, 有如下不等式

$$P(|X|\geqslant\varepsilon)\leqslant\frac{E|X|^r}{\varepsilon^r}. \tag{4.3.5}$$

证明 设 X 的分布函数为 $F(x)$, 则

$$\begin{aligned}P(|X|\geqslant\varepsilon)&=\int_{|x|\geqslant\varepsilon}\mathrm{d}F(x)\leqslant\int_{|x|\geqslant\varepsilon}\frac{|x|^r}{\varepsilon^r}\mathrm{d}F(x)\\&\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}|x|^r\mathrm{d}F(x)=\frac{E|X|^r}{\varepsilon^r}.\end{aligned}$$

□

在 Markov 不等式 (4.3.5) 中以 $X-EX$ 代替 X 并取 $r=2$, 可得

$$P(|X-EX|\geqslant\varepsilon)\leqslant\frac{\mathrm{Var}(X)}{\varepsilon^2}. \tag{4.3.6}$$

不等式 (4.3.6) 称为 Chebyshev 不等式.

4.4 随机变量的条件期望

定义 4.4.1 设 X,Y 为两个随机变量.

(1) $F(x|y):=P(X\leqslant x|Y=y)$ 称为在 $Y=y$ 条件下 X 的条件分布函数.

(2)

$$P(X=x|Y=y)=\frac{P(X=x,Y=y)}{P(Y=y)}$$

称为在 $Y=y$ 的条件下 X 的条件分布密度.

(3) 设 (X,Y) 的分布密度为 $f(x,y)$, 则在 $Y=y$ 条件下 X 的条件分布密度为

$$f(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}.$$

(4) 在 $Y=y$ 的条件下, X 的条件期望定义为

$$E(X|Y=y)=\int_{-\infty}^{\infty}x\mathrm{d}F(x|y). \tag{4.4.1}$$

如果 X,Y 是离散随机变量, 则式 (4.4.1) 可表示为

$$E(X|Y=y)=\sum_x xP(X=x|Y=y). \tag{4.4.2}$$

如果 X,Y 是连续随机变量, 则式 (4.4.1) 可表示为

$$E(X|Y=y)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x|y)\mathrm{d}x. \tag{4.4.3}$$

记随机变量 $E(X|Y)$ 为 Y 的一个函数, 即

$$E(X|Y)(y) = E(X|Y = y).$$

命题 4.4.1 设 X, Y 为两个随机变量, 那么

$$EX = E[E(X|Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} E(X|Y = y)\mathrm{d}F_Y(y), \tag{4.4.4}$$

并且

(1) 如果 X, Y 是离散的, 则

$$EX = \sum_y E(X|Y = y)P(Y = y); \tag{4.4.5}$$

(2) 如果 X, Y 是连续的, 则

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} E(X|Y = y)f_Y(y)\mathrm{d}y. \tag{4.4.6}$$

式 (4.4.4) 称为全数学期望公式, 它是全概率公式的一般化. 下面给一个简单的应用例子.

例 4.4.1 银行某日的交易数 N 为一随机变量. 设每笔交易 X_i , $i = 1, \cdots, N$ 为独立同分布的随机变量列, 且与 N 无关. 问该日的交易总额?

$$\begin{aligned}
E\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) &= E\left[E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\middle| N\right] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} E\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\middle| N = n\right)P(N = n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)P(N = n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} nEX_1P(N = n) \\
&= EX_1EN.
\end{aligned}$$

□

更一般的条件期望是对 $\mathcal{F}$ 的子代数 $\mathcal{G}$ 定义的. 在给出定义前, 我们需要下列定理.

定理 4.4.1 (Radon-Nikodym **定理**[55]) 令 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为一概率空间, $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ 为一子 σ 代数. 那么, 对任一随机变量 X, 存在一个 $\mathcal{G}$ 可测函数 Y, 使得

$$\int_{\mathcal{A}} X\mathrm{d}P = \int_{\mathcal{A}} Y\mathrm{d}P, \quad \forall \mathcal{A} \in \mathcal{G}. \tag{4.4.7}$$

并且, Y 以概率 1 唯一. 即如果 Y_1 与 Y_2 都满足式 (4.4.7), 那么 $Y_1 = Y_2$ a.s. 也就是说

$$P(Y_1 = Y_2) = 1.$$

定义 4.4.2 令 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为一概率空间, $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ 为一子 σ 代数, 那么随机变量 Y 对 $\mathcal{G}$ 的条件数学期望, 记作

$$E(X|\mathcal{G})$$

为一 $\mathcal{G}$ 可测函数, 满足式 (4.4.7).

条件数学期望的存在性、唯一性 (a.s.) 来自 Radon-Nikodym 定理. 对于另一随机变量 Y, 可对其生成的 $\sigma(Y)$ 求条件期望 $E(X|\sigma(Y))$. 因为 $E(X|\sigma(Y))$ 是 $\sigma(Y)$ 可测的, 由定理 4.2.2, 其为 Y 的 Borel 函数. 可以证明, $E(X|\sigma(Y)) = E(X|Y)$, 也就是说定义 4.4.2 包含了定义 4.4.1.

条件数学期望有如下基本性质, 这些性质都是定义的直接推论.

命题 4.4.2 令 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为一概率空间, X, Y 为随机变量, $\mathcal{H} \subset \mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ 为嵌套的 σ 代数, $a, b \in \mathbb{R}$. 那么

(1) (线性性)

$$E(aX + bY|\mathcal{G}) = aE(X|\mathcal{G}) + bE(Y|\mathcal{G});$$

(2)

$$E(E(X|\mathcal{G})) = EX;$$

(3) 如果 X 是 $\mathcal{G}$ 可测的, 那么

$$E(XY|\mathcal{G}) = XE(Y|\mathcal{G});$$

(4) 如果 X 与 $\mathcal{G}$ 独立, 那么

$$E(X|\mathcal{G}) = E(X);$$

(5)

$$E[E(X|\mathcal{G})|\mathcal{H}] = E(X|\mathcal{H});$$

(6) 如果 $X \geqslant 0$ $(X \leqslant 0)$, 那么

$$E(X|\mathcal{G}) \geqslant 0 \, (E(X|\mathcal{G}) \leqslant 0).$$

□

下面给一个例子.

例 4.4.2 定义概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 如下: $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}[0,1]$ 为 $[0,1]$ 上的 Borel 集, P 为 $[0,1]$ 上的 Lebesgue 测度. 考虑 $[0,1]$ 上的可测函数

$$X(\omega) = \mathrm{e}^{\omega}; \quad Y(\omega) = \begin{cases} 3, & \omega \in [0, \frac{1}{3}), \\ \omega, & \omega \in [\frac{1}{3}, 1], \end{cases}$$

计算 $E(X|Y)$.

先看 $\sigma(Y)$. 记 $\mathcal{B}$ 为 $\mathbb{R}$ 上的 Borel 集, 那么

$$\sigma(Y)=\left\{Y^{-1}(C)|C\in\mathcal{B}\right\}.$$

于是, 如果 $3\notin C$, 则

$$Y^{-1}(C)=C\cap[\tfrac{1}{3},1]\in\mathcal{B}[\tfrac{1}{3},1];$$

如果 $3\in C$, 则

$$\begin{aligned}Y^{-1}(C)&=C\cap[\tfrac{1}{3},1]\cup[0,\tfrac{1}{3}]\\&\in\mathcal{B}([\tfrac{1}{3},1]\cup[0,\tfrac{1}{3}]).\end{aligned}$$

因此

$$\sigma(Y)=\mathcal{B}[\tfrac{1}{3},1]\cup\left\{\mathcal{B}[\tfrac{1}{3},1]\cup[0,\tfrac{1}{3}]\right\}.$$

下面我们求 $E(X|Y)$, 满足

$$\int_{\mathcal{A}}E(X|Y)\mathrm{d}\omega=\int_{\mathcal{A}}X\mathrm{d}\omega,\quad \mathcal{A}\in\sigma(Y).\tag{4.4.8}$$

设 $\omega\in[0,\frac{1}{3})$, 则 $Y(\omega)=3$,

$$E(X|\eta)=E(X|3):=\alpha,$$

这里, $\alpha\in\mathbb{R}$ 为常值. 令 $\mathcal{A}=[0,\frac{1}{3})$, 由式 (4.4.8) 得

$$\int_0^{\frac{1}{3}}\alpha\mathrm{d}\omega=\int_0^{\frac{1}{3}}\mathrm{e}^{\omega}\mathrm{d}\omega=\mathrm{e}^{\frac{1}{3}}-1.$$

因此得

$$\alpha=3\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{3}}-1\right).$$

设 $\omega\in[\frac{1}{3},1]$. 令 $E(X|Y)=X$, 则对任一 $\mathcal{A}\in\mathcal{B}[\frac{1}{3},1]$, (4.4.8) 均成立. 因此有

$$E(X|Y)=\begin{cases}3\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{3}}-1\right), & \omega\in[0,\frac{1}{3}),\\ \mathrm{e}^{\omega}, & \omega\in[\frac{1}{3},1].\end{cases}$$

□

一个实函数 $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 称为凸的 (严格地说, 下凸), 如果

$$\varphi(\lambda x+(1-\lambda)y)\leqslant\lambda\varphi(x)+(1-\lambda)\varphi(y).$$

下面这个定理十分有用.

定理 4.4.2 [55] 给定概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 及一凸函数 φ. 设 X 与 $\varphi(X)$ 均为可积随机变量, 那么

$$\varphi(E(X|\mathcal{G}))\leqslant E(\varphi(X)|\mathcal{G}),\quad \text{a.s.}\tag{4.4.9}$$

这里 $\mathcal{G}\subset\mathcal{F}$ 为任一 σ 代数.

4.5 随机变量的收敛性

随机变量序列的各种收敛性及不同收敛性间的强弱关系, 在公理化的概率理论及随机过程研究中起着极其重要的作用. 本节研究最重要的几种收敛性.

定义 4.5.1 设 $X_n, n=1,2,\cdots$ 和 X 为同一概率空间的随机变量.

(1) (几乎处处收敛) 如果

$$P(\lim_{n\to\infty} X_n = X) = 1,$$

则称 X_n 几乎处处收敛于 X, 记作

$$\lim_{n\to\infty} X_n = X(\text{a.e.}) \quad \text{或} \quad X_n \xrightarrow{\text{a.e.}} X.$$

(2) (r 阶矩收敛 ($r>0$)) 如果

$$\lim_{n\to\infty} E|X_n - X|^r = 0,$$

则称 X_n 依 r 阶矩收敛于 X, 记作

$$\lim_{n\to\infty} X_n = X(L^r) \quad \text{或} \quad X_n \xrightarrow{L^r} X.$$

(3) (依概率收敛) 如果对任给 $\varepsilon>0$ 有

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| \geqslant \varepsilon) = 0,$$

则称 X_n 依概率收敛于 X, 记作

$$\lim_{n\to\infty} X_n = X(P) \quad \text{或} \quad X_n \xrightarrow{P} X.$$

在以下定义中, X 与 $\{X_n\}$ 不必属于同一概率空间.

定义 4.5.2 设随机变量 $X_n, n=1,2,\cdots$ 和 X 的分布函数分别为 $F_n, n=1,2,\cdots$ 和 F, F 的连续点的集合记作 $C(F)$. 如果

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x), \quad x\in C(F),$$

则称 X_n 依分布收敛于 X, 记作

$$\lim_{n\to\infty} X_n = X(d) \quad \text{或} \quad X_n \xrightarrow{d} X.$$

下面讨论这四种收敛性之间的关系.

定理 4.5.1 如果 $X_n \xrightarrow{\text{a.e.}} X$, 则 $X_n \xrightarrow{P} X$.

证明 设对某个点 $\omega \in \Omega$, 有

$$\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega). \tag{4.5.1}$$

因此, 对任一 $\varepsilon > 0$, 均有

$$\lim_{n\to\infty} |X_n(\omega) - X(\omega)| = 0 < \varepsilon.$$

由定义, 几乎处处收敛意味着满足式 (4.5.1) 的集合的测度为 1. 于是

$$\lim_{n\to\infty} P\left(|X_n - X| < \varepsilon\right) = 1.$$

□

它的逆命题不成立, 见下例.

例 4.5.1 设 $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}[0,1]$, P 为 Lebesgue 测度. 定义一族随机变量如下

$$Y_{ij}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \left[\frac{j-1}{i}, \frac{j}{i}\right], \\ 0, & \text{否则}; \quad i = 1, 2, \cdots; \ j = 1, 2, \cdots, i. \end{cases}$$

见图 4.5.1.

令 $X_1 = Y_{11}$, $X_2 = Y_{21}$, $X_3 = Y_{22}$, $X_4 = Y_{31}$, $\cdots$, $X_0 = 0$. 那么

$$X_n \xrightarrow{P} X_0 = 0.$$

但是

$$\left\{\omega \middle| \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = 0\right\} = \varnothing.$$

□

定理 4.5.2 如果 $X_n \xrightarrow{L_r} X$, 则 $X_n \xrightarrow{P} X$.

证明 如果

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| \geqslant \varepsilon) = \delta > 0,$$

那么

$$\lim_{n\to\infty} E|X_n - X|^r \geqslant \delta\varepsilon^r.$$

□

它的逆命题不成立, 见下例.

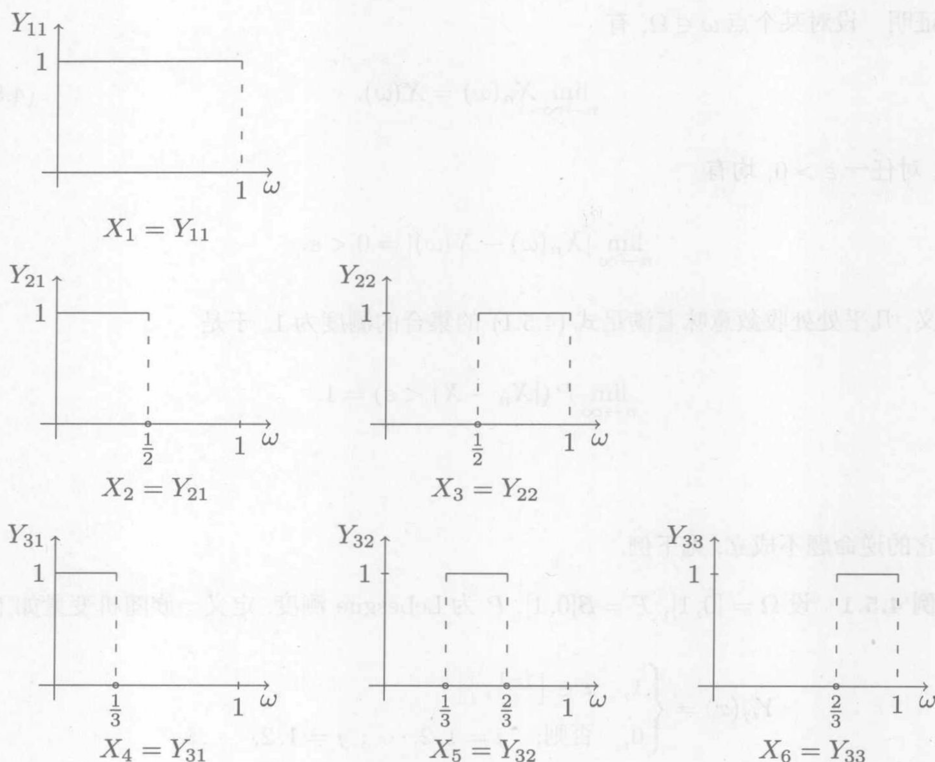


图 4.5.1　随机变量 Y_{ij}

例 4.5.2　设概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 同例 4.5.1. 定义一族随机变量如下

$$X_n(x) = \begin{cases} 2^n, & x \in \left[0, \frac{1}{n}\right], \\ 0, & \text{其他}; \quad n = 1, 2, \cdots. \end{cases}$$

那么

$$X_n \xrightarrow{P} X_0 = 0.$$

但是

$$E|X_n - 0| = \frac{2^n}{n} \to \infty.$$

□

定理 4.5.3　如果 $X_n \xrightarrow{P} X$, 则 $X_n \xrightarrow{d} X$.

证明　先证对任意 $\varepsilon > 0$

$$P(X_n \leqslant x) \leqslant P(X \leqslant x + \varepsilon) + P(|X_n - X| \geqslant \varepsilon).$$

$$
\begin{aligned}
P(X_n \leqslant x) &= P(X_n \leqslant x, X \leqslant x+\varepsilon) + P(X_n \leqslant x, X > x+\varepsilon) \\
&\leqslant P(X \leqslant x+\varepsilon) + P(X_n - X \leqslant x - X, x - X < -\varepsilon) \\
&\leqslant P(X \leqslant x+\varepsilon) + P(X_n - X \leqslant -\varepsilon) \\
&\leqslant P(X \leqslant x+\varepsilon) + P(X_n - X \leqslant -\varepsilon) + P(X_n - X \geqslant \varepsilon) \\
&= P(X \leqslant x+\varepsilon) + P(|X_n - X| \geqslant \varepsilon).
\end{aligned}
$$

类似地, 有

$$
P(X \leqslant x-\varepsilon) \leqslant P(X_n \leqslant x) + P(|X_n - X| \geqslant \varepsilon),
$$

于是有

$$
P(X \leqslant x-\varepsilon) - P(|X_n - X| \geqslant \varepsilon) \leqslant P(X_n \leqslant x) \leqslant P(X \leqslant x+\varepsilon) + P(|X_n - X| \geqslant \varepsilon).
$$

因为 x 是 $F(x)$ 的连续点, 上式先令 n 趋于无穷, 再令 ε 趋于0 即得

$$
\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x).
$$

□

它的逆命题也不成立, 见下例.

例 4.5.3 设概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 同例 4.5.1. 定义一族随机变量如下

$$
X_{2n-1}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 0.5), \\ 0, & x \in [0.5, 1], \quad n = 1, 2, \cdots, \end{cases}
$$

$$
X_{2n}(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 0.5), \\ 1, & x \in [0.5, 1], \quad n = 0, 1, 2, \cdots, \end{cases}
$$

那么

$$
F_{2n}(x) = F_{2n-1}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 0.5, & 0 \leqslant x < 1, \\ 1, & x \geqslant 1, \end{cases}
$$

故 $X_n \xrightarrow{d} X_0$, 但

$$
P(|X_{2n-1} - X(0)| = 1) = 1, \quad \forall n = 1, 2, \cdots.
$$

□

注 几乎处处收敛与矩收敛互不蕴含.

(1) 考虑例 4.5.1. 已知 $\{X_n\}$ 不几乎处处收敛于 $X_0 = 0$, 但它矩收敛于 0.

(2) 考虑例 4.5.2. 已知 $\{X_n\}$ 不矩收敛于 $X_0 = 0$, 但它几乎处处收敛于 0.

四种收敛性的关系如图 4.5.2 所示.

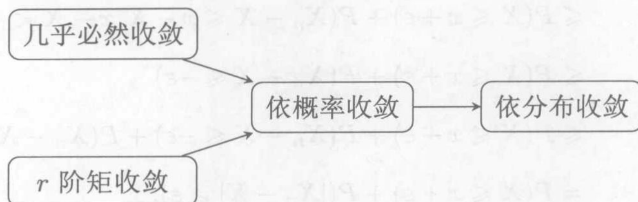


图 4.5.2 收敛性关系

注 Levi 定理 (定理 2.9.4), Fatou 引理 (定理 2.9.6) 和控制收敛定理 (定理 2.9.7) 对于随机变量的期望和极限的可交换性同样成立, 并且是十分重要的.

4.6 随机变量的极限定理

本节相对较独立, 有关定理均不证明. 有兴趣的读者可参考文献 [5, 93] 或其他标准概率论教程.

4.6.1 大数定理

考察一个独立随机试验序列, 设在每次试验中 A 事件发生的概率为 p. 记随机变量序列

$$X_n = \begin{cases} 1, & \text{在第 } n \text{ 次试验 } A \text{ 发生}, \\ 0, & \text{在第 } n \text{ 次试验 } A \text{ 未发生}, \end{cases}$$

其部分和记为

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

这个独立随机试验序列称为伯努利试验序列.

从经验而言, A 事件发生的频率 S_n/n 应稳定地趋向于概率值 p, 这一点其实是整个概率论以及数理统计的基础. 大数定律实际上要说的就是这件事, 对此曾先给出严格数学刻画的是伯努利.

定理 4.6.1 (Bernoulli **大数定律**) 在一个伯努利试验序列中, 设 A 发生的概率为 p, 且 $\{X_n\}$, $\{S_n\}$ 定义如前. 则对任一 $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| > \varepsilon\right) = 0. \tag{4.6.1}$$

Bernoulli 大数定律说明 $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} p$. 比它更强的是 Borel 的下述结论.

定理 4.6.2 (Borel 强大数定律) 在一个伯努利试验序列中, 设 A 发生的概率为 p, 且 $\{X_n\}$, $\{S_n\}$ 定义如前. 则

$$P\left(\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}=p\right)=1. \tag{4.6.2}$$

Borel 强大数定律说明 $\frac{S_n}{n}\xrightarrow{\text{a.e.}}p$.

对于独立同分布的随机变量列, 有如下的强大数定律.

定理 4.6.3 (Kolmogorov 强大数定律) 设 $\{X_n\}$ 为一独立同分布的随机变量序列, $EX_i=\mu$, $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$. 则

$$P\left(\lim_{n\to\infty}\left|\frac{S_n}{n}-\mu\right|=0\right)=1, \tag{4.6.3}$$

即 $S_n/n\xrightarrow{a.e.}\mu$.

对于独立不同分布的随机变量列, 有如下的大数定律.

定理 4.6.4 (Chebyshev 大数定律) 设 $\{X_n\}$ 为两两独立的随机变量序列, $EX_i=\mu_i$, $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$, $\bar{\mu}_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\mu_i/n$. 则对任一 $\varepsilon>0$ 成立

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{S_n}{n}-\bar{\mu}_n\right|\geqslant\varepsilon\right\}=0. \tag{4.6.4}$$

即 $S_n/n\xrightarrow{p}\bar{\mu}_n$.

4.6.2 中心极限定理

粗略地说, 中心极限定理讲述的是, 自然界里大量重复而又独立出现的事物的分布都服从正态分布律.

定理 4.6.5 (DeMoivre-Laplace 中心极限定理) 设 $\{X_n\}$ 为一独立同分布的随机变量序列, $EX_i=\mu$, $\mathrm{Var}(X_i)=\sigma^2$, $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$. 则

$$\frac{S_n-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\xrightarrow{d}N(0,1). \tag{4.6.5}$$

至于独立而不同分布的随机变量序列, 其中心极限定理称为 Lyapunov 中心极限定理. 设 $\{X_n\}$ 为一独立的随机变量序列, $EX_i=0$, $i\geqslant 1$. 记

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}X_i,\quad s_n^2=ES_n^2=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}(X_i).$$

定理 4.6.6 (Lyapunov 中心极限定理) 设 $\{X_n\}$ 为一独立的随机变量序列. $EX_i = 0,\ i \geqslant 1$. 如果存在 $\delta > 0$, 使得

$$\sum_{i=1}^{n} E|X_i|^{2+\delta} = o(s_n^{2+\delta}),$$

那么

$$\frac{S_n}{s_n} \xrightarrow{d} N(0,1). \tag{4.6.6}$$

注 (1) 在 Lyapunov 中心极限定理中, $EX_i = 0$ 的假定无关紧要, 因为当其不满足时以 $X_i - EX_i$ 代替 X_i 即可.

(2) Lyapunov 中心极限定理有许多不同形式, 定理 4.6.6 是形式最简单的一种, 见文献 [67].

下面给一个例子.

例 4.6.1 在产品可靠性试验中, 设产品损坏的概率为 $p = 0.05$. 试验 120 个产品, 问 (1) 损坏不少于 5 个的概率; (2) 损坏 $5 \sim 10$ 个的概率?

注意到产品数量 $n = 120$ 足够大, 可利用 DeMoivre-Laplace 中心极限定理近似. 这是伯努利概型, 易得

$$ES_{120} = \mu = np = 6; \quad \mathrm{Var}(S_{200}) = \sigma^2 = np(1-p) = 5.7.$$

记 $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{\tau^2}{2}} \mathrm{d}\tau$ 为标准正态分布的分布函数, 那么

(1)

$$\begin{aligned} P(m \geqslant 5) &= 1 - P(m < 4.5) = 1 - \Phi\left(\tfrac{4.5-\mu}{\sigma}\right) \\ &= 1 - \Phi\left(\tfrac{4.5-6}{\sqrt{5.7}}\right) = 1 - \Phi(-0.628) \\ &= \Phi(0.628) = 0.735. \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} P(5 \leqslant m \leqslant 10) &= P(m \leqslant 10.5) - P(m \leqslant 4.5) \\ &= \Phi\left(\tfrac{10.5-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\tfrac{4.5-\mu}{\sigma}\right) \\ &= \Phi\left(\tfrac{10.5-6}{\sqrt{5.7}}\right) - \Phi\left(\tfrac{4.5-6}{\sqrt{5.7}}\right) \\ &= 0.97 - 0.735 = 0.235. \end{aligned}$$

□

4.7 注释与参考

概率论起源于 17 世纪, 当时一些赌徒提出了一些有规律而又未能用数学方法解释的问题, 这引起了惠更斯 (Huygens)、帕斯卡 (Pascal)、费马 (Fermat) 等人的注意. 由于他们的努力, 产生了概率、数学期望等重要概念. 此后, 概率论的方法被用于量测误差分

析、人口统计等自然科学问题, 使概率论得到很大发展. 18 世纪到 19 世纪的许多数学家, 如棣莫弗 (DeMoivre)、高斯 (Gauss)、泊松 (Poisson)、拉普拉斯 (Laplace)、切比雪夫 (Chebyshev) 等, 都对概率论作出了奠基性贡献. 这些结果形成了经典概率论.

从 19 世纪末到 20 世纪初, 由于统计物理学等的发展, 要求对概率论的基本概念及原理进行严格的定义和解释. 波莱尔 (Borel) 首先提出用测度论术语表述概率. 随后, 科尔莫戈罗夫 (Kolmogorov) 等人开创了以测度论为基础的公理化的概率论. 科尔莫戈罗夫提出六条公理, 使得整个概率论都可以从这些公理发展出来. 由于公理化, 使概率论成为一门以集合测度为基础, 以演绎推理为手段的近代数学的一个重要分支.

4.8　习题

4.1 (1) 在石头-剪刀-布游戏中, 甲分别以概率 0.3、0.3、0.4 出石头、剪刀、布, 乙以相同的概率 1/3 出. 问甲赢的概率是多少?

(2) 如果乙知道甲的策略, 乙的最佳策略是什么?

4.2 用 JPG 的方法对黑白图像编码, 这种编码技术要设一种颜色占优, 例如白占优. 在编码中如果已编过的点白始终占优, 就不必切换, 但如果出现黑点多于白点的情况, 就要在该点加一个切换符号. 设某图有 m 个白点, n 个黑点. 设白占优开始, 问编码中不需要切换符号的概率是多少?

4.3 对任意 $A, B \in \mathcal{F}$, 证明下列性质:

(1) $A \subset B \Rightarrow P(A) \leqslant P(B)$;

(2) $P(A \cap B) \leqslant \min(P(A), P(B))$;

(3) $P(A \cup B) \leqslant P(A) + P(B)$.

4.4 当 $\{A_i\}$ 为单调减列时证明定理 4.2.1.

4.5 证明 $X : \Omega \to \mathbb{R}$ 是随机变量, 当且仅当任意 Borel 集的原像是 $\mathcal{F}$ 可测的 (定义 4.2.4 后的注).

4.6 证明定理 4.2.2 (1).

4.7 证明命题 4.2.2.

4.8 证明 χ^2 分布、t 分布和 F 分布的密度函数分别如式 (4.2.10)、式 (4.2.11) 和式 (4.2.12) 所示.

4.9 证明随机变量 X, Y 独立等价于当 $f_X(x) \neq 0$ 时

$$f_{X|Y}(x|y) = f_X(x),$$

其中

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}.$$

4.10 证明随机变量 X、Y 独立等价于 $\sigma(X)$、$\sigma(Y)$ 独立.

4.11 求下列分布的期望与方差: (1) 二项分布; (2) 泊松分布; (3) χ^2 分布.

4.12 证明: $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为一 Borel 函数, X 为随机变量, 且 $h(X)$ 可积, 证明

$$E(h(X))=\int_{-\infty}^{\infty}h(X)\mathrm{d}F.$$

4.13 证明: $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为凸函数, $X,\varphi(X)$ 为随机变量, 则

$$\phi(E(X))\leqslant E(\varphi(X)).$$

(此式为定理 4.4.2 的特殊情形.)

4.14 证明: X 为随机变量, 如果 X 平方可积 (即 $E(X^2)\leqslant\infty$), 则 X 可积.

4.15 证明命题 4.4.1.

4.16 X,Y 为随机变量, 其联合密度函数为 $f_{XY}(x,y)$, 证明

$$E(X|Y)=\frac{\int_{\mathbb{R}}xf_{XY}(x,y)\mathrm{d}x}{\int_{\mathbb{R}}f_{XY}(x,y)\mathrm{d}x}.$$

4.17 对 $\Omega=[0,1]$, 概率测度为 $[0,1]$ 上的 Lebesgue 测度. 令

$$X(\omega)=2\omega^2,\quad Y(\omega)=\begin{cases}2\omega, & 0\leqslant\omega<\frac{1}{2},\\ 2\omega-1, & \frac{1}{2}\leqslant\omega\leqslant 1,\end{cases}$$

求 $E(X|Y)$.

4.18 对 $r>s\geqslant 1$, 证明 r 阶矩收敛蕴含 s 阶矩收敛.

4.19 $\{X_n\}$, X, Y 为可积的随机变量, $n\to\infty$ 时 $X_n\xrightarrow{\text{a.s.}}X$, 且 $|X_n|<Y$. 证明

$$X_n\xrightarrow{L_r}X,\quad n\to\infty,r\geqslant 1.$$

4.20 $\{X_n\}$ 为一列随机变量, c 为一常数, 证明当 $n\to\infty$ 时 $X_n\xrightarrow{d}c\Rightarrow X_n\xrightarrow{p}c$.

4.21 $\{X_n\}$ 独立同分布于 $[0,1]$ 上均匀分布, 求

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i}{n}$ (a.s.);

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}\sin(X_i)}{n}$ (a.s.);

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{E(\sum\limits_{i=1}^{n}\sin(X_i))}{n}$ (a.s.).

4.22 $\{X_n\}$ 独立同分布, 期望 μ, 方差 σ, 令

$$\mu_n=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i}{n},\quad \sigma_n=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu_n)^2}{n},$$

求证当 $n\to\infty$ 时, $\mu_n\xrightarrow{\text{a.s.}}\mu$, $\sigma_n\xrightarrow{\text{a.s.}}\sigma$.

4.23 $\{X_n\}$ 为一列独立的随机变量, 同分布于伯努利分布, 期望 $p \in [0.4, 0.6]$, 令

$$p_n = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}{n},$$

求最小的 n 使得

$$P\left(\frac{p_n - p}{p} \leqslant 5\%\right) \geqslant 95\%.$$

第 5 章 随机过程

本章首先介绍作为随机过程基础的鞅理论, 包括鞅和上鞅、下鞅, 介绍停时及对鞅的估计等. 然后分别讨论离散和连续时间的随机过程. 离散时间以马氏链为主, 较详细地讨论了齐次马氏过程的状态分布; 连续时间主要考虑 Wiener 过程, 目的之一是为 Itō 积分做准备. 接着讨论 Itō 积分, 导出 Itō 公式. 本章最后一部分介绍在控制论及信号处理等中起重要作用的 Kalman 滤波.

5.1 离散时间鞅理论

5.1.1 鞅、上鞅、下鞅

定义 5.1.1 (1) 设 $\{\mathcal{F}_i\}$ 为 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的一族 σ 代数, 且

$$\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \cdots \subset \mathcal{F},$$

则称 $\{\mathcal{F}_i\}$ 为一族滤链.

(2) 设 $\{\xi_i\}$ 为一族可积随机变量, $\{\mathcal{F}_i\}$ 为一族滤链. $\{\xi_i\}$ 称为对滤链 $\{\mathcal{F}_i\}$ 的鞅, 如果

① ξ_i 是 $\mathcal{F}_i$ 可测的, $i = 1, 2, \cdots$ (称 $\{\xi_i\}$ 适应于 $\{\mathcal{F}_i\}$);

②

$$E\left(\xi_{i+1} | \mathcal{F}_i\right) = \xi_i, \quad i = 1, 2, \cdots. \tag{5.1.1}$$

例 5.1.1 设 $\eta_1, \eta_2, \cdots$ 为一可积的独立随机变量序列, $E\eta_n = 0$, $n = 1, 2, \cdots$. 定义

$$\xi_n = \sum_{i=1}^{n} \eta_i$$
$$\mathcal{F}_n = \sigma\{\eta_1, \cdots, \eta_n\}, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

那么 $\{\xi_n\}$ 是对滤链 $\{\mathcal{F}_i\}$ 的鞅.

首先 ξ_n 的可积性和它对 $\mathcal{F}_n$ 的可测性, 以及 η_{n+1} 与 $\mathcal{F}_n$ 的独立性都是显然的. 下面考虑条件期望. 利用命题 4.4.2 可得

$$\begin{aligned} E\left(\xi_{n+1} | \mathcal{F}_n\right) &= E(\eta_{n+1} | \mathcal{F}_n) + E(\xi_n | \mathcal{F}_n) \\ &= E\eta_{i+1} + \xi_n \\ &= \xi_n. \end{aligned}$$

□

例 5.1.2 设 $\{\xi_i\}$ 为对滤链 $\{\mathcal{F}_i\}$ 的鞅.

$$\mathcal{G}_i = \sigma\{\xi_1, \cdots, \xi_i\}, \quad i = 1, 2, \cdots.$$

今证明, $\{\xi_i\}$ 是对滤链 $\{\mathcal{G}_i\}$ 的鞅.

因为 $\xi_j,\ j \leqslant i$ 是 $\mathcal{F}_i$ 可测, 则 $\mathcal{G}_i \subset \mathcal{F}_i$. 于是

$$\begin{aligned}\xi_i &= E(\xi_i|\mathcal{G}_i) \\ &= E\left(E(\xi_{i+1}|\mathcal{F}_i)|\mathcal{G}_i\right) \\ &= E\left(\xi_{i+1}|\mathcal{G}_i\right).\end{aligned}$$

□

定义 5.1.2 在定义 5.1.1 中,

(1) 如果等式 (5.1.1) 用不等式

$$E\left(\xi_{i+1}|\mathcal{F}_i\right) \leqslant \xi_i, \quad i = 1, 2, \cdots, \tag{5.1.2}$$

代替, 则 $\{\xi_i\}$ 称为对滤链 $\{\mathcal{F}_i\}$ 的上鞅;

(2) 如果等式 (5.1.1) 用不等式

$$E\left(\xi_{i+1}|\mathcal{F}_i\right) \geqslant \xi_i, \quad i = 1, 2, \cdots, \tag{5.1.3}$$

代替, 则 $\{\xi_i\}$ 称为对滤链 $\{\mathcal{F}_i\}$ 的下鞅.

例 5.1.3 设 $\{\xi_n\}$ 是对滤链 $\{\mathcal{F}_n\}$ 的鞅. 令 $\eta_n = \xi_n^2,\ n = 1, 2, \cdots$, 那么利用 Jensen 不等式 (见定理 4.4.2) 有

$$E^2\left[\xi_{n+1}|\mathcal{F}_n\right] \leqslant E\left(\xi_{n+1}^2|\mathcal{F}_n\right),$$

即

$$E\left(\eta_{n+1}|\mathcal{F}_n\right) \geqslant \eta_n.$$

故 $\{\xi_n^2\}$ 是对滤链 $\{\mathcal{F}_n\}$ 的下鞅. □

5.1.2 停时

考察一个重复博弈, 假设你每次投 1 个单位的赌注, 每次赢得的钱数为 η_i. 设 $\eta_1, \eta_2, \cdots$ 两两独立, 则你的 n 次所得为

$$\xi_n = \sum_{i=1}^{n} \eta_i. \tag{5.1.4}$$

设滤链为

$$\mathcal{F}_n = \sigma(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n), \quad n = 1, 2, \cdots. \tag{5.1.5}$$

为方便计, 令 $\xi_0=0$, $\mathcal{F}_0=\{\varnothing,\Omega\}$. $\mathcal{F}_k$ 的物理意义是: 你经过 k 次博弈后所积累的知识.

(1) 如果

$$E\left(\xi_{n+1}\middle|\mathcal{F}_n\right)=\xi_n,$$

则你在 $n+1$ 步的平均预期值与第 n 步一样, 博弈是公平的.

(2) 如果

$$E\left(\xi_{n+1}\middle|\mathcal{F}_n\right)\geqslant\xi_n,$$

则博弈对你有利.

(3) 如果

$$E\left(\xi_{n+1}\middle|\mathcal{F}_n\right)\leqslant\xi_n,$$

则博弈对你不利.

假如你能根据已有知识 $\mathcal{F}_k$ 来决定你在下一轮下的赌注 α_{k+1}, 即 α_{k+1} 为 $\mathcal{F}_k$ 可测, 则称其为博弈策略.

定义 5.1.3 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots$ 为一族随机变量, $\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2,\cdots$ 为一滤链. 如果 α_k 是 $\mathcal{F}_{k-1}$ 可测的, $k=1,2,\cdots$ (设 $\mathcal{F}_0=\{\Omega,\varnothing\}$), 则称 $\{\alpha_n\}$ 为一族博弈策略.

记博弈策略下的收益为

$$\begin{aligned}\zeta_n&=\alpha_1\eta_1+\alpha_2\eta_2+\cdots+\alpha_n\eta_n\\&=\alpha_1(\xi_1-\xi_0)+\alpha_2(\xi_2-\xi_1)+\cdots+\alpha_n(\xi_n-\xi_{n-1}),\quad n=1,2,\cdots,\end{aligned}$$

这里, 记 $\xi_0=0$, $\zeta_0=0$.

对博弈策略有如下定理.

定理 5.1.1 设博弈收益 $\eta_1,\eta_2,\cdots$ 两两独立, ξ_i 及 $\mathcal{F}_i$ 由式 (5.1.4) 及式 (5.1.5) 分别给出. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots$ 为一族博弈策略.

(1) 如果 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots$ 为有界序列, 且 $\xi_0,\xi_1,\xi_2,\cdots$ 为鞅, 则 $\zeta_0,\zeta_1,\zeta_2,\cdots$ 也为鞅;

(2) 如果 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots$ 为非负有界序列, 且 $\xi_0,\xi_1,\xi_2,\cdots$ 为上鞅 (下鞅), 则 $\zeta_0,\zeta_1,\zeta_2,\cdots$ 也为上鞅 (下鞅).

证明 首先, 显然有 ζ_n 是 $\mathcal{F}_n$ 可测的. 现考查

$$\begin{aligned}E\left(\zeta_{n+1}\middle|\mathcal{F}_n\right)&=E\left(\zeta_n+\alpha_{n+1}(\xi_{n+1}-\xi_n)\middle|\mathcal{F}_n\right)\\&=\zeta_n+\alpha_{n+1}\left(E(\xi_{n+1}|\mathcal{F}_n)-\xi_n\right),\end{aligned}$$

注意到 (1) 如果 $\xi_0,\xi_1,\xi_2,\cdots$ 为鞅, 则

$$E(\xi_{n+1}|\mathcal{F}_n)-\xi_n=0;$$

(2) α_{n+1} 非负, 且 $\xi_0,\xi_1,\xi_2,\cdots$ 为上鞅 (下鞅), 则

$$\alpha_{n+1}\left(E(\xi_{n+1}|\mathcal{F}_n)-\xi_n\right)\leqslant 0\ (\geqslant 0),$$

结论显见. □

定理 5.1.1 的物理意义是: 如果原来的游戏是公平的 (对你有利的, 或对你不利的), 那么不管你选择什么样的博弈策略, 它都不会改变原来游戏的性质.

定义 5.1.4 给定一滤链 $\{\mathcal{F}_n\}$. 一个取值于 $\{1, 2, \cdots, \infty\}$ 的随机变量 τ 称为一个停时, 如果

$$\{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n.$$

从下面的例子可以看出停时的物理意义.

例 5.1.4 一个粒子在相隔 10m 的两个吸收壁之间游动. 设它每一时间间隔或向左移 1m, 或向右移 1m. 假定它从 $\xi_0 = 5$ 开始, 记 $\eta_1, \eta_2, \cdots$ 为它每次的移动, 那么

$$\xi_n = \sum_{i=1}^{n} \eta_i$$

为它在 n 时刻的位置. 记 τ 为它碰到吸收壁的时刻, 则

$$\tau = \min\{n | \xi_n = 0 \text{ 或 } \xi_n = 10\}$$

令

$$\mathcal{F}_n = \sigma(\eta_1, \cdots, \eta_n).$$

我们有

$$\{\tau = n\} = \{0 < \xi_1 < 10\} \cap \cdots \cap \{0 < \xi_{n-1} < 10\} \cap [\{\xi_n = 0\} \cup \{\xi_n = 10\}].$$

显然有

$$\{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n.$$

故 τ 是一个停时. □

定义 5.1.5 设随机变量列 $\{\xi_i\}$ 适应于滤链 $\{\mathcal{F}_i\}$, τ 是该滤链的一个停时. 称 $\xi_{\tau \wedge n}$ 为停于 τ 的序列, 记作 $\{\xi_n^\tau\}$, 即

$$\xi_n^\tau(\omega) = \xi_{\tau(\omega) \wedge n}(\omega), \quad \forall \omega \in \Omega.$$

注: 这里

$$a \wedge b := \min\{a, b\}.$$

关于停于 τ 的序列, 有如下结论.

定理 5.1.2 设 τ 为一停时. 如果 ξ_n 是一个鞅 (上鞅、下鞅), 则 $\xi_{\tau \wedge n}$ 也是一个鞅 (相应地: 上鞅、下鞅).

证明 首先要证明 $\xi_{\tau \wedge n}$ 适应于滤链 $\{\mathcal{F}_n\}$. (证明留作习题, 参见习题 5.3.)

现在, 对停时 τ 定义一组随机变量

$$\alpha_n = \begin{cases} 1, & \tau > n, \\ 0, & \tau < n, \quad n = 1, 2, \cdots. \end{cases}$$

先证明 $\{\alpha_n\}$ 是一族博弈策略, 即 α_n 是 $\mathcal{F}_{n-1}$ 可测的. 设 $B \in \mathcal{B}$ 为 $\mathbb{R}$ 上的 Borel 集.

(1) 如果 $0 \notin B$ 且 $1 \notin B$, 则

$$\alpha_n^{-1}(B) = \varnothing \in \mathcal{F}_{n-1};$$

(2) 如果 $0 \in B$ 且 $1 \in B$, 则

$$\alpha_n^{-1}(B) = \Omega \in \mathcal{F}_{n-1};$$

(3) 如果 $0 \notin B$ 且 $1 \in B$, 则

$$\alpha_n^{-1}(B) = \{\tau \geqslant n\} = \{\tau \leqslant n-1\}^{\mathrm{c}} \in \mathcal{F}_{n-1};$$

(4) 如果 $0 \in B$ 且 $1 \notin B$, 则

$$\alpha_n^{-1}(B) = \{\tau < n\} = \{\tau \leqslant n-1\} \in \mathcal{F}_{n-1}.$$

因此, $\{\alpha_n\}$ 是一族博弈策略. 现在

$$\xi_{\tau \wedge n} = \alpha_1(\xi_1 - \xi_0) + \cdots + \alpha_n(\xi_n - \xi_{n-1}).$$

根据定理 5.1.1 即得结论. □

这个定理说明无论采取怎样的停止游戏的策略, 都不能改变游戏的性质.

如果 ξ_n 是鞅, 对任意 n 我们有 $E(\xi_n) = E(\xi_1)$. 但是对于停时 τ, $E(\xi_\tau)$ 并不一定等于 $E(\xi_1)$. 下面的定理给出 $E(\xi_\tau) = E(\xi_1)$ 的充分条件.

定理 5.1.3 $\{\xi_i\}$ 为对滤链 $\{\mathcal{F}_i\}$ 的鞅, τ 为停时. 如果满足以下条件

(1) $\tau \leqslant \infty$ (a.s.);

(2) ξ_τ 可积;

(3) $\lim_{n\to\infty} E(\xi_n 1_{\{\tau > n\}}) = 0$,

则 $E(\xi_\tau) = E(\xi_1)$.

证明 将 ξ_τ 写为

$$\xi_\tau = \xi_{\tau\wedge n} + (\xi_\tau - \xi_n)1_{\{\tau > n\}},$$

两边取期望, 得

$$E(\xi_\tau) = E(\xi_{\tau\wedge n}) + E(\xi_\tau 1_{\{\tau > n\}}) - E(\xi_n 1_{\{\tau > n\}}).$$

因为 $\xi_{\tau\wedge n}$ 是鞅, 所以上式右边第一项 $E(\xi_{\tau\wedge n}) = E(\xi_1)$. 由条件 (3), 第三项也趋于 0. 我们只需再证第二项趋于 0. 因为条件 (2), 则

$$E(\xi_\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} E(\xi_k 1_{\{\tau=k\}})$$

收敛, 所以其尾项

$$E(\xi_\tau 1_{\{\tau>n\}}) = \sum_{k=n+1}^{\infty} E(\xi_k 1_{\{\tau=k\}})$$

趋于 0. □

5.1.3 鞅的估计

对给定的一个随机变量 ξ 和一族滤链 $\mathcal{F}_n$, 令

$$\xi_n = E(\xi|\mathcal{F}_n). \tag{5.1.6}$$

则显然 ξ_n 是适应于 $\mathcal{F}_n$ 的鞅. 其物理意义是, 随着 n 增加, 累积的知识 $\mathcal{F}_n$ 越多, ξ_n 就能越好地估计 ξ. 一个直观的问题是, 对于给定的鞅 ξ_n, 什么情况下能找到 ξ 使得式 (5.1.6) 成立.

首先我们来讨论鞅的几乎处处收敛性, 为此, 我们介绍下面的上穿策略及一个相应的不等式.

定义 5.1.6 给定适应于 $\mathcal{F}_n$ 的一列随机变量 ξ_n 及两个实数 $a < b$, 递推地定义上穿策略: $\alpha_1 = 0$,

$$\alpha_{n+1} = \begin{cases} 1, & \alpha_n = 0 \text{ 并且 } \xi_n < a, \\ 1, & \alpha_n = 1 \text{ 并且 } \xi_n \leqslant b, \\ 0, & \text{其他情况}. \end{cases} \tag{5.1.7}$$

记 $U_n[a,b]$ 为集合 $\{k|\alpha_k = 1, \alpha_{k+1} = 0, k \leqslant n\}$ 的元素个数.

引理 5.1.1 给定适应于 $\mathcal{F}_n$ 的上鞅 ξ_n 及实数 $a < b$, 则

$$(b-a)E(U_n[a,b]) \leqslant E((\xi_n - a)^-), \tag{5.1.8}$$

其中 x^- 是 x 的负部, 即 $x^- = \max\{0, -x\}$.

证明

$$\zeta_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(\xi_i - \xi_{i-1}), \tag{5.1.9}$$

因为 ξ_n 是上鞅, 则 ζ_n 也为上鞅 (证明留作习题, 参见习题 5.2).

令 $k = U_n[a,b]$, 记 $\{u_1, u_2, \cdots, u_k\} = \{i|\alpha_i = 1, \alpha_{i+1} = 0, i \leqslant n\}$, 并且 $u_i < u_{i+1}, i = 1, \cdots, k-1$. 于是显然有

$$\zeta_{u_{i+1}} - \zeta_{u_i} \geqslant b - a,$$

$$\zeta_n - \zeta_{u_k} \geqslant -(\xi_n - a)^-.$$

于是我们有

$$\zeta_n \geqslant (b-a)U_n[a,b] - (\xi_n - a)^-,$$

两边取期望

$$E(\zeta_n) \geqslant (b-a)E(U_n[a,b]) - E((\xi_n - a)^-).$$

又因为 ζ_n 是上鞅, 有

$$E(\zeta_n) \leqslant E(\zeta_1) = 0.$$

故式 (5.1.8) 得证. □

定理 5.1.4 (Doob **鞅收敛定理**)　设 $\{\xi_n\}$ 是 (对滤链 $\{\mathcal{F}_n\}$) 的上鞅, 使得

$$M = \sup_n E(|\xi_n|) < \infty,$$

则存在一可积随机变量 ξ, 使得 $n \to \infty$ 时

$$\xi_n \xrightarrow{\text{a.s.}} \xi.$$

证明　由引理 5.1.1 我们知道

$$E(U_n[a,b]) \leqslant \frac{E((\xi_n - a)^-)}{b-a} \leqslant \frac{M + |a|}{b-a} < \infty.$$

因为 $E(U_n[a,b])$ 非增, 由 Levi 定理

$$E(\lim_{n\to\infty} U_n[a,b]) = \lim_{n\to\infty} \leqslant \frac{M+|a|}{b-a} < \infty.$$

所以

$$P\left\{\lim_{n\to\infty} U_n[a,b] < \infty\right\} = 1.$$

令

$$A = \bigcap_{a<b,\text{均为有理数}} \left\{\lim_{n\to\infty} U_n[a,b] < \infty\right\},$$

因为 A 是可数个概率为 1 的集合的交, 所以 $P(A) = 1$.

下面考察集合

$$B = \left\{\varliminf_n \xi_n < \varlimsup_n \xi_n\right\},$$

为 ξ_n 不收敛的集合. 对任意 $\omega \in B$, 总存在有理数 a, b, 使得

$$\varliminf_n \xi_n(\omega) < a < b < \varlimsup_n \xi_n(\omega).$$

这说明随着 n 增加, $\xi_n(\omega)$ 无穷多次穿过区间 $[a, b]$, 即

$$\lim_{n\to\infty} U_n[a, b](\omega) = \infty.$$

所以 $\omega \notin A$. 于是 $B \cap A = \varnothing$, 所以 $P(B) = 0$. 这说明 ξ_n 几乎处处收敛. 记 $\lim_{n\to\infty} \xi_n = \xi$ (a.s.), 下面只需再证 ξ 可积, 由 Fatou 引理

$$E(\xi) = E(\varliminf_n \xi_n) \leqslant \varliminf_n E(\xi_n) \leqslant \sup E(\xi_n) < \infty.$$

□

注 定理 5.1.4 显然对鞅也成立. 因为如果 $\{\xi_n\}$ 是下鞅, 则 $\{-\xi_n\}$ 是上鞅. 所以定理 5.1.4 对下鞅也成立.

上面定理给出了在 a.s 的意义下 ξ_n 对 ξ 的估计, 但是仍不能保证式 (5.1.6) 的成立. 为此我们要研究鞅在 L^1 意义下的收敛. 我们需要先给出一致可积的概念.

定义 5.1.7 一列随机变量 $\xi_1, \xi_2, \cdots$ 被称为是一致可积的, 如果对任意 $\varepsilon > 0$, 总存在 $M > 0$ 使得

$$\int_{\{|\xi_n|>M\}} |\xi_n| \mathrm{d}P \leqslant \varepsilon, \forall n.$$

例 5.1.5 考虑随机变量序列

$$\xi_n = n 1_{(0, \frac{1}{n^2})},$$

则显然对任意 $M > 0$, 如果 $n > M$

$$\int_{\{|\xi_n|>M\}} |\xi_n| \mathrm{d}P = \int_{(0, \frac{1}{n^2})} n \mathrm{d}P = \frac{1}{n},$$

如果 $n \leqslant M$, 有

$$\int_{\{|\xi_n|>M\}} |\xi_n| \mathrm{d}P = 0,$$

于是对任意 $\varepsilon > 0$, 取 $M > \frac{1}{\varepsilon}$ 即可知 ξ_n 是一致可积的.

但如果令

$$\eta_n = n 1_{(0, \frac{1}{n})},$$

则对任意 $M > 0$, 如果 $n > M$

$$\int_{\{|\eta_n|>M\}} |\xi_n| \mathrm{d}P = \int_{(0, \frac{1}{n})} n \mathrm{d}P = 1,$$

于是任何 $\varepsilon < 1$, 都不存在 M, 使得 $n > M$ 时, 有

$$\int_{\{|\eta_n|>M\}} |\xi_n| \mathrm{d}P < \varepsilon.$$

于是 η_n 不是一致可积的. □

下面不加证明地给出一致可积性与 L^1 收敛性的关系, 其证明见文献 [55].

定理 5.1.5 对一列随机变量 ξ_n, 有如下结论:

(1) 如果它们是 L^1 收敛, 则是一致可积的;

(2) 如果它们是一致可积的上鞅, 则是 L^1 收敛的;

(3) 如果它们是一致可积的鞅, 令 $\xi = \lim_{n\to\infty} \xi_n \ (L^1)$, $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_1, \cdots, \xi_n)$, 则 $\xi_n = E(\xi|\mathcal{F}_n)$.

最后讨论两个鞅不等式, 它们在后面的讨论中非常有用.

定理 5.1.6 (Doob 极大不等式) 设 $\{\xi_n\}$ 是 (对滤链 $\{\mathcal{F}_n\}$ 的) 非负下鞅, 那么对任一 $\lambda > 0$ 均有

$$\lambda P\left(\max_{k\leqslant n} \xi_k \geqslant \lambda\right) \leqslant E\left(\xi_n I_{\{\max_{k\leqslant n} \xi_k \geqslant \lambda\}}\right), \tag{5.1.10}$$

这里, I_A 为集合 A 的示性函数, 即

$$I_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

证明 对 $\lambda > 0$ 定义

$$\tau = \begin{cases} \min\{k \leqslant n | \xi_k \geqslant \lambda\}, & \text{存在 } k \leqslant n \text{ 使 } \xi_k \geqslant \lambda, \\ n, & \text{不存在这样的 } k. \end{cases}$$

容易验证, τ 为停时且 $\tau \leqslant n$. 因 $\{\xi_n\}$ 是下鞅, 可知

$$E(\xi_n) \geqslant E(\xi_\tau).$$

(注意这并不是由下鞅的定义可显然得到的, 见习题 5.4.)

记 $\xi_n^* = \max_{k\leqslant n} \xi_k$, 则下式显然成立

$$E(\xi_\tau) = E\left(\xi_\tau I_{\{\xi_n^* \geqslant \lambda\}}\right) + E\left(\xi_\tau I_{\{\xi_n^* < \lambda\}}\right).$$

现在如果 $\xi_n^* \geqslant \lambda$, 则 $\xi_\tau \geqslant \lambda$; 而如果 $\xi_n^* < \lambda$, 则 $\tau = n$. 于是有

$$E(\xi_n) \geqslant E(\xi_\tau) \geqslant \lambda P\left(\xi_n^* \geqslant \lambda\right) + E(\xi_n I_{\{\xi_n^* < \lambda\}}).$$

整理得

$$\lambda P\left(\xi_n^* \geqslant \lambda\right) \leqslant E(\xi_n) - E(\xi_n I_{\{\xi_n^* < \lambda\}}) = E(\xi_n I_{\{\xi_n^* \geqslant \lambda\}}).$$

□

引理 5.1.2 设 η 为非负平方可积随机变量, 那么

$$E(\eta^2) = 2\int_0^\infty tP(\eta > t)\mathrm{d}t. \tag{5.1.11}$$

证明 设 η 的分布函数为 $F(t) = P(\eta \leqslant t)$, 则

$$E(\eta^2) = \int_0^\infty t^2\mathrm{d}F(t).$$

因为 $P(\eta > t) = 1 - F(t)$, 式 (5.1.11) 变为

$$\int_0^\infty t^2\mathrm{d}F(t) = 2\int_0^\infty t(1 - F(t))\mathrm{d}t. \tag{5.1.12}$$

注意到

$$\begin{aligned}\int_0^x t^2\mathrm{d}F(t) &= \int_0^x t^2\mathrm{d}(F(t) - 1) \\ &= t^2(F(t) - 1)\Big|_0^x - 2\int_0^x t(F(t) - 1)\mathrm{d}t \qquad (5.1.13) \\ &= -x^2(1 - F(x)) + 2\int_0^x t(1 - F(t))\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

因此, 只要能证明

$$\lim_{x\to\infty} x^2(1 - F(x)) = 0, \tag{5.1.14}$$

那么式 (5.1.12) 就可由式 (5.1.13) 令 $x \to \infty$ 而得到. 设 x 的整数部分 $[x] = n \geqslant 1$, 那么

$$0 \leqslant x^2(1 - F(x)) = x^2P(\eta > x) \leqslant (n+1)^2P(\eta > n) \leqslant 4n^2P(\eta > n). \tag{5.1.15}$$

由于 η 平方可积, 则有

$$E(\eta^2) = \sum_{k=0}^\infty \int_{k\leqslant\eta<k+1} \eta^2\mathrm{d}P < \infty.$$

于是有

$$n^2P(\eta \geqslant n) \leqslant \int_{\eta\geqslant n} \eta^2\mathrm{d}P = \sum_{k=n}^\infty \int_{k\leqslant\eta<k+1} \eta^2\mathrm{d}P \to 0. \tag{5.1.16}$$

令 $x \to \infty$ 则 $n \to \infty$, 故式 (5.1.16) + 式 (5.1.15) $\Rightarrow$ 式 (5.1.14). □

定理 5.1.7 (Doob 极大 L_2 不等式) 设 $\{\xi_n\}$ 是 (对滤链 $\{\mathcal{F}_n\}$的) 非负下鞅, 那么

$$E\left|\max_{k\leqslant n} \xi_k\right|^2 \leqslant 4E\left|\xi_n\right|^2. \tag{5.1.17}$$

证明 记 $\xi_n^* = \max_{k\leqslant n}\xi_k$, 则

$$
\begin{aligned}
E|\xi_n^*|^2 &= 2\int_0^\infty tP(\xi_n^* > t)\mathrm{d}t \\
&\leqslant 2\int_0^\infty E(\xi_n I_{\xi_n^*\geqslant t})\mathrm{d}t = 2\int_0^\infty \left(\int_{\xi_n^*\geqslant t}\xi_n \mathrm{d}P\right)\mathrm{d}t \\
&= 2\int_\Omega \xi_n\left(\int_0^{\xi_n^*}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}P = 2\int_\Omega \xi_n\xi_n^*\mathrm{d}P \\
&= 2E(\xi_n\xi_n^*) \leqslant 2\sqrt{E|\xi_n|^2 E|\xi_n^*|^2}.
\end{aligned}
$$

上式首行来自引理 5.1.2, 第二行来自定理 5.1.6, 第三行利用 Fubini 定理换序, 第四行根据 Cauchy-Schwarz 不等式. 由上式两边消去 $\sqrt{E|\xi_n^*|^2}$ 即得式 (5.1.12). □

5.2 Markov 链

定义 5.2.1 设 S 为一有限或可数集, $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 为一概率空间.

(1) 一族取值于 S 的随机变量列 $\{\xi_n\}$ 称为 S 上的 Markov 链 , 如果

$$
P\left(\xi_{n+1}=s\big|\xi_0,\xi_1,\cdots,\xi_n\right)=P\left(\xi_{n+1}=s\big|\xi_n\right),\quad s\in\mathcal{S}. \tag{5.2.1}
$$

(2) Markov 链 $\{\xi_n\}$ 称为齐次的, 如果

$$
P\left(\xi_{n+1}=i\big|\xi_n=j\right)=P\left(\xi_1=i\big|\xi_0=j\right),\quad i,j\in\mathcal{S}. \tag{5.2.2}
$$

先考虑齐次和有限的情况. 设 $S=\{1,2,\cdots,s\}$, 记

$$
p(i|j)=P(x_{n+1}=j|x_n=i),\quad i,j=1,\cdots,n,
$$

$p(i|j)$ 称从状态 i 到状态 j 的一步转移概率, $T=(p(i|j))$ 称为随机矩阵 (或转移矩阵), 显然它满足

(1) $p(i|j)\geqslant 0$,

(2) $\sum\limits_{j=1}^n p(i|j)=1$.

$$
P_0 := (P(x_0=1),P(x_0=2),\cdots,P(x_0=s))^{\mathrm{T}}
$$

称为初始概率分布;

$$
P_n := (P(x_n=1),P(x_n=2),\cdots,P(x_n=s))^{\mathrm{T}}
$$

称 n 时刻概率分布. 不难验证

$$
P_n^{\mathrm{T}} = P_0^{\mathrm{T}}T^n. \tag{5.2.3}
$$

式 (5.2.3) 表明, T^n 是 n 步转移概率的随机矩阵, 记

$$p_n(i|j) = P(x_{n+m} = j|x_m = i),$$

则 $T^n = (p_n(i|j))$.

下面这个命题是显然的.

命题 5.2.1 (Chapman-Kolmogorov 等式) 设 ξ_n, $n \in \mathbb{Z}$ 为一 S 值的齐次马尔科夫链, 其 n 步转移概率为 $p_n(i|j)$, 那么

$$P_{n+k}(i|j) = \sum_{s \in S} p_n(i|s)p_k(s|j), \quad i, j \in S. \tag{5.2.4}$$

当 S 为一可数无穷集时, 随机矩阵变为一个无穷阵. 见下例.

例 5.2.1 (随机游动) 一个粒子在实轴上随机游动, 每个单位时间它以概率 p 左移一格或以概率 $q = 1 - p$ 右移一格. 设 $\xi_0 = 0$, 求其随机转移矩阵.

注意到 $S = \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$, 不难得到其转移概率矩阵为

$$T = \begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & p & 0 & q & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & p & 0 & q & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

□

随机游动是一个有用的马尔科夫链, 容易算出, 它的 n 步转移概率为

$$P(\xi_n = j|\xi_0 = i) = \begin{cases} \binom{n}{\frac{n+j-i}{2}} p^{\frac{n+j-i}{2}} q^{\frac{n-j+i}{2}}, & n - j + i \text{ 为非负偶数}, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases} \tag{5.2.5}$$

命题 5.2.2 考虑随机游动 $\{\xi_n\}$. 设 $0 < p < 1$, 那么

$$P(\xi_n = i|\xi_0 = i) \to 0, \quad n \to \infty. \tag{5.2.6}$$

证明 先设 $p \neq 0.5$. 应用式 (5.2.5) 得

$$P(\xi_n = i|\xi_0 = i) = \begin{cases} \frac{(2k)!}{(k!)^2}(pq)^k, & n = 2k, \\ 0, & n = 2k + 1. \end{cases}$$

记

$$a_k := \frac{(2k)!}{(k!)^2}(pq)^k,$$

则有

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = pq\frac{(2k+1)(2k+2)}{(k+1)^2} \to 4pq < 1.$$

故 $a_k \to 0$, $k \to \infty$. 结论显见. $p = 0.5$ 时的证明见文献 [55]. □

下面这个性质也很有用[55].

命题 5.2.3 随机游动返回出发点的概率为

$$P(\xi_n=\xi_0,\ \text{对某个}\ n>0)=1-|p-q|. \tag{5.2.7}$$

下面讨论 Markov 链的状态分类. 记从状态 i 在第 n 步首次到状态 j 的概率为

$$f_n(j|i)=P\left(\xi_n=j,\xi_k\neq j,k=1,2,\cdots,n-1|\xi_0=i\right),$$

从 i 到 i 的平均返回时间为

$$m_i:=\sum_{n=1}^{\infty}nf_n(i|i).$$

定义 5.2.2 (1) S 上的马尔可夫链 $\{\xi_n\}$ 的一个状态 i 称为常返的, 如果它从 i 出发, 终归会回到 i. 即

$$P(\xi_n=i,\ \text{对某个}\ n\geqslant 1|\xi_0=i)=1.$$

否则称其为暂态的.

(2) 一个常返状态 i 被称为是正常返的, 如果 $m_i<\infty$. 否则称其为零常返的.

(3) 称状态 j 是从状态 i 可达的并记做 $i\to j$, 如果

$$P(\xi_n=j,\ \text{对某个}\ n\geqslant 0|\xi_0=i)>0.$$

如果 $i\to j$ 并且 $j\to i$ 则称 i 与 j 是互通的, 记做 $i\leftrightarrow j$.

(4) 状态 i 称为周期的, 如果

$$d_i:=\gcd\{n|p_n(i|i)>0\}\geqslant 2,$$

这里 gcd 表示最大公约数, $d_i\geqslant 2$ 称为状态 i 的周期. 非周期正常返状态被称为遍历的.

(5) 一个集合 $C\subset S$ 被称为是闭的, 如果一旦进入 C 就无法再出去, 即

$$P(\xi_m\in S/C\ \text{对某个}\ m>n|\xi_n\in C)=0.$$

(6) 一个集合 $C\subset S$ 被称为是不可约的, 如果任意 $i,j\in C$ 是互通的.

例 5.2.2 继续考虑随机游动, 由式 (5.2.7) 我们知道, 每个状态是常返的当且仅当 $p=q=\frac{1}{2}$.

另由式 (5.2.5) 知, 无论 p 是否为 $\frac{1}{2}$, 所有状态都是互通的.

下面我们考察当 $p=\frac{1}{2}$ 时, 每个状态是正常返的还是零常返的. 为此我们对 $x\in(-1,1)$ 上定义两个函数

$$P_{ji}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}p_n(j|i)x^n,$$

$$F_{ji}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n(j|i)x^n.$$

容易看出

$$P_{ji}(x) = \begin{cases} F_{ji}(x)P_{jj}(x), & j \neq i, \\ 1 + F_{ii}(x)P_{ii}(x), & j = i. \end{cases}$$

可以证明 (见习题 5.8)

$$\sum_n nf_n(i|i) = \lim_{x\to 1} F'_{ii}(x). \tag{5.2.8}$$

由式 (5.2.5), $p_{2k+1}(i|i) = 0$,

$$p_{2n}(i|i) = \binom{2n}{n}\frac{1}{4^n},$$

所以

$$P_{ii}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}\frac{1}{4^n} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

于是可求得

$$F_{ii}(x) = 1 - (1-x^2)^{\frac{1}{2}}.$$

所以当 $x \to 1$ 时 $F'_{ii}(x) \to \infty$, 故状态 i 零常返. □

下面的定理给出了常返与暂态的另一个等价定义.

定理 5.2.1 考虑 S 上的 Markov 链 ξ_n, $i \in S$ 是常返的, 当且仅当

$$P(\xi_n = i, \text{对无穷多的 } n | \xi_0 = i) = 1;$$

是暂态的, 当且仅当

$$P(\xi_n = i, \text{对无穷多的 } n | \xi_0 = i) = 0.$$

下面关于状态的基本性质的证明留作习题 (见习题 5.10).

命题 5.2.4 $i, j \in S$, 如果 $i \leftrightarrow j$, 那么:

(1) i 是正常返的, 当且仅当 j 是正常返的;

(2) i 是零常返的, 当且仅当 j 是零常返的;

(3) i 是暂态的, 当且仅当 j 是暂态的;

(4) $d(i) = d(j)$;

(5) i 是遍历的, 当且仅当 j 是遍历的.

由上面的性质可以直接得到下面的状态分类.

定理 5.2.2 考虑 S 上的 Markov 链, 则 S 可以被划分 (互不相交) 为

$$S = T\bigcup_{j=1}^{N} C_j, \tag{5.2.9}$$

其中 T 是所有暂态的集合, C_j 是闭的不可约的常返状态集合.

例 5.2.3　继续考虑随机游动, 所有状态点都是互通的. 当 $p=\frac{1}{2}$ 时, 它们都是零常返的, 所以只有一个不可约闭子集 C, 即 $S=C$. 当 $p\neq\frac{1}{2}$, 所有状态都是暂态的, 所以 $S=T$. □

时间趋于无穷时的状态分布是 Markov 链的另一个重要问题. 这里我们不加证明地给出一些重要概念及结果.

定义 5.2.3　对于 $S=\{1,2,\cdots\}$ 上的 Markov 链 ξ_n, T 为其转移矩阵, 一个向量 $\mu=(\mu_1,\mu_2,\cdots)^{\mathrm{T}}$ 被称为其不变测度, 如果 $T\mu=\mu$, 且 $\sum\limits_{i\in S}\mu_i=1$.

定理 5.2.3　对于 $S=\{1,2,\cdots\}$ 上的 Markov 链 ξ_n, 假设 S 被划分为如式 (5.2.9) 的形式, 则对于每个正常返的集合 C_j, 存在唯一的支撑集为 C_j 的不变测度 μ^j, 满足

$$
\mu_i^j=\begin{cases}\frac{1}{m_i}, & i\in C_j,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}
$$

并且所有的不变测度是 $\{\mu^j|C_j\text{正常返}\}$ 的凸组合.

定理 5.2.4　假设 i 是 Markov 链的常返状态, 则

$$
\lim_{n\to\infty}p_n(i|i)=\frac{d_i}{m_i},
$$

$$
\lim_{n\to\infty}p_{nd_i+r}(i|j)=\frac{d_i\sum_{n=0}^{\infty}f_{nd_i+r}(i|j)}{m_i},\quad 1\leqslant r<d_i.
$$

5.3　连续时间随机过程

本节讨论连续时间的随机过程, 其中 5.3.1 节介绍一些基本概念及性质, 5.3.2 节着重介绍一类非常重要的随机过程: Wiener 过程.

5.3.1　一般概念

定义 5.3.1　一个随机过程是一族随机变量 $\{\xi(t)|t\in T\subset\mathbb{R}\}$. 对任意 $\omega\in\Omega$, 函数

$$
\xi(\cdot,\omega):t\mapsto\xi(t,\omega)
$$

被称为一条样本路径.

下面将离散时间鞅序列推广到连续时间, 离散时间鞅序列的主要结果对连续时间都有相应的结果, 我们不再一一叙述.

定义 5.3.2　(1) 一族 Ω 上的 σ 代数 $\{\mathcal{F}_t|t\in T\subset\mathbb{R}\}$ 被称为一条滤链, 如果对任意的 $s\leqslant t\in T$, 有 $\mathcal{F}_s\subset\mathcal{F}_t\subset\mathcal{F}$.

(2) 以 $t\in T$ 为参数的随机过程 $\xi(t)$ 是对于滤链 $\mathcal{F}_t$ 的鞅 (上鞅, 下鞅), 如果

① 对任意 $t \in T \subset \mathbb{R}$, $\xi(t)$ 可积;
② $\xi(t)$ 适应于滤链 $\mathcal{F}_t$, 即 $\xi(t)$ 是 $\mathcal{F}_t$ 可测的;
③ 对于任意 $s \leqslant t \in T$, $\xi(s) = E(\xi(t)|\mathcal{F}_s)$ (相应地, $\geqslant$ 或 $\leqslant$).

下面介绍几个随机过程的概念, 它们对随机控制系统很重要.

定义 5.3.3 以 $t \in T$ 为参数的随机过程 $\xi(t)$ 被称为宽平稳过程, 如果
(1) 对任意 $t \in T$, $E(\xi(t)) = \mu$;
(2) 对任意 $t, s \in T$, 自相关系数只与 $t-s$ 有关, 即

$$E(\xi(t)\xi(s)) = R(t-s)$$

例 5.3.1 以 $t \in T$ 为参数的随机过程 $w(t)$ 被称为白噪声, 如果满足
(1) 对任意 $t \in T$, $E(w(t)) = 0$;
(2) 对任意 $t, s \in T$, 有

$$E(\xi(t)\xi(s)) = \frac{N_0}{2}\delta(t-s),$$

其中 $\delta(\cdot)$ 为 Dirac δ 函数

$$\delta(x) = \begin{cases} +\infty, & x = 0, \\ 0, & x \neq 0. \end{cases}$$

则显然白噪声为宽平稳过程. □

定义 5.3.4 以 $t \in T$ 为参数的随机过程 $\xi(t)$ 被称为狭义平稳过程, 如果对任意 $t_1, t_2, \cdots, t_n \in T$, $\tau \in \mathbb{R}$, 使得 $t_1 + \tau, t_2 + \tau, \cdots, t_n + \tau \in T$, 满足 $(\xi_{t_1}, \cdots, \xi_{t_n})$ 与 $(\xi_{t_1+\tau}, \cdots, \xi_{t_n+\tau})$ 具有相同的联合分布函数.

显然平方可积的狭义平稳过程一定是宽平稳过程.

例 5.3.2 假设 $\xi(t)$ 是宽平稳过程且同分布于正态分布, 则易见其联合分布只取决于一、二阶矩, 而宽平稳性保证相关系数 $E(\xi_{t_i}\xi_{t_j}) = E(\xi_{t_i+\tau}\xi_{t_j+\tau})$, 所以它也是狭义平稳过程. □

定义 5.3.5 以 $t \in T$ 为参数的随机过程 $\xi(t)$ 被称为是有独立增量的, 如果在 T 中任给 $t_0 < t_1 < \cdots < t_n$,

$$\xi(t_1) - \xi(t_0), \xi(t_2) - \xi(t_1), \cdots, \xi(t_n) - \xi(t_{n-1})$$

是独立的.

定义 5.3.6 以 $t \in T$ 为参数的随机过程 $\xi(t)$ 被称为是有平稳增量的, 如果在对任意 $s, t \in T$ 以及所有的使得 $s+h, t+h \in T$ 的 h, $\xi(t+h) - \xi(s+h)$ 具有相同的分布.

定义 5.3.7 以 $t \geqslant 0$ 为参数的随机过程 $L(t)$ 被称为 Levy 过程, 如果其具有独立平稳增量且 $L(0) = 0$ a.s.

下面不加证明的给出 Levy 过程的两个重要性质.

命题 5.3.1 设 $L(t)$ 是 Levy 过程, 则对任意 t, $L(t)$ 是无穷可分的, 即对任意 $n\in\mathbb{N}$, 存在 n 个变量 $\{X_{ni}|i=1,2,\cdots,n\}$, 使得 $L(t)$ 与

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}X_{ni}$$

具有相同的分布. 并且, 可以选取

$$X_{ni}=L(\frac{it}{n})-L(\frac{(i-1)t}{n}).$$

命题 5.3.2 记 Levy 过程的 n 阶矩为 $\mu_n(t)=E(X^n(t))$, 则 $\mu_n(t)$ 是 t 的多项式, 且

$$\mu_n(t+s)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mu_k(t)\mu_{n-k}(s).$$

5.3.2 Wiener 过程

植物学家 Robert Brown 在用显微镜观察浮于水中的花粉运动时, 发现由于花粉间的碰撞使得花粉的运动呈非常不规则的轨迹, 这种现象被称为 Brown 运动. Wiener 过程就是来描述这种不规则运动的数学模型, 其样本路径非常不规则, 但其密度函数却十分光滑. 除了用来描述 Brown 运动, Wiener 过程在物理学、系统控制以及经济学中都十分重要. 下面给出 Wiener 过程的严格数学定义.

定义 5.3.8 以 $t\geqslant 0$ 为参数的随机过程 $W(t)$ 被称为 Wiener 过程, 如果

(1) $W(0)=0$ a.s.;

(2) 样本路径 $t\mapsto W(t)$ 几乎必然是连续的;

(3) 对任意有限时间序列 $0<t_1<t_2<\cdots<t_n$, 及 Borel 集 $A_1,A_2,\ldots,A_n$, 有

$$P(W(t_1)\in A_1,\ldots,W(t_n)\in A_n)=\int_{A_1}\cdots\int_{A_n}p(t_1,0,x_1)p(t_2-t_1,x_1,x_2)\cdots p(t_n-t_{n-1},x_{n-1},x_n)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n, \tag{5.3.1}$$

其中

$$p(t,x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-y)^2}{2t}}$$

称为转移密度.

例 5.3.3 由式 (5.3.1) 式可知

$$F_{W(t)}(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2t}}\mathrm{d}u,$$

所以 $W(t)$ 服从均值为 0 方差为 t 的正态分布. □

下面讨论 Wiener 过程的增量性质.

命题 5.3.3 Wiener 过程 $W(t)$ 是 Levy 过程.

证明 已知 $W(0)=0$ a.s., 我们需要再证其具有平稳独立的增量.

先证明其具有平稳增量. 由式 (5.3.1), $W(s)$、$W(t)$ 的联合密度分布为

$$p(s,0,x)p(t-s,x,y).$$

所以

$$\begin{aligned}
P(W(t)-W(s)\leqslant\tau)&=\int_{t-s\leqslant\tau}p(s,0,x)p(t-s,x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}p(s,0,x)\left(\int_{-\infty}^{x+\tau}p(t-s,x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}p(s,0,x)\left(\int_{-\infty}^{\tau}p(t-s,x,x+u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}p(s,0,x)\left(\int_{-\infty}^{\tau}p(t-s,0,u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x\\
&=\int_{-\infty}^{\tau}p(t-s,0,u)\mathrm{d}u.
\end{aligned}$$

这说明 $W(t)-W(s)$ 的分布只与 $t-s$ 有关, 故 $W(t)$ 是有平稳增量的.

下面证明 $W(t)$ 具有独立增量. 为简单起见, 我们只证明对 $0<s<t$, $W(t)-W(s)$ 与 $W(s)-W(0)$ 是独立的, 证明过程可平凡地推广到对任意 n 个时间段 $0=t_0<t_1<\cdots<t_n$.

$$\begin{aligned}
P(W(s)-W(0)\leqslant x,W(t)-W(s)\leqslant y)&=\int_{-\infty}^{x}p(s,0,u)\left(\int_{-\infty}^{y+u}p(t-s,u,v)\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}u\\
&=\int_{-\infty}^{x}p(s,0,u)\left(\int_{-\infty}^{y}p(t-s,0,w)\mathrm{d}w\right)\mathrm{d}u\\
&=\int_{-\infty}^{x}p(s,0,u)\mathrm{d}u\int_{-\infty}^{y}p(t-s,0,w)\mathrm{d}w\\
&=P(W(s)\leqslant x)P(W(t-s)\leqslant y)\\
&=P(W(s)\leqslant x)P(W(t)-W(s)\leqslant y).
\end{aligned}$$

□

下面给出 Wiener 过程的一个等价定义.

定理 5.3.1 以 $t\geqslant 0$ 为参数的随机过程 $W(t)$ 是 Wiener 过程, 当且仅当

(1) $W(t)$ 是 Levy 过程;

(2) 样本路径 $t\mapsto W(t)$ 几乎必然是连续的;

(3) $W(t)$ 服从均值为 0 方差为 t 的正态分布.

由命题 5.3.3 我们知道对任意 $0 \geqslant \tau \geqslant s < t$ $W(t) - W(s)$ 与 $W(\tau)$ 是独立的, 所以 $W(t) - W(s)$ 与 σ 代数

$$\mathcal{F}_s := \sigma\{W(\tau)|0 \leqslant \tau \leqslant s\}$$

是独立的. 所以

$$\begin{aligned} E(W(t)|\mathcal{F}_s) - W(s) &= E(W(t) - W(s)|\mathcal{F}_s) \\ &= E(W(t) - W(s)) = 0, \end{aligned}$$

即 $W(t)$ 是鞅.

事实上, Wiener 过程也可以用鞅来定义.

定理 5.3.2 考虑以 $t \geqslant 0$ 为参数的随机过程 $W(t)$, 及由其生成的滤链 $\mathcal{F}_t = \sigma\{W(s)|0 \leqslant s \leqslant t\}$. 则 $W(t)$ 是 Wiener 过程, 当且仅当

(1) $W(0) = 0$ a.s.;

(2) 样本路径 $t \mapsto W(t)$ 几乎必然是连续的;

(3) $W(t)$ 和 $W^2(t) - t$ 是关于滤链 $\mathcal{F}_t$ 的鞅.

接下来我们讨论 Wiener 过程样本路径的性质, 这一性质对 5.4 节的 Itō 积分是十分重要的.

定义 5.3.9 令 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T$ 为区间 $[0, T]$ 的一个划分,

$$\Delta t = \max_{0 \leqslant i \leqslant n-1} |t_{i+1} - t_i|.$$

一个函数 $f : [0, T] \to \mathbb{R}$ 的变差定义为

$$\overline{\lim_{\Delta t \to 0}} \sum_{i=0}^{n-1} |f(t_{i+1}) - f(t_i)|.$$

定理 5.3.3 Wiener 过程 $W(t)$ 的样本路径的变差几乎必然是无穷的.

证明 令 $t^n = \left\{ t_i^n = \frac{i}{n} \middle| 0 \leqslant i \leqslant n \right\}$ 为 $[0, T]$ 的等间距划分. 并记

$$\Delta_i^n W = W(t_{i+1}^n) - W(t_i^n).$$

我们想要找到子序列 t^{n_k} 使得

$$\lim_{n_k \to \infty} \sum_{i=0}^{n_k - 1} |\Delta_i^{n_k} W| = \infty \ \text{a.s.},$$

这就能保证变差

$$\overline{\lim_{\Delta t \to 0}} \sum_{i=0}^{n-1} |W(t_{i+1}) - W(t_i)| = \infty \ \text{a.s.}$$

为此, 我们先证明

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}|\Delta_i^n W|^2 = T\ (L^2). \tag{5.3.2}$$

这个式子本身也是十分重要的. 因为 $\Delta_i^n W$ 与 $\Delta_j^n W, j\neq i$ 独立, 我们有 (参见习题 5.14)

$$E\left(\left|\sum_{i=0}^{n-1}|\Delta_i^n W|^2 - T\right|^2\right) = \sum_{i=0}^{n-1}\left[E(|\Delta_i^n W|^4) - \frac{2T}{n}E(|\Delta_i^n W|^2) + \frac{T^2}{n^2}\right]$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{3T^2}{n^2} - \frac{2T^2}{n^2} + \frac{T^2}{n^2}\right)$$

$$= \frac{2T^2}{n^2} \to 0.$$

又因为 L^2 收敛则一定有子序列几乎必然收敛, 故存在 n_k 使得

$$\lim_{n_k\to\infty}\sum_{i=0}^{n_k-1}|\Delta_i^{n_k} W|^2 = T \text{ a.s.},$$

然而

$$\sum_{i=0}^{n_k-1}|\Delta_i^{n_k} W|^2 \leqslant \max_i|\Delta_i^{n_k} W|\sum_{i=0}^{n_k-1}|\Delta_i^{n_k} W|,$$

而且由 $W(t)$ 样本路径的连续性, 有

$$\lim_{n_k\to\infty}\max_i|\Delta_i^{n_k} W| = 0 \text{ a.s.},$$

所以必有

$$\lim_{n_k\to\infty}\sum_{i=0}^{n_k-1}|\Delta_i^{n_k} W| = \infty \text{ a.s.}$$

□

上面的定理说明 Wiener 过程的样本路径是非常不光滑的. 事实上, 可以证明, Wiener 过程以概率 1 对任意 $t\geqslant 0$ 都是不可导的. 我们将其一个弱化的版本留作习题: 对任意 $t\geqslant 0$, Wiener 过程以概率 1 不可导 (习题 5.16).

最后我们不加证明的将 Doob 极大 L^2 不等式从鞅推广到 Wiener 过程.

定理 5.3.4 设 $W(t), t\geqslant 0$ 是 Wiener 过程, 则对任意的 $t>0$

$$E\left(\max_{s\leqslant t}|W(s)|^2\right) \leqslant 4E\left(|W(t)|^2\right). \tag{5.3.3}$$

5.4　Itō 积分

因为 Wiener 过程 $W(t)$ 以概率 1 对任意 t 不可导, 对增量 $\mathrm{d}W(t)$, 无法按路径定义形如 $\int \xi(t)\mathrm{d}W(t)$ 的积分, 因此我们需要引入 Itō 积分来解决这一问题.

我们首先对一类简单过程定义 Itō 积分.

定义 5.4.1　(1) 设 $\mathcal{F}_t, t \geqslant 0$ 为一滤链. 随机过程 $\xi(t), t \geqslant 0$ 被称为简单过程, 如果存在 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$, 使得 $\xi(t_i)$ 是 $\mathcal{F}_{t_i}$ 可测的平方可积随机变量, 并且 $\xi(t)$ 可表示为

$$\xi(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \xi(t_i) 1_{[t_i, t_{i+1})}(t). \tag{5.4.1}$$

(2) 简单过程 $\xi(t)$ 的 Itō 积分定义为

$$I(\xi) = \sum_{i=0}^{n-1} \xi(t_i) \left(W(t_{i+1}) - W(t_i)\right). \tag{5.4.2}$$

通过直接计算, 可以知道

$$E\left(|I(\xi)|^2\right) = E\left(\int_0^\infty |\xi(t)|^2 \mathrm{d}t\right).$$

为了将 Itō 积分推广到更广泛的随机过程, 我们给出如下定义.

定义 5.4.2　(1) 满足以下两个条件随机过程 $\xi(t), t \geqslant 0$ 的集合记为 M^2:
① $E\left(\int_0^\infty |\xi(t)|^2 \mathrm{d}t\right) < \infty$;
②存在简单过程 $\xi_1(t), \xi_2(t), \cdots$, 使得

$$\lim_{n \to \infty} E\left(\int_0^\infty |\xi(t) - \xi_n(t)|^2 \mathrm{d}t\right) = 0. \tag{5.4.3}$$

(2) 记所有满足 $1_{[0,T]}\xi(t) \in M^2$ 的随机过程的集合为 M_T^2.

定义 5.4.3　(1) 对随机过程 $\xi(t) \in M^2$, 如果存在平方可积的随机变量 $I(\xi)$ 及满足式 (5.4.3) 的简单过程 $\xi_1, \xi_2, \cdots$, 使得

$$I(\xi) = \lim_{n \to \infty} I(\xi_n) \ (L^2), \tag{5.4.4}$$

则称 $I(\xi)$ 是 $\xi(t)$ 的 Itō 积分, 亦记为

$$\int_0^\infty \xi(t) \mathrm{d}W(t).$$

(2) 对随机过程 $\xi(t) \in M_T^2$, 其 Itō 积分定义为

$$I_T(\xi) := I(1_{[0,T]}\xi),$$

或记为

$$\int_0^T \xi(t)\mathrm{d}W(t).$$

可以证明, 如果 $I(\xi)$ 存在, 则

$$E(|I(f)|^2) = E(\int_0^\infty |\xi(t)|^2\mathrm{d}t).$$

例 5.4.1 我们来看两个最简单的例子.

(1) 求 $\int_0^T \mathrm{d}W(t)$.

显然 $\xi(t)\equiv 1$ 是简单函数, 所以由式 (5.4.2)

$$\int_0^T \mathrm{d}W(t) = \int_0^\infty 1_{[0,T)}\mathrm{d}W(t) = W(T) - W(0) = W(T).$$

(2) 求 $\int_0^T t\mathrm{d}W(t)$.

选取 $[0,T)$ 的等距划分 $t_i^n = \frac{iT}{n}$, $0 \leqslant i \leqslant n$. 令

$$t_n = \sum_{i=0}^{n-1} t_i^n 1_{[t_i^n, t_{i+1}^n)}$$

是简单过程, 容易证明

$$\lim_{n\to\infty} E\left(\int_0^\infty |1_{[0,T)}t - t^n|^2\mathrm{d}t\right) = 0.$$

所以 $I_T(t)$ 是 $I(t_n)$ L^2 收敛的极限.

$$\begin{aligned}
I(t_n) &= \sum_{i=0}^{n-1} t_i^n \left(W(t_{i+1}^n) - W(t_i^n)\right) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \left(t_{i-1}^n W(t_{i+1}^n) - t_i^n W(t_i^n)\right) - \sum_{i=0}^{n-1} W(t_{i+1}^n)\left(t_{i+1}^n - t_i^n\right) \\
&= TW(T) - \sum_{i=0}^{n-1} W(t_{i+1}^n)\left(t_{i+1}^n - t_i^n\right).
\end{aligned}$$

显然有

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} W(t_{i+1}^n)\left(t_{i+1}^n - t_i^n\right) = \int_0^T W(t)\mathrm{d}t, \text{ a.s.}$$

但是我们需要证明上面的收敛在 L^2 意义下也成立.

$$
\begin{aligned}
&E\left(\left|\sum_{i=0}^{n-1} W(t_{i+1}^n)\left(t_{i+1}^n - t_i^n\right) - \int_0^T W(t)\mathrm{d}t\right|^2\right)\\
&= E\left(\left|\sum_{i=0}^{n-1}\left(\int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n}(W(t_{i+1}^n) - W(t))\mathrm{d}t\right)\right|^2\right)\\
&\leqslant n\sum_{i=0}^{n-1} E\left(\left|\int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n}(W(t_{i+1}^n) - W(t))\mathrm{d}t\right|^2\right)\\
&\leqslant n\sum_{i=0}^{n-1}\left(t_{i+1}^n - t_i^n\right) E\left(\int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n}\left|W(t_{i+1}^n) - W(t)\right|^2\mathrm{d}t\right)\\
&= \frac{T^3}{2n} \to 0.
\end{aligned}
$$

综上

$$
\int_0^T t\mathrm{d}W(t) = TW(T) - \int_0^T W(t)\mathrm{d}t.
$$

□

像 Rieman 积分一样, Itō 积分同样具有线性性; 并且, 还具有鞅的性质.

命题 5.4.1 给定滤链 $\mathcal{F}_t$, $t \geqslant 0$ 及适应于滤链的随机过程 $\xi(t)$, $\eta(t)$, 实数 $a, b \in \mathbb{R}$ 及 $0 \leqslant S < T$.

(1) $I_T(a\xi + b\eta) = aI_T(\xi) + bI_T(\eta)$ (线性性);

(2) $E(I_T(\xi)|\mathcal{F}_S) = I_S(\xi)$ (鞅性).

下面的定理给出了 Itō 积分存在的一个充分条件.

定理 5.4.1 给定滤链 $\mathcal{F}_t$, $t \geqslant 0$. 如果适应于滤链的随机过程 $\xi(t)$ 的样本路径几乎必然是连续的, 则 Itō 积分 $I_T(\xi)$ 存在, 当且仅当

$$
E\left(\int_0^T |\xi(t)|^2\mathrm{d}t\right) < \infty.
$$

这里 T 可以替换为 ∞.

如果将 $X(t) = I_t(\xi)$ 看做 t 的函数, 那么我们又得到一列随机过程. 一个直观的问题是, Itō 积分是否像 Rieman 积分那样使 $X(t)$ 是 t 的连续函数? 下面的定理回答了这一问题.

定理 5.4.2 对任意 $t \geqslant 0$, 随机过程 $\xi(s) \in M_t^2$, 其 Itō 积分为 $X(t) = I_t(\xi)$. 则存在几乎必然有连续路径的随机过程 $Y(t)$, 使得

$$
P(Y(t) = X(t)) = 1, \quad t \geqslant 0,
$$

并且 $Y(t)$ 在几乎必然的意义下是唯一的.

由于上述定理, 我们总可以认为 Itō 积分的样本路径几乎必然是连续的. 我们将一类样本路径几乎必然是连续的过程叫做 Itō 过程.

定义 5.4.4 适应于滤链 $\mathcal{F}_t$ 的随机过程 $\xi(t)$ 被称为 Itō 过程, 如果其样本路径几乎必然是连续的, 且能被表示为

$$\xi(T) = \xi(0) + \int_0^T a(t)\mathrm{d}t + \int_0^T b(t)\mathrm{d}W(t), \text{ a.s.,} \tag{5.4.5}$$

其中 $a(t)$ 是适应于滤链 $\mathcal{F}_t$ 且样本路径几乎必然是 Lebsque 可积的, 对任意 $T > 0$, $b(t) \in M_T^2$.

例 5.4.2 考查例 5.4.1, 因为

$$W(T) = \int_0^T \mathrm{d}W(t),$$

$$TW(T) = \int_0^T W(t)\mathrm{d}t + \int_0^T t\mathrm{d}W(t),$$

$W(t)$ 和 $tW(t)$ 都是 Itō 过程. □

式 (5.4.5) 也可以形式上地写为

$$\mathrm{d}\xi(t) = a(t)\mathrm{d}t + b(t)\mathrm{d}W(t). \tag{5.4.6}$$

这种形式又被称为 Itō 微分. 从例 5.4.1, 例 5.4.2 可以看出判断一个随机过程是不是 Itō 过程以及求一个 Itō 过程的微分都是非常困难的. 下面的定理使我们能从简单的 Itō 过程出发, 求其复合函数的微分.

定理 5.4.3 (Itō 公式) 设 $\xi(t)$ 为 Itō 过程, 可被表示为如式 (5.4.5), $F(t,x)$ 为一实函数, F'_t、F'_x、F''_{xx} 连续, 对任意 $T > 0$, $b(t)F'_x(t,\xi(t)) \in M_T^2$. 那么

$$\begin{aligned}\mathrm{d}F(t,\xi(t)) = &\left(F't(t,\xi(t)) + F'_x(t,\xi(t))a(t) + \frac{1}{2}F''_{xx}(t,\xi(t)b^2(t))\right)\mathrm{d}t \\ &+ F'_x(t,\xi(t))b(t)\mathrm{d}W(t).\end{aligned} \tag{5.4.7}$$

例 5.4.3 已知 $W(t)$ 是 Itō 过程, 令 $F(t,x) = x^2$, 直接计算可得

$$\mathrm{d}(|W(t)|^2) = \mathrm{d}t + 2W(t)\mathrm{d}W(t).$$

□

5.5 Kalman 滤波

本章最后一节考虑随机过程在控制理论中的一个重要应用, Kalman 滤波. 我们考虑

如下的离散线性实变系统

$$X_{k+1} = \Phi_{k+1,k}X_k + B_k u_k + b_k + D_{k+1}\omega_{k+1}, \tag{5.5.1}$$

$$Y_k = C_k X_k + H_k v_{k-1} + F_k \omega_k, \tag{5.5.2}$$

其中 X_k 是 n 维复数值状态向量, Y_k 是 m 维测量的输出向量, ω_k 是 ℓ 维白噪声 (即, $E(\omega_k)=0$, $E(\omega_k\omega_j)=\delta_{kj}I$), $D_k\omega_k$ 是系统噪声, $F_k\omega_k$ 是量测噪声, b_k 是确定性干扰, u_k, v_k 是线性依赖于输出的控制.

为了更准确地分析系统, 我们想要从量测到的输出 Y_k 得到系统内部的状态 X_k. 但是因为系统有随机噪音, 得到精确的 X_k 是不可能的, 于是我们只能退而求其次, 尽可能地过滤掉噪声的信息, 求用输出信息对 X_k 的 "好" 的估计 $\hat{X}_k$, 这便是滤波问题. 于是接下来的关键问题是何为 "好" 的估计, 以及如何得到 "好" 的估计. Kalman 滤波中定义 "好" 的估计为线性无偏最小方差估计. 所谓线性, 是指估计是输出的线性函数, 即

$$\hat{X}_k = C_1 + C_2 Y_k;$$

无偏是指 $E(\hat{X}_k) = E(X_k)$; 而最小方差则是要极小化协方差

$$E\left[(X_k - \hat{X}_k)(X_k - \hat{X}_k)^*\right].$$

我们首先忽略整个系统, 来看用一个随机向量 Y 对随机向量 X 的线性最小方差无偏估计.

定义 5.5.1 令 $A \in \mathbb{C}_{n\times m}$ 为一复数值矩阵. 矩阵 X 被称作 A 的伪逆, 如果满足

$$\begin{cases} AXA = A, \\ XAX = X, \\ (AX)^* = AX, \\ (XA)^* = XA. \end{cases} \tag{5.5.3}$$

可以证明, 满足式 (5.5.3) 的矩阵 X 是唯一存在的, 记为 A^+.

命题 5.5.1 伪逆满足下面的基本性质

(1)

$$(A^*)^+ = (A^+)^*; \tag{5.5.4}$$

(2)

$$(A^+)^+ = A; \tag{5.5.5}$$

(3)

$$(A^*A)^+ = A^+(A^*)^+ = A^+(A^+)^*; \tag{5.5.6}$$

(4)

$$A^+ = (A^*A)^+A^* = A^*(AA^*)^+; \tag{5.5.7}$$

(5)

$$A^+AA^* = A^*AA^+ = A^*; \tag{5.5.8}$$

(6) 令 U 和 V 分别是 $n \times n$ 和 $m \times m$ 维酉阵, 则

$$(UAV)^+ = V^*A^+U^*. \tag{5.5.9}$$

对于 n 维随机向量 X 和 m 维随机向量 Y, 我们记协方差矩阵为

$$R_X = E[(X - E(X))(X - E(X))^*],$$

$$R_{XY} = E[(X - E(X))(Y - E(Y))^*].$$

用 Y 对 X 的估计记为 X_Y, 用 Y 对 X 的线性最小方差无偏估计记为 $\hat{X}_Y$.

对于线性估计

$$X_Y = C_1 + C_2Y,$$

如果是无偏的, 则

$$E(X_Y) = C_1 + C_2E(Y) = E(X),$$

于是有

$$C_1 = E(X) - C_2E(Y).$$

所以我们总可以把用 Y 对 X 的估计写为

$$X_Y = EX + C_2(Y - EY).$$

引理 5.5.1 (1) 用 Y 对 X 的线性最小方差无偏估计为

$$\hat{X}_Y = E(X) + R_{XY}R_Y^+(Y - E(Y)); \tag{5.5.10}$$

(2) 估计误差的协方差矩阵为

$$R_{X/Y} = R_X - R_{XY}R_Y^+R_{YX}. \tag{5.5.11}$$

证明 我们首先证明

$$R_{XY}R_Y^+R_Y = R_{XY}. \tag{5.5.12}$$

注意到

$$\begin{aligned}
&E\left\{[(I - R_Y^+R_Y)(Y - E(Y))][(I - R_Y^+R_Y)(Y - E(Y))]^*\right\}\\
&= E\left\{[(Y - E(Y)) - R_Y^+R_Y(Y - E(Y))][(Y - E(Y)) - R_Y^+R_Y(Y - E(Y))]^*\right\}\\
&= R_Y - R_Y^+R_YR_Y - R_YR_Y^*(R_Y^+)^* + R_Y^+R_YR_Y^*(R_Y^+)^*,
\end{aligned}$$

其中

$$R_Y R_Y^*(R_Y^+)^* = (R_Y^+ R_Y R_Y^*)^* = (R_Y^*)^* = R_Y,$$

于是有

$$E\left\{[(I - R_Y^+ R_Y)(Y - E(Y))][(I - R_Y^+ R_Y)(Y - E(Y))]^*\right\} = 0,$$

所以

$$(I - R_Y^+ R_Y)(Y - E(Y)) = 0,$$

于是

$$(Y - E(Y))^* = (Y - E(Y))^*(R_Y^+ R_Y)^* = (Y - E(Y))^*(R_Y^+ R_Y).$$

上式左乘 $X - E(X)$ 再求期望可得式 (5.5.12).

再利用下面几个显然成立的关系

$$R_{XY}^* = R_{YX}; \quad R_Y^* = R_Y; \quad (R_Y^+)^* = (R_Y^*)^+ = R_Y^+.$$

以及对式 (5.5.12) 两边取共轭转置

$$R_Y R_Y^+ R_{YX} = R_{YX},$$

那么误差的协方差矩阵为

$$\begin{aligned}
&E\left\{[X - E(X) - C_2(Y - E(Y))][X - E(X) - C_2(Y - E(Y))]^*\right\} \\
&= R_X - C_2 R_{YX} - R_{XY} C_2^* + C_2 R_Y C_2^* \\
&= (C_2 - R_{XY} R_Y^+) R_Y (C_2 - R_{XY} R_Y^+)^* + R_X - R_{XY} R_Y^+ R_{YX}.
\end{aligned}$$

其中只有第一项与 C_2 有关, 且该项是半正定的, 于是该项为 0, 当且仅当

$$C_2 = R_{XY} R_Y^+ + Z, \tag{5.5.13}$$

其中 $Z R_y Z^* = 0$. 于是有

$$Z(Y - E(Y))(Y - E(Y))^* Z^* = 0,$$

所以

$$Z(Y - E(Y)) = 0.$$

于是

$$\begin{aligned}
\hat{X}_Y = &E(X) + (R_{XY} R_Y^+ + Z)(Y - E(Y)) \\
= &E(X) + R_{XY} R_Y^+ (Y - E(Y)).
\end{aligned}$$

这便证明了式 (5.5.11) 和式 (5.5.12). □

我们将上述定理推广到用两个随机向量对另一个随机向量的估计.

引理 5.5.2 令 X, Y, Z 为三个不同维数的随机向量, 令 $\omega := \begin{bmatrix} Y \\ Z \end{bmatrix}$, 则用 ω 对 X 的线性最小方差无偏估计为

$$\hat{X}_\omega = \hat{X}_Y + K(Z - \hat{Z}_Y), \tag{5.5.14}$$

其中

$$K = (R_{XZ} - R_{XY}R_Y^+R_{YZ})R_{Z/Y}^+.$$

证明 记

$$R_{XZ/Y} := E(X - \hat{X}_Y)(Z - \hat{Z}_Y)^*,$$

类似于式 (5.5.12), 我们可以得到

$$R_{XZ/Y} - R_{XZ/Y}R_{Z/Y}^+R_{Z/Y} = 0.$$

于是

$$\begin{aligned}
&R_{XZ/Y} - R_{XZ/Y}R_{Z/Y}^+R_{Z/Y} \\
&= E\left[(X - \hat{X}_Y)(Z - \hat{Z}_Y)^*\right] - R_{XZ/Y}R_{Z/Y}^+E\left[(Z - \hat{Z}_Y)(Z - \hat{Z}_Y)^*\right] \\
&= E\left[(X - \hat{X}_Y - R_{XZ/Y}R_{Z/Y}^+(Z - \hat{Z}_Y))(Z - \hat{Z}_Y)^*\right] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

记 $\tilde{X} = X - \hat{X}_Y - R_{XZ/Y}R_{Z/Y}^+(Z - \hat{Z}_Y)$, 下面证明 $\hat{\tilde{X}}_\omega = 0$.

$$\begin{aligned}
&E\left[\tilde{X}(Y - E(Y))^*\right] \\
&= E\left[(X - \hat{X}_Y - R_{XZ/Y}R_{Z/Y}^+(Z - \hat{Z}_Y))(Y - E(Y))^*\right] \\
&= E\left[(X - EX - R_{XY}R_Y^+(Y - E(Y)) - \right. \\
&\qquad \left. R_{XZ/Y}R_{Z/Y}^+(Z - E(Z) - R_{ZY}R_Y^+(Y - E(Y))))(Y - E(Y))^*\right] \\
&= R_{XY} - R_{XY}R_Y^+R_Y - R_{XY/Z}R_{Z/Y}^+(R_{ZY} - R_{ZY}R_Y^+R_Y) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

所以我们有

$$\begin{aligned}
0 &= E\left[\tilde{X}(Z-\hat{Z}_Y)^*\right] \\
&= E\left[\tilde{X}(Z-E(Z)-R_{ZY}R_Y^+(Y-EY))^*\right] \\
&= E\left[\tilde{X}(Z-E(Z))^*\right]-R_{ZY}R_Y^+E\left[\tilde{X}(Y-E(Y))^*\right] \\
&= E\left[\tilde{X}(Z-E(Z))^*\right],
\end{aligned}$$

综上我们有 $E\left[\tilde{X}(\omega-E(\omega))^*\right]=0$. 注意到 $E(\tilde{X})=0$,

$$R_{\tilde{X}\omega}=E\left[(\tilde{X}-E(\tilde{X}))(\omega-E(\omega))^*\right]=0.$$

于是用 ω 对 $\tilde{X}$ 的线性最小方差无偏估计

$$\hat{\tilde{X}}_\omega=E(\tilde{X})+R_{\tilde{X}\omega}R_\omega^+(\omega-E(\omega))^*=0,$$

同时

$$\hat{\tilde{X}}_\omega=\hat{X}_\omega-\hat{X}_Y-R_{XZ/Y}R_{Z/Y}^+(Z-\hat{Z}_Y).$$

所以

$$\hat{X}_\omega=\hat{X}_Y+R_{XZ/Y}R_{Z/Y}^+(Z-\hat{Z}_Y), \tag{5.5.15}$$

其中

$$\begin{aligned}
R_{XZ/Y} &= E\left[(X-\hat{X}_Y)(Z-\hat{Z}_Y)^*\right] \\
&= E\left[(X-E(X)-R_{XY}R_Y^+(Y-E(Y)))(Z-E(Z)-R_{ZY}R_Y^+(Y-E(Y)))^*\right] \\
&= R_{XZ}-R_{XY}R_Y^+R_{YZ}.
\end{aligned}$$

□

利用引理 5.5.2 的递归关系, 我们可以得到如下的 Kalman 滤波递归式.

定理 5.5.1 考虑离散线性实变系统 (5.5.1) 和 (5.5.2). 记输出信息为 $Y^k=[Y_1^{\mathrm{T}},Y_2^{\mathrm{T}},\ldots,Y_k^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$, 用 Y^k 对状态 X_k 的线性最小方差无偏估计为 $\hat{X}_k$, 用 Y^{k-1} 对状态 X_k 的线性最小方差无偏估计为 $\hat{X}'_k$. $\hat{X}_k$ 和 $\hat{X}'_k$ 满足下面的递归式

$$\hat{X}_{k+1}=\hat{X}'_{k+1}+K_{k+1}(Y_{k+1}-C_k\hat{X}'_{k+1}-H_{k+1}v_k), \tag{5.5.16a}$$

$$\hat{X}'_{k+1}=\Phi_{k+1,k}\hat{X}_k+B_ku_k+b_k, \tag{5.5.16b}$$

$$\begin{aligned}
K_{k+1}=(P'_{k+1}C^*_{k+1}+D_{k+1}F^*_{k+1})(C_{k+1}P'_{k+1}C^*_{k+1}+F_{k+1}F^*_{k+1}+ \\
C_{k+1}D_{k+1}F^*_{k+1}+F_{k+1}D^*_{k+1}C^*_{k+1})^+,
\end{aligned} \tag{5.5.16c}$$

$$P_{k+1}=P'_{k+1}-K_{k+1}(C_{k+1}P'_{k+1}+F_{k+1}D^*_{k+1}), \tag{5.5.16d}$$

$$P'_{k+1}=\Phi_{k+1,k}P_k\Phi^*_{k+1,k}+D_{k+1}D^*_{k+1}, \tag{5.5.16e}$$

其中 $P_k := E\left[(X_k - \hat{X}_k)(X_k - \hat{X}_k)^*\right]$, $P'_k := E\left[(X_k - \hat{X}'_k)(X_k - \hat{X}'_k)^*\right]$, 并记 $\hat{X}_0 = E(X_0), P'_0 = R_{x_0}, D_0 = 0$.

证明 由式 (5.5.1) 两边同时用 Y^k 估计

$$\hat{X}'_{k+1} = \Phi_{k+1,k}\hat{X}_k + B_k u_k + b_k + D_{k+1}\hat{\omega}'_{k+1},$$

其中因为 Y^k 是 $X_0, \omega_0, \cdots, \omega_k$ 的线性函数, 与 ω_{k+1} 不相关, 所以

$$\hat{\omega}'_{k+1} = E(\omega_{k+1}) + R_{\omega_{k+1}Y^k}R^+_{Y^k}(Y^k - E(Y^k)) = E(\omega_{k+1}) = 0.$$

于是我们得到了式 (5.5.16b).

又因为 X_k 也与 ω_k 不相关,

$$\begin{aligned}
P'_{k+1} &= E\left[(X_{k+1} - \hat{X}'_{k+1})(X_{k+1} - \hat{X}'_{k+1})^*\right] \\
&= E\left\{[\Phi_{k+1,k}(X_k - \hat{X}_k) + D_{k+1}\omega_{k+1}][\Phi_{k+1,k}(X_k - \hat{X}_k) + D_{k+1}\omega_{k+1}]^*\right\} \\
&= \Phi_{k+1,k}P_k\Phi^*_{k+1,k} + D_{k+1}D^*_{k+1},
\end{aligned}$$

即式 (5.5.16e).

式 (5.5.2) 两边用 Y^k 估计, 得

$$\hat{Y}'_{k+1} = C_{k+1}\hat{X}'_{k+1} + H_{k+1}v_k.$$

由引理 5.5.2 我们知道

$$\begin{aligned}
\hat{X}_{k+1} &= \hat{X}'_{k+1} + K_{k+1}(Y_{k+1} - \hat{Y}'_{k+1}) \\
&= \hat{X}'_{k+1} + K_{k+1}(Y_{k+1} - C_{k+1}\hat{X}'_{k+1} - H_{k+1}v_k).
\end{aligned}$$

于是我们得到了式 (5.5.16a), 并且

$$K_{k+1} = R_{X_{k+1}Y_{k+1}/Y^k}R^+_{Y_{k+1}/Y^k},$$

其中

$$\begin{aligned}
R_{Y_{k+1}/Y^k} &= E\left[(Y_{k+1} - \hat{Y}'_{k+1})(Y_{k+1} - \hat{Y}'_{k+1})^*\right] \\
&= E\left\{[C_{k+1}(X_{k+1} - \hat{X}'_{k+1}) + F_{k+1}\omega_{k+1}][C_{k+1}(X_{k+1} - \hat{X}'_{k+1}) + F_{k+1}\omega_{k+1}]^*\right\} \\
&= C_{k+1}P'_{k+1}C^*_{k+1} + C(k+1)E\left[(X_{k+1} - \hat{X}'_{k+1})\omega^*_{k+1}\right]F^*_{k+1} + \\
&\quad F_{k+1}E\left[\omega_{k+1}(X_{k+1} - \hat{X}'_{k+1})^*\right]C^*_{k+1} + F_{k+1}F^*_{k+1},
\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}
&E\left[(X_{k+1}-\hat{X}'_{k+1})\omega^*_{k+1}\right]\\
&=E\left\{[\Phi_{k+1,k}(X_k-\hat{X}_k)+D_{k+1}\omega_{k+1}]\omega^*_{k+1}\right\}\\
&=D_{k+1},
\end{aligned}$$

所以

$$R_{y_{k+1}/y^k}=C_{k+1}P'_{k+1}C^*_{k+1}+C_{k+1}D_{k+1}F^*_{k+1}+F_{k+1}D^*_{k+1}C^*_{k+1}+F_{k+1}F^*_{k+1}. \quad (5.5.17)$$

另外

$$\begin{aligned}
R_{X_{k+1}Y_{k+1}/Y^k}&=E\left[(X_{k+1}-\hat{X}'_{k+1})(Y_{k+1}-\hat{Y}'_{k+1})^*\right]\\
&=E\left\{(X_{k+1}-\hat{X}'_{k+1})[C_{k+1}(X_{k+1}-\hat{X}'_{k+1})+F_{k+1}\omega_{k+1}]^*\right\}\\
&=P'_{k+1}C^*_{k+1}+E\left[(X_{k+1}-\hat{X}'_{k+1})\omega^*_{k+1}\right]F^*_{k+1}\\
&=P'_{k+1}C^*_{k+1}+D_{k+1}F^*_{k+1},
\end{aligned}$$

于是我们得到了式 (5.5.16c).

最后直接计算 P_{k+1}, 由式 (5.5.16a), 我们有

$$\begin{aligned}
P_{k+1}&=E\left[(X_{k+1}-\hat{X}_{k+1})(X_{k+1}-\hat{X}_{k+1})^*\right]\\
&=E\left\{[X_{k+1}-X'_{k+1}-K_{k+1}(Y_{k+1}-Y'_{k+1})][X_{k+1}-X'_{k+1}-K_{k+1}(Y_{k+1}-Y'_{k+1})]^*\right\}\\
&=P'_{k+1}-R_{X_{k+1}Y_{k+1}/Y^k}K^*_{k+1}-K_{k+1}R_{Y_{k+1}X_{k+1}/Y^k}+K_{k+1}R_{Y_{k+1}/Y^k}K^*_{k+1}.
\end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned}
K_{k+1}R_{Y_{k+1}/Y^k}K^*_{k+1}&=R_{X_{k+1}Y_{k+1}/Y^k}R^+_{Y_{k+1}/Y^k}R_{Y_{k+1}/Y^k}R^+_{Y_{k+1}/Y^k}R^*_{X_{k+1}Y_{k+1}/Y^k}\\
&=R_{X_{k+1}Y_{k+1}/Y^k}R^+_{Y_{k+1}/Y^k}R^*_{X_{k+1}Y_{k+1}/Y^k}\\
&=R_{X_{k+1}Y_{k+1}/Y^k}K^*_{k+1},
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
P_{k+1}&=P'_{k+1}-K_{k+1}R_{Y_{k+1}X_{k+1}/Y^k}\\
&=P'_{k+1}-K_{k+1}(C_{k+1}P'_{k+1}+F_{k+1}D^*_{k+1}).
\end{aligned}$$

于是我们得到了式 (5.5.16d). □

5.6 注释与参考

马尔科夫是俄国数学家，他首先引入了后来称之为马尔科夫链的随机序列，揭开了随机过程研究的序幕. 马尔科夫链在概率布尔网络、演化博弈等中均有重要作用.

鞅的概念最早来自赌博，ξ_n 表示 n 次博弈后的运气，$\mathcal{F}_n$ 表示 n 次博弈后积累的信息. Levy 最早有了鞅的思想，而美国数学家 Doob 做了许多奠基性工作.

日本数学家 Itō 是随机积分和随机微分方程的开拓者.

随机过程的参考书很多，面向工程或应用的较适合工程学生，如文献 [29, 28, 36]. 本章相关部分的主要参考书是文献 [55]，未证明的定理多半可在文献 [55] 中找到证明.

出生于匈牙利的美国数学家 Kalman，他提出的后来被称为 Kalman 滤波的滤波方法是现代控制理论的几个标志性工作之一. 本章相关的更详细内容可参考文献 [7].

5.7 习题

5.1 证明如果 ξ_n 是适应于滤链 $\mathcal{F}_n$ 的鞅，那么

$$E(\xi_1) = E(\xi_2) = \cdots$$

5.2 证明如果 ξ_n 是适应于滤链 $\mathcal{F}_n$ 的上鞅，则式 (5.1.9) 中定义的 ζ_n 也为上鞅.

5.3 如果 ξ_n 适应于滤链 $\mathcal{F}_n$，则对于停时 τ，证明 $\xi_{\tau\wedge n}$ 也适应于 $\mathcal{F}_n$.

5.4 如果 ξ_n 是适应于滤链 $\mathcal{F}_n$ 的非负下鞅，τ 为停时且存在 k 使得 $\tau \leqslant k$ a.s.，证明 $E(\xi_n) \geqslant E(\xi_\tau)$. (提示：令 $\alpha_i = 1_{\tau<i}$，证明 α_i 是博弈策略.)

5.5 假设 ξ 为一可积的随机变量，$\mathcal{F}_n$ 是一族滤链，证明 $E(\xi|\mathcal{F}_n)$ 是一致可积的鞅.

5.6 如果 T 是随机矩阵，证明对任意 n，T^n 也是随机矩阵.

5.7 证明 Chapman Komogorove 等式 (5.2.4).

5.8 试证明式 (5.2.8).

5.9 对 Markov 链的状态 i，d_i 为其周期，$p_{d_i}(i|i)$ 是否大于 0?

5.10 证明命题 5.2.4.

5.11 试说明随机游动是否有不变测度.

5.12 令 ξ_n 为一不可约非周期 Markov 链，证明所有状态均为遍历的，当且仅当 ξ_n 有唯一的不变测度.

5.13 试说明 Wiener 过程是否是宽平稳过程.

5.14 已知 $W(t)$ 是 Wiener 过程，证明 $E(W^4(t)) = 3t^2$.

5.15 已知 $W(t)$ 是 Wiener 过程，证明 $W^2(t) - t$ 是鞅.

5.16 证明：对任意 $t \geqslant 0$，Wiener 过程以概率 1 不可导.

5.17 证明 Itō 积分满足线性性.

5.18 证明：$I_T(W(t)) = \frac{1}{2}W^2(T) - \frac{1}{2}T$，其中 $W(t)$ 是 Wiener 过程.

5.19 证明：$I_T(W^2(t)) = \frac{1}{3}W^3(T) - \int_0^T W(t)\mathrm{d}t$，其中 $W(t)$ 是 Wiener 过程.

5.20 证明：$\mathrm{e}^{W(t)-\frac{t}{2}}$ 是 Itō 过程，并求其 Itō 微分，其中 $W(t)$ 是 Wiener 过程.

第 6 章 点集拓扑

本章讨论点集拓扑的一些基本内容. 首先定义拓扑空间并讨论其相关的基本概念, 如开集、闭集、邻域、拓扑基等; 接着讨论映射的连续性, 并依此给出同胚空间概念; 然后, 讨论拓扑空间的一些基本性质, 如分离性质、连通性质、紧性等; 最后讨论乘积空间和商空间.

6.1 空间上的拓扑结构

在距离空间中, 我们可以用距离来刻画物体的位置、相互关系等. 但是, 不是所有的集合上都有合适的距离; 而且, 许多问题要讨论的是点之间的连接关系, 这时, 距离并不重要. 例如, 在网络或多主体系统 (multi-agent system) 中, 重要的是它们之间的连通关系. 又如, 一个圆与一条直线, 它们虽然都是一维的, 但却有本质的不同. 怎样用数学的语言将它们刻画出来? 这些问题都是拓扑学要讨论的问题.

一个拓扑空间是一个带有拓扑结构的集合, 这些结构来自开集、闭集等. 而这些概念最初都来自距离空间. 因此, 我们首先回忆一下距离空间. 在第 2 章中定义过一个距离空间 (M,d), 它由两个部分组成: 一个集合 M 和一个映射 $d: M\times M\to\mathbb{R}$, 满足以下条件

(1) $0\leqslant d(x,y)<\infty,\quad \forall x,y\in M$;

(2) $d(x,y)=0$ 当且仅当 $x=y$;

(3) $d(x,y)=d(y,x)$;

(4) (三角不等式) $d(x,z)\leqslant d(x,y)+d(y,z),\ x,y,z\in M$.

在第 2 章和第 3 章我们曾遇到不少距离空间, 下面我们用一些例子描述距离的特性.

例 6.1.1 (1) 任何一个线性赋范空间都是距离空间, 其距离为 $d(x,y)=\|x-y\|$.

(2) 任何一个内积空间都是距离空间, 其距离为 $d(x,y)=\sqrt{\langle x-y,x-y\rangle}$.

(3) 一个空间上可以定义不同的距离, 例如, $\mathbb{R}^n$ 是一个距离空间, 它有以下几种常见距离

D1:
$$d(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2};\tag{6.1.1}$$

D2:
$$d(x,y)=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i-y_i|;\tag{6.1.2}$$

D3:
$$d(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|; \tag{6.1.3}$$

D4:
$$d(x,y) = \sqrt{(x-y)^{\mathrm{T}} P (x-y)}, \tag{6.1.4}$$

这里 P 是一个正定矩阵. 当 $n = 2$ 时, 不同距离 D1、D2、D3、D4 下的单位球分别见图 6.1.1 的 (a)、(b)、(c)、(d).

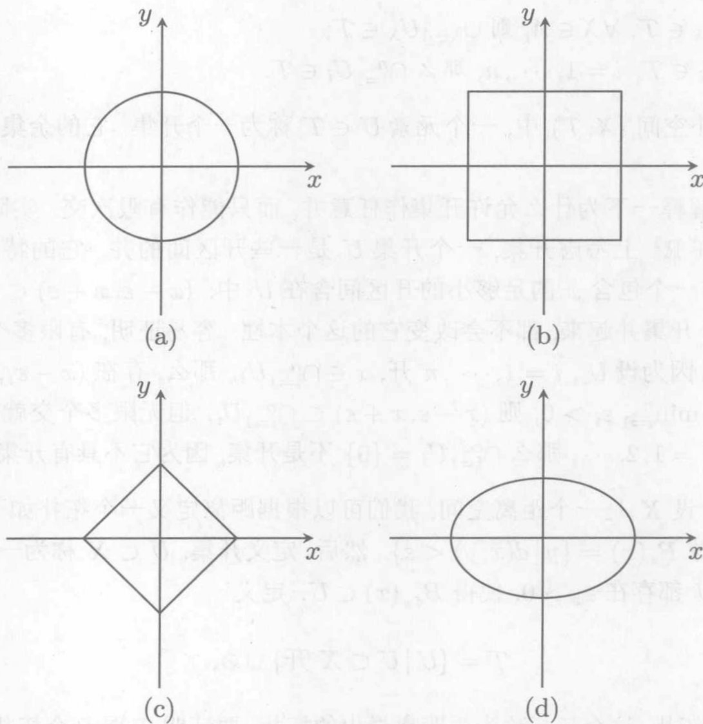


图 6.1.1 不同距离下的单位球

(4) 距离空间不一定是线性空间, 但带有距离的线性空间在理论和应用上都有特殊的重要性.

(5) 距离空间的任何一个子集都是距离空间. 例如, $\mathbb{R}^n$ 中的单位球, 也是一个距离空间.

(6) 任何一个非空集合 $S \neq \varnothing$, 定义一个映射 $d : S \times S \to \mathbb{R}$ 如下

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y, \\ 1, & x \neq y, \end{cases}$$

则 S 是一个距离空间. □

回忆第 2 章、第 3 章的讨论, “开集”、“闭集”、“邻域”、“稠”、“可分” 等概念在刻画空间点、子空间、映射性质等方面起着根本性的作用. 但从距离空间的讨论中不难看出, 这些概念中最基本的要素是 “开集” (或者等价地考虑其余集, 即 “闭集”). 然后在开集 (或闭集) 的基础上讨论其他各种结构. 因此, 一个集合上的所有开集 (或闭集) 决定了集合的几何结构. 这些概念的抽象和概括导致了一般的拓扑空间.

定义 6.1.1 给定一个集合 X 及其一个子集族 $\mathcal{T}$. $(X,\mathcal{T})$ 称为一个拓扑空间, 如果 $\mathcal{T}$ 满足以下条件

(1) $X\in\mathcal{T}$, $\varnothing\in\mathcal{T}$;

(2) 如果 $U_\lambda\in\mathcal{T}$, $\forall\lambda\in\Lambda$, 则 $\cup_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda\in\mathcal{T}$;

(3) 如果 $U_i\in\mathcal{T}$, $i=1,\cdots,n$, 那么 $\cap_{i=1}^n U_i\in\mathcal{T}$.

在一个拓扑空间 $(X,\mathcal{T})$ 中, 一个元素 $U\in\mathcal{T}$ 称为一个开集. 它的余集, 记作 U^c, 称为一个闭集.

也许应当解释一下为什么允许开集作任意并, 而只能作有限次交. 实际上这是开集的本性. 如果在 $\mathbb{R}^1$ 上考虑开集, 一个开集 U 是一些开区间的并. 它的特点是, 每一个点 $x\in U$, 都有一个包含 x 的足够小的开区间含在 U 中: $(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\subset U$, $\varepsilon>0$. 因此, 不管多少个开集并起来, 都不会改变它的这个本性. 容易证明, 有限多个开集的交还具有这个特性. 因为设 U_i, $i=1,\cdots,n$ 开, $x\in\cap_{i=1}^n U_i$. 那么, 存在 $(x-\varepsilon_i,x+\varepsilon_i)\in U_i$, $\varepsilon_i>0$. 取 $\varepsilon=\min_{i=1}^n\varepsilon_i>0$, 则 $(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\subset\cap_{i=1}^n U_i$. 但无限多个交就未必行了. 设 $U_i=(-\frac{1}{i},\frac{1}{i})$, $i=1,2,\cdots$, 那么 $\cap_{i=1}^\infty U_i=\{0\}$ 不是开集, 因为它不具有开集的特性.

例 6.1.2 设 X 是一个距离空间, 我们可以根据距离定义一个拓扑如下: 设 $x\in X$, $\varepsilon>0$. 定义开球 $B_\varepsilon(x)=\{y\,|\,d(x,y)<\varepsilon\}$. 然后, 定义开集. $U\subset X$ 称为一个开集, 如果对每一点 $x\in U$ 都存在 $\varepsilon_x>0$, 使得 $B_{\varepsilon_x}(x)\subset U$. 定义

$$\mathcal{T}=\{U\,|\,U\subset X\ \text{开}\}\cup\varnothing,$$

那么 $\mathcal{T}$ 是一个拓扑. 这个拓扑称为由距离导出的拓扑. 要证明 $\mathcal{T}$ 是一个拓扑, 条件 (1) 显见. 要证明条件 (2), 设 U_λ, $\lambda\in\Lambda$ 是一组开集, 要证明 $\cup_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda$ 是开集. 设 $x\in\cup_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda$, 则存在 λ_0, 使 $x\in U_{\lambda_0}$. 因为 U_{λ_0} 是开集, 则存在 $B_{\varepsilon_x}(x)\subset U_{\lambda_0}$, 于是 $x\in B_{\varepsilon_x}(x)\subset\cup_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda$. 因为 x 是任选的, 根据定义, $\cup_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda$ 开.

最后看条件 (3), 设 U_i, $i=1,\cdots,n$ 是一组开集. $x\in\cap_{i=1}^n U_i$. 设 $x\in\cap_{i=1}^n U_i$, 则存在 $\varepsilon_i>0$, 使 $B_{\varepsilon_i}(x)\subset U_i$, $i=1,\cdots,n$. 令 $\varepsilon=\min_{i=1}^n\varepsilon_i>0$, 则 $x\in B_\varepsilon(x)\subset\cap_{i=1}^n U_i$, 根据定义, $\cap_{i=1}^n U_i$ 开. □

下面再给几个典型的拓扑空间的例子, 验证它们并不困难, 我们留给读者.

例 6.1.3 (1) 在 $\mathbb{R}^1$ 上定义

$$\mathcal{T}=\{(-\infty,r)\,|\,r\in\mathbb{R}^1\}\cup\{\mathbb{R}^1,\varnothing\}.$$

容易证明, $(\mathbb{R}^1,\mathcal{T})$ 是一个拓扑空间, 这个拓扑称为半直线拓扑.

(2) 在一个非空集 X 上定义

$$\mathcal{T} = \{U \subset X \mid U^c \text{ 为有限集}\} \cup \{\varnothing\}$$

容易证明, $(X, \mathcal{T})$ 是一个拓扑空间, 这个拓扑称为余有限拓扑. □

设在集合 X 上有两个拓扑 $\mathcal{T}_1$ 和 $\mathcal{T}_2$. 如果 $\mathcal{T}_1 \subsetneqq \mathcal{T}_2$, 则称拓扑 $\mathcal{T}_1$ 比 $\mathcal{T}_2$ 粗 (或者说小), 而拓扑 $\mathcal{T}_2$ 比 $\mathcal{T}_1$ 细 (或者说大). 如果拓扑 $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$, 则两拓扑相等 (也称等价).

例 6.1.4 给定任一非空集合 X.

(1) 定义 $\mathcal{T} = \{X, \varnothing\}$. 容易看出 $\mathcal{T}$ 是一个拓扑, 这个拓扑称为平凡拓扑, 它是最粗的拓扑.

(2) 定义 $\mathcal{T} = \{U \mid U \subset X\}$. 那么 $\mathcal{T}$ 包含 X 所有的子集. 它显然也是 X 上的一个拓扑, 这个拓扑称为离散拓扑, 它是最细的拓扑. □

定义 6.1.2 考虑拓扑空间 $(X, \mathcal{T})$. 给定一个点 $x \in X$, 一个子集 N 称为 x 的一个邻域, 如果存在一个开集 U 使得 $x \in U \subset N$.

因为邻域需要包含一个开集, 所以只考虑开的那些邻域, 称为开邻域, 在讨论许多问题时是一样的. 但不把邻域定义成开的在构造邻域和一些问题的叙述中常常是方便的.

在数学分析中, 称一个函数 $y = f(x)$ 在 x_0 点连续, 如果任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使当 $|x - x_0| < \delta$ 时, $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. 如果一个函数点点连续, 则称 $f(x)$ 连续. 如果用邻域的语言来说, 就是如果 x 属于 x_0 的 δ 邻域, 则 $y = f(x)$ 属于 $y_0 = f(x_0)$ 的 ε 邻域.

在下面的例子中, 我们试图将这个概念推广到一般拓扑空间上去.

例 6.1.5 设 M, N 为两个拓扑空间, $F : M \to N$ 为一个映射. F 在 $x_0 \in M$ 连续, 如果任给 $y_0 = F(x_0)$ 的一个邻域 W, 总存在 x_0 的一个邻域 V, 使当 $x \in V$ 时, $F(x) \in W$.

可以证明, 对于一元函数, 这个定义与数学分析中用 $\varepsilon - \delta$ 语言定义是一致的.

设 $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 在邻域意义下在 x_0 点连续, 取 $(f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, 作为 $f(x_0)$ 的邻域, 则存在 x_0 的邻域 U, 使 $f(U) \subset (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$. 因为 U 包含 x_0 的一个开邻域, 故存在 $\delta > 0$, 使 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset U$. 因此, $f((x_0 - \delta, x_0 + \delta)) \subset (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$, 这就是说: 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使当 $|x - x_0| < \delta$ 时, $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

反之, 如果 $f(x)$ 在 $\varepsilon - \delta$ 语言下在 x_0 点连续, 任取 $f(x_0)$ 的邻域 W, 则存在 $\varepsilon > 0$, 使 $(f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon) \subset W$. 对这个 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使当 $|x - x_0| < \delta$ 时, $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. 取 $V = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, 则当 $x \in V$ 时, $f(x) \in W$. □

在距离空间中, 或者更具体地说, 譬如, 考虑 $\mathbb{R}^n$, 所有的开球并不构成一个拓扑, 因为不管是开球的并或交一般都不是开球. 但是如果 U 是一个开集, 那么对 U 中的每一点 $x \in U$, 均存在 $\varepsilon_x > 0$, 使得 $B_{\varepsilon_x}(x) \subset U$. 于是

$$U = \bigcup_{x \in U} B_{\varepsilon_x}(x).$$

这说明, “开球” 是构成 “开集” 的砖头, 我们把这种砖头集合称为拓扑基, 即开球集合是由距离导出的拓扑的拓扑基. 一般定义如下:

定义 6.1.3 *考虑拓扑空间 $(X,\mathcal{T})$. $B\subset\mathcal{T}$ 称为一个拓扑基, 如果对任意 $U\in\mathcal{T}$, U 可以表示为 B 中的元素的并.*

实际上, 一个拓扑空间的结构和性质, 都是由拓扑基决定的. 而对于许多拓扑空间, 例如距离空间, 刻画拓扑基比刻画拓扑本身要简单得多. 因此, 对于一个拓扑空间, 我们只给出拓扑基就够了.

命题 6.1.1 *给定一个集合 M, 设 B 为 M 的一个子集族, B 能够成为 M 上某一个拓扑的拓扑基, 当且仅当 (1) $\cup\{V\,|\,V\in B\}=M$, (2) B 中有限多个元素的交如果非空, 则可以表示为 B 中某些元素的并.*

这时, M 上的以 B 为其拓扑基的拓扑 $\mathcal{T}$, 称为由 B 生成的拓扑.

这个证明很容易, 留给读者 (见习题 6.4).

例 6.1.6 距离空间中的开球集合是拓扑基. 设 $B_i=(B_i)_{r_i}(o_i)$, $(r_i>0)$ $i=1,\cdots,n$ 为距离空间 X 中的开球, $V:=\cap_{i=1}^n B_i\neq\varnothing$. $x\in V$, 则 $d(x,o_i)=d_i<r_i$, 取 $\mu_i=r_i-d_i>0$, $r_x=\min\{\mu_i\,|\,1\leqslant i\leqslant n\}>0$, 构造球 $B_{r_x}(x)$, 则 $B_{r_x}(x)\subset V$. 对 V 中每一点都可以造这样一个球, 于是

$$V=\bigcup_{x\in V}B_{r_x}(x).$$

□

除拓扑基外, 还有一个描述拓扑的方法, 就是通过每一点邻域的情况来刻画, 称为邻域基, 定义如下:

定义 6.1.4 *考虑拓扑空间 $(X,\mathcal{T})$, 设 $x\in X$. 一个集合 $\{N_\lambda\,|\,\lambda\in\Lambda\}\subset 2^X$ 称为 x 的邻域基, 如果对 x 的任一邻域 N 都存在 N_λ 使 $x\in N_\lambda\subset N$.*

给定拓扑空间每一点 $x\in X$ 的邻域基, 整个空间 X 的拓扑也就定了. 这是因为 X 上的开集被唯一定义好了: $U\subset X$ 开, 当且仅当对每一点 $u\in U$, 存在 u 的邻域基中的一个元素 N_u, 使得 $u\in N_u\subset U$. 特别是当 X 是向量空间时, 只要某一点 (通常选零点) 的邻域基定义好了, 整个空间 X 的拓扑也就定了. 因为设 $\{N_\lambda\,|\,\lambda\in\Lambda\}$ 为零点邻域基, 则 $\{x+N_\lambda\,|\,\lambda\in\Lambda\}$ 即为 x 点邻域基.

例 6.1.7 (1) 在距离空间 (X,d) 中, 任意一点 $x\in X$ 的一个邻域基为

$$\left\{B_{1/n}(x)\,\middle|\,n=1,2,\cdots\right\}.$$

(2) 设在集合 X 上赋予离散拓扑, 则每一点 $x\in X$ 有一个单点邻域基, 即该点自己: $\{x\}$. □

下面是一个简单例子.

例 6.1.8 某校所有的研究生集合记作 S. 设 M 为男生集合, F 为女生集合, C_i, $i=1,2,3$ 为 i 年级学生集合. 给定一个子集 $B_0=\{M,F,C_1\}$, 记由 B_0 生成的最小拓扑为 $\mathcal{T}$, 那么

(1) $\mathcal{T}$ 的一个拓扑基是

$$\{A_1=M\cap C_1,\ A_2=F\cap C_1,\ A_3=M,\ A_4=F\}.$$

(2) 在拓扑 $\mathcal{T}$ 下, C_1 是一个开集, A_3 既开又闭, C_2 既不开也不闭.

(3) 设 x 是一个二年级男生. x 的邻域基包含单个集合 $\{A_3\}$. 当然 x 的邻域基不唯一, 例如, $\{A_3,A_1\}$ 也是一个邻域基. □

拓扑空间的可数性是它的一个十分重要的本质性的特征, 它们就是通过拓扑基及邻域基来定义的.

定义 6.1.5 (1) *一个拓扑空间称为第二可数的, 如果它有一个可数拓扑基;*

(2) *一个拓扑空间称为第一可数的, 如果对任一点 $x\in X$ 都有一个可数邻域基.*

由定义可知, 第二可数拓扑空间必定为第一可数拓扑空间. 这是因为, 如果空间 X 是第二可数的, 那么它有一个可数拓扑基 $B=\{v_1,v_2,\cdots\}$, 这个拓扑基也是任意一点 $x\in X$ 的邻域基. 因为设 N 为 x 的一个邻域, 则存在开集 U, 使得 $x\in U\subset N$. U 开, 故存在 $\{v_{i_1},v_{i_2},\cdots\}\subset B$, 使得 $U=\cup_k v_{i_k}$. 因为 $x\in U$, 则存在某个 k 使得 $x\in v_{i_k}$. 于是

$$x\in v_{i_k}\subset U\subset N.$$

例 6.1.9 在 $\mathbb{R}^n$ 中我们考虑所有的开球

$$B_r(c)=\{x\in\mathbb{R}^n\,|\,\|x-c\|<r\},\quad \forall c\in\mathbb{R}^n,\ r>0,$$

记所有这种开球的集合为 B. 作为距离空间, 我们从例 6.1.6 知道 B 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个拓扑基. 当然, 这个拓扑基是不可数的. 但这不等于说, $\mathbb{R}^n$ 不是第二可数的, 因为, 这可能是由于未找到合适的拓扑基. 我们看能否找到一个更小的拓扑基.

考虑一个子集 $B^Q\subset B$, 它由有理数球心 (即球心的坐标均为有理数) 和有理数半径 (即球半径为有理数) 组成, 那么 B^Q 是一个可数集, 并且仿照例 6.1.6 的构造方法, 容易证明: B^Q 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个拓扑基. 因此 $\mathbb{R}^n$ 及其普通拓扑是一个第二可数的拓扑空间. □

例 6.1.10 设 X 是一个任意集合, $\mathcal{T}$ 是 X 上的离散拓扑, 那么 $(X,\mathcal{T})$ 是一个第一可数的拓扑空间. 这是因为, 对每一点 $x\in X$, 单点集 $\{x\}$ 就是它的一个邻域基. 那么, 它是不是第二可数的呢? 如果 X 本身是个可数集, 即 $X=\{x_i\,|\,i=1,2,\cdots\}$, 那么, 它是第二可数的, 因为所有的单点集 $\{\{x_i\}\,|\,i=1,2,\cdots\}$ 是 $\mathcal{T}$ 的一个可数拓扑基. 如果 X 本身不是个可数集, 那么它不是第二可数的, 因为设 B 为其某个拓扑基, 那么对每一个 $x\in X$, 单点集 $\{x\}\in B$, 否则 $\{x\}$ 无法由 B 中元素的并生成. 故 B 不可数. □

例 6.1.11 在有穷维线性赋范空间中所有的范数导出的拓扑都完全一样, 因此, 有穷维空间的任何两个范数所确定的空间几何结构都一样, 这也就是通常说的有穷维空间

上的任何两个范数都等价. 要证明这一点, 回忆定理 3.2.2 和定理3.2.3. 设 $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ 为有穷维空间 X 上的两个范数, 则存在 $R > r > 0$ 使得

$$r\|\cdot\|_1 \leqslant \|\cdot\|_2 \leqslant R\|\cdot\|_1.$$

记它们导出的拓扑分别为 $\mathcal{T}_1$ 及 $\mathcal{T}_2$, 我们要证明它们相等. 设 $U \in \mathcal{T}_1$, 且 $x \in U$, 则存在 $B_\varepsilon^1(x) = \{y | \|y - x\|_1 < \varepsilon\} \subset U$. 令 $\delta = \varepsilon / R$, 则由上述不等式, $B_\delta^2(x) = \{y | \|y - x\|_2 < \delta\} \subset U$. 因 $x \in U$ 是任意的, 故 U 在 $\mathcal{T}_2$ 拓扑下开, 即 $U \in \mathcal{T}_2$. 用另外半边不等式同理可证, 设 $U \in \mathcal{T}_2$, 则 $U \in \mathcal{T}_1$. □

一个非常有用的简单事实是, 一个有穷维赋范空间上的连续函数, 它的非零点必定是一个开集, 这是由于连续性决定的. 例如, 将 $n \times n$ 矩阵集合 $M_{n\times n}$ 等同于 $\mathbb{R}^{n^2}$, 那么行列式 $\det : \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}$ 是一个多项式函数, 故为连续函数, 故行列式值不为零的矩阵集合是一个开集. 下面是它的一个简单应用.

例 6.1.12 考虑一个真多项式分式 (可看作线性系统的传递函数)

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{p_{n-1}s^{n-1} + p_{n-2}s^{n-2} + \cdots + p_0}{s^n + q_{n-1}s^{n-1} + \cdots + q_0}.$$

确定 $P(s)$ 和 $Q(s)$ 是否互质在控制论中十分重要. 考虑系数集 $\{p_{n-1}, \cdots, p_0, q_{n-1}, \cdots, q_0\}$, 将其看作 $\mathbb{R}^{2n}$ 中的一个点. 可以证明, 使 $P(s)$ 与 $Q(s)$ 互质的那些点形成一个开集. 要证明这一点, 记 $2n \times 2n$ 矩阵

$$S = \begin{pmatrix} 1 & q_{n-1} & & \cdots & q_0 & & & \\ 0 & 1 & q_{n-1} & \cdots & & q_0 & & \\ & & & \cdots & & & & \\ & & & 1 & q_{n-1} & & \cdots & q_0 \\ 0 & p_{n-1} & & \cdots & p_0 & & & \\ & 0 & p_{n-1} & \cdots & & p_0 & & \\ & & & \cdots & & & & \\ & & & 0 & p_{n-1} & & \cdots & p_0 \end{pmatrix}. \tag{6.1.5}$$

利用数学归纳法可以证明 $P(s)$ 与 $Q(s)$ 互质, 当且仅当 $\det(S) \neq 0$. 而

$$U = \{S \,|\, \det(S) \neq 0\} \subset \mathbb{R}^{n^2}$$

是一个开集, 这就证明了我们的断言. □

下面, 我们考查一下闭集. 设 $\{C_\lambda \,|\, \lambda \in \Lambda\}$ 为拓扑空间 $(X, \mathcal{T})$ 上的一组闭集, 那么 $\{C_\lambda^c \,|\, \lambda \in \Lambda\}$ 为拓扑空间上的一组开集. 由 De Morgan 公式

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda = \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda^c\right)^c,$$

但 $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}C_\lambda^c\in\mathcal{T}$, 故 $\bigcap_{\lambda\in\Lambda}C_\lambda$ 仍为一个闭集. 这就是通常所说的, 拓扑空间中任意多个闭集的交仍为闭集.

同样道理, 可以证明: 拓扑空间中有限多个闭集的并仍为闭集. 实际上, 一个拓扑空间也可以通过闭集来定义 (见习题 6.9).

开集和闭集是拓扑空间中最基本的集合类型. 当然, 一般地说, 在一个拓扑空间中还有许多集合, 它们既不是开集, 也不是闭集. 这时, 我们感兴趣的是包含它的最小闭集和它所包含的最大开集.

定义 6.1.6 设 M 为一拓扑空间, $A\subset M$.

(1) A 的闭包, 记作 $\bar{A}$ 或 $cl(A)$, 定义为包含 A 的最小闭集;

(2) A 的内部, 记作 $\mathring{A}$, 是 A 所包含的最大开集.

也许有人会问: 给定一个集合, 为什么我们对包含它的最小开集和它所包含的最大闭集不感兴趣呢? 这是一个很自然的问题, 而且很重要, 因为当缺乏必要的数学训练时, 一个常犯的错误就是认为一个集合中总有一个 "最大的" 和一个 "最小的" 元素. 实际上, 一般地说, 一个集合如果它不是开集, 就不会有包含它的最小开集, 如果自己不闭, 也不会有它包含的最大闭集 (见习题 6.10).

但是, 对给定集合, 包含它的最小闭集和它所包含的最大开集总是存在的. 我们有如下的命题.

命题 6.1.2 设 M 为一拓扑空间, $A\subset M$.

(1) A 的闭包为包含它的所有闭集的交, 即

$$\bar{A}=\bigcap\{C\mid C\ \text{闭且}\ C\supset A\}. \tag{6.1.6}$$

(2) A 的内部为它所包含的所有开集的并, 即

$$\mathring{A}=\bigcup\{U\mid U\ \text{开且}\ U\subset A\}. \tag{6.1.7}$$

(3) A 是一个闭集, 当且仅当 $A=\bar{A}$.

(4) A 是一个开集, 当且仅当 $A=\mathring{A}$.

证明 我们只证式 (6.1.6). 首先, 右边的交集有意义, 因为全空间 M 是包含 A 的一个闭集. 其次, 闭集的任意交总是闭的. 所以, 式 (6.1.6) 的右边是闭集. 第三, 它最小, 因为任一包含 A 的闭集都是交集中的一个因子, 故它不会比交集大. □

定义 6.1.7 设 M 为一拓扑空间, $A\subset M$. A 的边界, 记作 $bd(A)$, 定义为

$$bd(A)=\bar{A}\cap\overline{A^c}.$$

这些概念都是距离空间中相应概念的自然推广, 因此, 容易检验, 对一般拓扑空间, 下列性质仍然成立.

命题 6.1.3 设 $A \subset M$, 那么

(1) $x \in \bar{A}$, 当且仅当对 x 的任何邻域 N_x, $N_x \cap A \neq \varnothing$;

(2) $x \in \mathring{A}$, 当且仅当存在一个 x 的开邻域 N_x, $N_x \subset A$;

(3) $x \in bd(A)$, 当且仅当对于 x 的任何邻域 N_x, $N_x \cap A \neq \varnothing$ 且 $N_x \cap A^c \neq \varnothing$.

证明 我们证 (1), (2) 和 (3) 的证明留作练习 (见习题 6.12).

设 $x \in \bar{A}$. 如果存在 x 的一个邻域 N_x, 使得 $N_x \cap A = \varnothing$, 那么存在开集 U, 使得 $x \in U \subset N_x$. 因此, $U \cap A = \varnothing$. 于是, $A \subset U^c$. 因为 U^c 闭, 而 $\bar{A}$ 是包含 A 的最小闭集, 故 $\bar{A} \subset U^c$. 但 $x \in \bar{A}$ 而 $x \notin U^c$, 矛盾. 故 $N_x \cap A \neq \varnothing$.

反之, 设对 x 的任何邻域 N_x, $N_x \cap A \neq \varnothing$. 如果 $x \notin \bar{A}$, 那么, $x \in (\bar{A})^c$. 因为 $(\bar{A})^c$ 开, 则存在 U 开, 使 $x \in U \subset (\bar{A})^c$, 即 $U \cap \bar{A} = \varnothing$. 因此 $U \cap A = \varnothing$. 因 U 是 x 的一个邻域, 矛盾. 故 $x \in \bar{A}$. □

命题 6.1.2 及命题 6.1.3 中的点集的一些基本关系是十分重要的, 在动力系统的研究中, 它们被经常用到而不加任何说明.

例 6.1.13 考虑动力系统

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

设 f 是完备的, 即解 (也称为轨线) $\Phi_t^f(x_0)$ 对所有 $t \in (-\infty, \infty)$ 都有定义, Ω 称为一条轨线的 ω-极限集, 如果对任一 $z \in \Omega$ 的任一邻域 U, 对任一时刻 $T > 0$, 总存在 $t > T$ 使得 $\Phi_t^f(x_0) \in U$.

下面证明, ω-极限集是闭集, 只要证 $\Omega = \bar{\Omega}$ 即可. 这等价于证 $\bar{\Omega} \subset \Omega$. 设 $z_0 \in \bar{\Omega}$, 我们要证明它是 ω-极限集 Ω 中的一个点. 令 U 为 z_0 的一个邻域, 因为 $z_0 \in \bar{\Omega}$, 则 $U \cap \Omega \neq \varnothing$. 设 $z \in U \cap \Omega$, 因为 U 开, 则 z 为 U 的内点, 存在 z 的一个开邻域 V, 使 $z \in V \subset U$. 现在, 因为 $z \in \Omega$ 是一个 ω-极限点, 故对任一时刻 $T > 0$, 总存在 $t > T$ 使得 $\Phi_t^f(x_0) \in V$. 于是 $\Phi_t^f(x_0) \in U$. □

定义 6.1.8 设 M 为一拓扑空间, $A \subset M$.

(1) A 称为 M 的一个稠集, 如果 $\bar{A} = M$;

(2) A 称为在 M 中无处稠, 如果 $\bar{A}$ 不包含任何非空开集.

例 6.1.14 在平面 $\mathbb{R}^2$ 中, 考虑以下集合: (1) $A_1 := \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, 即坐标为整数的点的集合; (2) $A_2 := \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, 即坐标为有理数的点的集合; (3) $A_3 := I \times I$, 即坐标为无理数的点的集合.

显然, A_1 在 $\mathbb{R}^2$ 中是无处稠的, 因为 $\bar{A}_1 = A_1$, 它不包含任何非空开集. 而 A_2 及 A_3 是稠的, 因为 $\bar{A}_2 = \mathbb{R}^2$, $\bar{A}_3 = \mathbb{R}^2$. □

稠是一个很重要的拓扑概念. 下面这个命题经常被用来判断一个子集是否稠, 而它本身也给稠一个直观的概念.

命题 6.1.4 设 M 为一拓扑空间, $A \subset M$. A 在 M 中稠, 当且仅当对 M 中的任一非空开集 $U \subset M$ 有 $A \cap U \neq \varnothing$.

证明 设 A 稠. $U \subset M$ 为非空开集. 如果 $A \cap U = \varnothing$, 那么 $A \subset U^c$. 因为 U^c 闭, 那么 $\bar{A} \subset U^c \subsetneqq M$, 矛盾.

设对任一非空开集 $U \subset M$, $A \cap U = \varnothing$. 如果 A 不稠, 则 $W = \bar{A}^c$ 为开集, 并且 $W \neq \varnothing$. 于是

$$
\varnothing = W \cap \bar{A} \supset W \cap A,
$$

矛盾. □

当然, 这些概念都依赖于拓扑的选择. 例如, 在普通拓扑下, $\mathbb{Z}$ 在 $\mathbb{R}^1$ 中无处稠; 但如果在半直线或余有限拓扑下 $\mathbb{Z}$ 就在 $\mathbb{R}^1$ 中稠了 (见习题 6.13).

我们曾经说过, 一个有穷维赋范空间上的连续函数, 它的非零点必定是一个开集, 这是由于连续性决定的. 一个更强的结果是: 一个有穷维赋范空间上的非零解析函数, 它的非零点必定是一个开稠集. 这是因为, 如果非零点不稠, 则有一非空开集 U, 在 U 上这个函数恒为零. 故它的 Taylor 展开式系数均为零, 即此函数恒为零.

例 6.1.15 回忆例 6.1.9, 因行列式值 $\det(S) = f(q_0, \cdots, q_{n-1}, p_0, \cdots, p_{n-1})$ 是一个多项式函数, 故为解析函数. f 不恒等零, 因取 $q_0 = q_1 = \cdots = q_{n-1} = 0$, $p_1 = \cdots = p_{n-1} = 0$ 及 $p_0 \neq 0$ 时, f 不为零. 因此可知

$$
U = \{S \,|\, \det(S) \neq 0\} \subset \mathbb{R}^{n^2}
$$

是一个开稠集. □

在非线性控制理论中经常用到这一点. 如果一个性质在 $\mathbb{R}^n$ (或 n 维流形) 的一个开稠集上成立, 则称它是在一个一般集 (generic set) 上成立.

定义 6.1.9 设 M 为一个拓扑空间. M 称为可分的, 如果存在一个可数集 A, 它在 M 中稠.

下面给出一些可分或不可分的空间的例子.

例 6.1.16 (1) $\mathbb{R}^n$ 在普通拓扑意义下是可分的, 因为具有有理坐标的点的集合 $\mathbb{Q}^n$ 在其中稠.

(2) $\mathbb{R}^1$ 在离散拓扑下是不可分的. 它的任何真子集都不稠. 设 $S \subsetneqq \mathbb{R}^1$, 则存在 $r \notin S$. 单点集 $\{r\}$ 开, 且它与 S 不交, 故 S 不稠. 实际上, 我们证明了任何一个不可数集合在离散拓扑下都是不可分的. □

例 6.1.17 设 $R \subset S \subset X$. 如果 R 在 S 中稠, S 在 X 中稠, 那么 R 在 X 中稠. 这是因为, 设 $U \subset X$ 为一非空开集, 那么 $U \cap S \neq \varnothing$. 而 $U \cap S$ 是 S 上的一个非空开集 (更严格的讨论可参见 6.2 节关于拓扑子空间的定义), 而 R 在 S 中稠, 故存在 $r \in R$, $r \in U \cap S \subset U$. 而 U 是 X 的任一非空开集, 今 $U \cap R \neq \varnothing$, 故 R 在 X 中稠.

这种方法常常用于可分性的讨论中. 例如, 回忆例 3.1.9 $C[a,b]$ 是可分的. 回忆勒贝格积分的定义, 不难证明, 一个平方可积函数可以用一个连续函数任意逼近, 即 $C[a,b]$ 在 $L^2[a,b]$ 中稠. 于是可以知道 $L^2[a,b]$ 也是可分的. □

定义 6.1.10 设 M 为一个拓扑空间. M 称为是第一纲集的, 如果它能表示成可数个无处稠的集合的并; 否则, 它称为是第二纲集的.

下面这个定理称为 Baire 纲定理, 是一个十分重要的分析工具.

定理 6.1.1 (Baire 纲定理) 如果一个距离空间 $X \neq \varnothing$ 是完备的, 则它是第二纲集的.

证明 设

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k.$$

我们只需证明至少有一个 M_k 不是无处稠的即可. 设所有的 M_k 均无处稠. 选

$$B_1 = B_{\varepsilon_1}(p_1) \subset \bar{M}_1^c,$$

这里 $\varepsilon_1 < 1$. 构造 $C_1 = B_{0.5\varepsilon_1}(p_1)$. 因为 M_2 是无处稠, $\bar{M}_2$ 不包含 C_1, 我们可以定义一开球

$$B_2 = B_{\varepsilon_2}(p_2) \subset \bar{M}_2^c \cap C_1,$$

这里 $\varepsilon_2 < 2^{-1}\varepsilon_1$. 再构造 $C_2 = B_{0.5\varepsilon_2}(p_2)$.

一般地说, 因为 M_{k+1} 是无处稠的, $\bar{M}_{k+1}$ 不包含 C_k, 我们可以找到一个开球

$$B_{k+1} = B_{\varepsilon_{k+1}}(p_{k+1}) \subset (\bar{M}_{k+1})^c \cap C_k,$$

这里 $\varepsilon_{k+1} < 2^{-1}\varepsilon_k$. 构造 $C_{k+1} = B_{0.5\varepsilon_{k+1}}(p_{k+1})$, 于是有

$$B_{k+1} \subset C_k \subset B_k,$$

因此

$$B_{k+t} \subset C_k, \quad t > 0,$$

并且对 $m > k$ 均有

$$d(p_k, p_m) < 2^{-1}\varepsilon_k.$$

这表明 $\{p_k\}$ 是一个 Cauchy 列, 因为 X 是完备的, $p_k \to p \in X$ $(k \to \infty)$. 因为

$$d(p_k, p) \leqslant d(p_k, p_m) + d(p_m, p) < 2^{-1}\varepsilon_k + d(p_m, p) < \varepsilon_k, \ (m \to \infty)$$

$$p \in B_k \subset (\bar{M}_k)^c,$$

这说明 $p \notin M_k$. 于是

$$p \notin \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k = X,$$

显然这是一个矛盾. □

6.2 映射、同胚空间、子空间

本节讨论拓扑空间之间的关系. 两个拓扑空间是通过它们间的映射联系起来的, 因此, 我们首先考虑拓扑空间之间的连续映射.

定义 6.2.1 设 M、N 为两个拓扑空间. 一个映射 $\pi: M \to N$ 称为连续映射, 如果下面两个等价条件之一成立:

(1) 对任一开集 $U \subset N$, 它的逆像

$$\pi^{-1}(U) := \{x \in M \mid \pi(x) \in U\}$$

是开的.

(2) 对任一闭集 $C \subset N$, 它的逆像 $\pi^{-1}(C)$ 是闭的.

必须检验这两个条件是等价的. 设 $\pi: M \to N$ 为一个映射, $W \subset N$ 为任一集合, 那么一个显然的事实是

$$[\pi^{-1}(W)]^c = \pi^{-1}(W^c).$$

这是因为, 对任一 $x \in M$, 如是 $\pi(x) \in W$, 则 $\pi(x) \notin W^c$. 如是 $\pi(x) \notin W$, 则 $\pi(x) \in W^c$. 现在设对每个开集 $U \subset N$, $\pi^{-1}(U) \subset M$ 均为开集. 那么, 令 $C \subset N$ 为一闭集, 则 $[\pi^{-1}(C)]^c = \pi^{-1}(C^c)$ 为开集, 因此, $\pi^{-1}(C)$ 为闭集. 反之亦然.

为理解这个一般定义的合理性, 考虑距离空间.

例 6.2.1 设 M 与 N 为两个距离空间, 且 $F: M \to N$ 为一映射. 我们可以像微积分里那样用 ε-δ 语言定义连续性: F 在 x_0 点连续, 如果任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $d(x, x_0) < \delta$ 时, 总有 $d(F(x), F(x_0)) < \varepsilon$. F 是连续的, 如果它在任何点 $x \in M$ 均连续. 相信这个定义大家都很容易理解, 因为虽然研究的对象从 $\mathbb{R}^1$ 推广到一般距离空间, 但直观概念与微积分中的定义是一致的.

检验在距离空间中这个定义与一般拓扑空间上的连续性定义一致: 设 F 在 ε-δ 语言定义下连续, 我们要证明它在定义 6.2.1 下也连续. 设 $U \subset N$ 为任一非空开集, $x \in F^{-1}(U)$, 于是 $y = F(x) \in U$. 因为 U 是开集, 则存在 $\varepsilon > 0$, 使 $B_\varepsilon(y) \subset U$. 由连续性, 存在 $\delta > 0$, 使得 $F(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(y) \subset U$. 换言之, $B_\delta(x) \subset F^{-1}(U)$, 即每一点 $x \in F^{-1}(U)$ 均有一开球 $B_\delta(x) \subset F^{-1}(U)$, 故 $F^{-1}(U)$ 为开集. 由此可知 F 在定义 6.2.1 下也连续.

反之, 设 F 在定义 6.2.1 下连续. 任给 $x \in M$, $y = F(x) \in N$. 任取 $B_\varepsilon(y)$, $\varepsilon > 0$. 那么 $F^{-1}(B_\varepsilon(y))$ 是包含 x 的一个开集. 于是, 存在 $\delta > 0$, 使 $B_\delta(x) \subset F^{-1}(B_\varepsilon(y))$, 即 $F(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(y)$. 从而 F 在 ε-δ 语言定义下连续. □

下面定义两个空间的同胚.

定义 6.2.2 设 M、N 为两个拓扑空间. M 和 N 称为是同胚的, 如果存在一个映射 $\pi: M \to N$, 它是一对一、映上和连续的, 并且它的逆 π^{-1} 也是连续的. 这样的映射 π 称为一个同胚映射.

如果一个映射是一对一且映上的, 则称为双向一一映射.

例 6.2.2 设 S^2 为一球面

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

且 N 为北极, 即 $N = (0, 0, 1)$. 那么 $S^2 \backslash N$, 带上它从 $\mathbb{R}^3$ 上的距离得到的拓扑, 同胚于 $\mathbb{R}^2$. 一个同胚映射为

$$\begin{cases} X = x/(1-z), \\ Y = y/(1-z), \end{cases}$$

这里 (X, Y) 是 $\mathbb{R}^2$ 上的坐标. □

如果两个空间同胚, 那么从拓扑学的角度上, 它们是相同的. 因为一个空间的开集, 它的像就是另一个空间的开集, 反之亦然. 例如, 平面上的单位圆周 S^1 不可能与一条直线 L 同胚, 即使它们都是一维的. 因为如果它们同胚, 设 $F: S^1 \to L$ 为其同胚映射, $\{U_\lambda \,|\, \lambda \in \varLambda\}$ 为 L 的一个开覆盖. 那么 $\{F^{-1}(U_\lambda) \,|\, \lambda \in \varLambda\}$ 为 S^1 的一个开覆盖. 因 S^1 是紧的, 故存在有限子覆盖 $\{F^{-1}(U_{\lambda_i}) \,|\, i = 1, \cdots, n\}$. 于是 $\{U_{\lambda_i} \,|\, i = 1, \cdots, n\}$ 是 L 的一个有限子覆盖. 这就是说, L 的任一开覆盖存在有限子覆盖, 故 L 紧, 这显然不对.

定义 6.2.3 设 $(X, \mathcal{T})$ 为一拓扑空间, $S \subset X$. S 称为 X 的一个拓扑子空间, 如果 S 上的拓扑定义如下

$$\mathcal{T}_S = \{U \cap S \,|\, U \in \mathcal{T}\}.$$

需要证明 $(S, \mathcal{T}_S)$ 的确是一个拓扑空间. 注意到

$$\left[\bigcup\nolimits_{\lambda \in \varLambda} U_\lambda\right] \bigcap S = \bigcup\nolimits_{\lambda \in \varLambda} \left[U_\lambda \bigcap S\right];$$
$$\left[\bigcap\nolimits_{i=1}^n U_i\right] \bigcap S = \bigcap\nolimits_{i=1}^n \left[U_i \bigcap S\right],$$

容易证明 $\mathcal{T}_S$ 的确是一个 S 上的拓扑.

在拓扑空间的一个子集上, 如果定义上述子空间拓扑, 则称它带有继承拓扑.

在实际应用中, 我们经常要遇到拓扑空间的子空间. 因此, 子空间拓扑是一个十分重要的概念.

例 6.2.3 (1) 设 $x \in \mathbb{R}^m$ $(m < n)$. 将 x 等同于 $(x, 0) \in \mathbb{R}^n$, 则 $\mathbb{R}^m$ 可看作 $\mathbb{R}^n$ 的子集. 设 $\mathbb{R}^n$ 上的普通拓扑为由其欧氏距离导出的拓扑, 容易看出, $\mathbb{R}^m$ 作为子空间的继承拓扑与它的普通拓扑是一致的.

(2) 在 $\mathbb{R}^2$ 上每一点 (x, y) 定义一个直角区域

$$B_{(x,y)} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \,|\, u > x, v > y\};$$

记所有直角区域集合为

$$\mathcal{B} = \{B_{(x,y)} \,|\, (x, y) \in \mathbb{R}^2\}.$$

容易验证, $\mathcal{B}$ 可以作为一个拓扑基. 于是它可生成一个拓扑 $\mathcal{T}$, 使 $(\mathbb{R}^2,\mathcal{T})$ 为一拓扑空间. 设 L 为平面上一条直线, 如果 L 与 x 轴或 y 轴平行, 则子空间拓扑是半直线拓扑 (见例 6.1.3); 否则, 子空间拓扑为普通拓扑. □

一个拓扑空间的子集也可以有自己与继承拓扑不同的拓扑. 这时, 它不能称为原空间的拓扑子空间.

例 6.2.4　定义映射 $F:\mathbb{R}^1\to\mathbb{R}^2$ 如下

$$F(t):\begin{cases}x(t)=\sin(2\arctan(t)),\\ y(t)=\cos(2\arctan(t)).\end{cases}$$

F 的像是 $G:=S^1\setminus\{P\}$, 这里 $P=(-1,0)$ (见图 6.2.1). 这时, 在 F 的像 G 上可以定义两种拓扑: (1) 因为 F 是一对一的, 可以将 $\mathbb{R}^1$ 上的拓扑直接搬到 G 上: 即, 如果 $U\subset\mathbb{R}^1$ 开, 则 $F(U)\subset G$ 开. (2) 可以将 G 看作 $\mathbb{R}^2$ 的子空间, 则它可以具有子空间拓扑. 这两个拓扑是不同的. 例如, 在第一个拓扑下, G 是闭的, $\bar{G}=G$; 在第二个拓扑下, G 不是闭的, $\bar{G}=S^1$. □

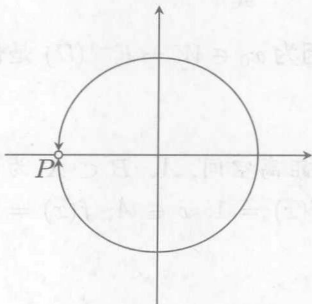


图 6.2.1　子空间拓扑

最后, 我们再回到连续映射, 讨论一个连续映射的延拓定理, 即将在局部定义的连续函数拓广到整个空间. 它在系统控制中也有许多应用, 例如, 当我们寻找连续反馈控制时, 我们可能先在部分区域上造出状态反馈律, 然后, 再把它拓展到全空间. 这时, 延拓定理就成了有力的工具.

设 X 是一个距离空间, $A\subset X$, $x\in X$. 定义 x 到 A 的距离

$$d(x,A):=\inf_{a\in A}d(x,a).$$

那么, 这个距离是 x 的连续函数.

引理 6.2.1　设 X 是一个距离空间, $A\subset X$. 定义 $F(x):=d(x,A)$, 则 $F:X\to\mathbb{R}$ 是一个连续函数.

证明 设 $\varnothing \neq U \subset \mathbb{R}$ 为一开集, 我们要证明 $F^{-1}(U) := W$ 开. 如果 $W = \varnothing$, 则已是开集, 否则, 设 $x_0 \in W$, 即 $y_0 = F(x_0) \in U$. 因为 U 开, 则存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $(y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon) \in U$, 因为 $F(x_0) = d(x_0, A)$, 根据定义, 存在 $a_0 \in A$, 使得

$$d(x_0, a_0) < F(x_0) + \varepsilon/2.$$

构造邻域球 $B_{\varepsilon/2}(x_0)$, 若 $x \in B_{\varepsilon/2}(x_0)$, 则有三角不等式

$$d(x, a_0) \leqslant d(x, x_0) + d(x_0, a_0) < F(x_0) + \varepsilon,$$

于是

$$d(x, A) \leqslant d(x, a_0) < F(x_0) + \varepsilon.$$

同样, 由三角不等式有, 对任一 $a \in A$,

$$d(x, a) > d(x_0, a) - d(x, x_0) > F(x_0) - d(x, x_0) > F(x_0) - \varepsilon/2.$$

因此

$$F(x) = \inf_{a \in A} d(x, a) > F(x_0) - \varepsilon.$$

这就是说, $F(B_{\varepsilon/2}(x_0)) \subset U$. 因为 $x_0 \in W = F^{-1}(U)$ 是任意的, 故 W 的任意点都是内点, 即 W 开. □

引理 6.2.2 设 X 是一个距离空间, A、$B \subset X$ 为两个不相交闭集, 则存在一个连续函数 $f : X \to \mathbb{R}$, 使得 $f(x) = 1$, $x \in A$; $f(x) = -1$, $x \in B$; $-1 < f(x) < 1$, $x \in X \setminus (A \cup B)$.

证明 先证明: 对任一 $x \in X$ 有

$$d(x, A) + d(x, B) > 0.$$

设存在 x 使 $d(x, A) + d(x, B) = 0$, 即 $d(x, A) = 0$ 且 $d(x, B) = 0$. 因为 $d(x, A) = 0$, 则存在 $\{a_i\} \subset A$, 使 $\lim_{i \to \infty} a_i = x$. 而 A 为闭集, 则 $x \in A$. 同理, $x \in B$. 于是 $A \cap B \neq \varnothing$, 矛盾.

于是, 我们可以定义

$$f(x) = \frac{d(x, B) - d(x, A)}{d(x, B) + d(x, A)}, \tag{6.2.1}$$

直接验算即知, 这个 $f(x)$ 满足要求. □

定理 6.2.1 (Tietze 扩张定理) 在距离空间的一个闭集上定义的连续函数可以连续扩张到全空间.

证明　设 X 为一距离空间, $C\subset X$ 为一闭集, $f:C\to\mathbb{R}$ 连续. 先设 $f(x)$ 有限. 不失一般性可设存在 $M>0$, 使得

$$\max_{x\in C}f(x)=M;\quad \min_{x\in C}f(x)=-M. \tag{6.2.2}$$

否则, 记

$$\max_{x\in C}f(x)=a;\quad \min_{x\in C}f(x)=b.$$

做变换

$$\tilde{f}=\left(\frac{2}{a-b}\right)f(x)-\frac{a+b}{a-b},$$

则 $\tilde{f}$ 满足式 (6.2.2).

定义两个集合

$$A_1=\{x\in C\,|\,f(x)\geqslant M/3\};$$

$$B_1=\{x\in C\,|\,f(x)\leqslant -M/3\}.$$

容易看出, A_1、B_1 为闭集 (例如, $A_1=f^{-1}([M/3,+\infty))$ 为闭集的原像, 故闭), 且 $A_1\cap B_1=\varnothing$. 由引理 6.2.2 可知, 存在 $g_1:X\to[-M/3,M/3]$ 连续, 使得 $g_1(x)=M/3$, $x\in A_1$; $g_1(x)=-M/3$, $x\in B_1$; $-M/3<g_1(x)<M/3$, $x\in X\setminus(A_1\cup B_1)$. 注意到

$$|f(x)-g_1(x)|\leqslant\frac{2M}{3},\quad x\in C.$$

然后考虑 $f(x)-g_1(x)$. 类似地, 定义两个集合

$$A_2=\{x\in C\,|\,f(x)-g_1(x)\geqslant 2M/9\};$$

$$B_2=\{x\in C\,|\,f(x)-g_1(x)\leqslant -2M/9\}.$$

则存在 $g_2:X\to[-2M/9,2M/9]$ 连续, 使得 $g_2(x)=2M/9$, $x\in A_2$; $g_2(x)=-2M/9$, $x\in B_2$; $-2M/9<g_1(x)<2M/9$, $x\in X\setminus(A_2\cup B_2)$. 误差为

$$|f(x)-g_1(x)-g_2(x)|\leqslant\frac{4M}{9},\quad x\in C.$$

继续这一过程, 可以构造

$$g_n:X\to\left[-\frac{2^{n-1}M}{3^n},\frac{2^{n-1}M}{3^n}\right],$$

它满足

$$\left|f(x)-\sum_{i=1}^{n}g_i(x)\right|\leqslant\frac{2^nM}{3^n},\quad x\in C \tag{6.2.3}$$

以及

$$|g_n(x)| < \frac{2^{n-1}M}{3^n}, \quad x \in X \setminus C. \tag{6.2.4}$$

不难看出, $\sum\limits_{i=1}^{\infty} g_n(x)$ 在 X 上一致收敛, 因此 $g(x) := \sum\limits_{i=1}^{\infty} g_n(x)$ 存在且连续. 而且

$$g(x) = f(x), \quad x \in C.$$

注意到

$$|g(x)| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} |g_n(x)| \leqslant M \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}M}{3^n} = M, \quad x \in X; \tag{6.2.5}$$

并且, 由式 (6.2.4) 知

$$|g(x)| < M, \quad x \in X \setminus C. \tag{6.2.6}$$

最后, 考虑 $f(x)$ 无界的情况. 取 $h : (-\infty, \infty) \to (-1, 1)$ 为一同胚映射 (例如, $h(x) = \frac{2}{\pi}\arctan(x)$), 则 $h \circ f$ 取值在 $(-1, 1)$ 之间. 构造 $\xi(x)$, 使得

$$\xi(x) = h \circ f(x), \quad x \in C.$$

于是

$$h^{-1} \circ \xi(x) = f(x), \quad x \in C.$$

即 $h^{-1} \circ \xi(x)$ 为 $f(x)$ 的连续扩张. □

6.3 分离与联通性

距离空间通过距离将点与点或集合与集合分开. 在一般拓扑空间中我们希望通过拓扑作同样的事情. 一般拓扑空间中没有距离, 因此, 只能通过开集来区分它们.

定义 6.3.1 (1) 一个拓扑空间 $(X, \mathcal{T})$ 称为 T_0 空间, 如果对任何两个点 $x, y \in X$, 或者存在一个 $U_x \in \mathcal{T}$ 使得 $x \in U_x$ 且 $y \notin U_x$, 或者存在一个 $U_y \in \mathcal{T}$ 使得 $y \in U_y$ 且 $x \notin U_y$.

(2) 一个拓扑空间 $(X, \mathcal{T})$ 称为 T_1 空间, 如果对任何两个点 $x, y \in X$ 存在两个开集 $U_x \in \mathcal{T}$ 及 $U_y \in \mathcal{T}$, 使得 $x \in U_x$ 及 $y \notin U_x$, 并且 $y \in U_y$ 及 $x \notin U_y$.

(3) 一个拓扑空间 $(X, \mathcal{T})$ 称为 T_2 空间, 如果对任何两个点 $x, y \in X$ 存在两个开集 $U_x \in \mathcal{T}$ 及 $U_y \in \mathcal{T}$, 使得 $x \in U_x$, $y \in U_y$, 并且 $U_x \cap U_y = \varnothing$. T_2 空间也称 Hausdorff 空间.

由定义可知 T_2 空间一定是 T_1 空间, 而 T_1 空间一定是 T_0 空间. 因此, (将 T_i 看作 T_i 空间的集合时) 我们有如下的包含关系

$$T_2 \subset T_1 \subset T_0. \tag{6.3.1}$$

下面的例子说明它们依序为后者的真子集.

例 6.3.1 (1) 回忆例 6.1.3,

$$\mathcal{T} = \{(-\infty, r) \,|\, r \in \mathbb{R}\} \bigcup \{\mathbb{R}^1, \varnothing\}.$$

容易检验, $(\mathbb{R}^1, \mathcal{T})$ 是一个 T_0 空间, 因为任给两点 $x \neq y$, 不失一般性, 假设 $x < y$, 那么, 构造开集 $U = (-\infty, \frac{x+y}{2})$, 则 $x \in U$ 且 $y \notin U$. 但它不是 T_1 空间. 因为任何包含 y 的开集都包含 x.

(2) 考虑 $\mathbb{R}^1$ 上的余有限拓扑

$$\mathcal{T} = \{U \subset \mathbb{R} \,|\, U^c \text{ 有限}\},$$

那么 $(\mathbb{R}^1, \mathcal{T})$ 是一个 T_1 空间, 因为给定两点 $x \neq y$. 则 $\mathbb{R}^1 \setminus \{x\}$ 为包含 y 而不包含 x 的开集, 而 $\mathbb{R}^1 \setminus \{y\}$ 为包含 x 而不包含 y 的开集. 它不是 T_2 空间, 因为它的每个非空开集都是全空间刨去有限点, 所以任何两个非空开集都不可能不相交.

(3) 依普通拓扑, 容易证明 $\mathbb{R}^n$ 是一个 T_2 空间, 它是下面这种情况的特例.

(4) 任何一个距离空间, 依距离导出拓扑, 总是一个 T_2 空间. 设任给两点 $x \neq y$, 则 $r = d(x, y) > 0$. 作开球 $B_1 = B_{r/2}(x)$, $B_2 = B_{r/2}(y)$ 于是 $x \in B_1$, $y \in B_2$, 且 $B_1 \cap B_2 = \varnothing$. □

设 X 为一拓扑空间, $A \subset X$. 类似于一点, 我们也可以定义 A 的一个邻域. $N \supset A$ 称为 A 的一个邻域, 如果存在一个开集 U, 使得 $A \subset U \subset N$. 有了这个概念, 我们可以对集合作分离.

定义 6.3.2 (1) 一个 T_1 空间 $(X, \mathcal{T})$ 称为 T_3 空间, 如果对任何一个点 $x \in X$, 一个闭集 $C \subset X$, $x \notin C$, 存在两个开集 (开邻域) U_x 和 U_C, 使得 $x \in U_x$, $C \subset U_C$, 且 $U_x \cap U_C = \varnothing$. T_3 空间也称正则空间 (regular space).

(2) 一个 T_1 空间 $(X, \mathcal{T})$ 称为 T_4 空间, 如果对任何两个不相交闭集 $C_1 \subset X$, $C_2 \subset X$, $C_1 \cap C_2 = \varnothing$, 存在两个开集 (开邻域) U_1、U_2, 使得 $C_1 \subset U_1$, $C_2 \in U_2$, 并且 $U_1 \cap U_2 = \varnothing$. T_4 空间也称正规空间 (normal space).

在上述定义里为什么要先要求 T_1 呢? 因为 T_1 空间中单点集是闭的. 更一般地说, 有如下命题.

命题 6.3.1 设 X 为 T_1 空间, $N = \{x_1, \cdots, x_n\} \subset X$ 为一有限集, 则 N 为闭集.

证明 只要证单点集 $N_i = \{x_i\}$ 闭, 则 $N = \cup_{i=1}^n N_i$ 也闭. 设 $y \neq x_i$, 则存在 U_y 开, 使 $y \in U_y$, $x \notin U_y$. 因此, N_i^c 开, 即 N_i 闭. □

现在, 对于 T_3 或 T_4 空间, 单点集是闭的. 于是显然

$$T_4 \subset T_3 \subset T_2. \tag{6.3.2}$$

距离空间是非常好的拓扑空间, 它具有所有这些分离性质 (参见习题 6.16 和习题 6.17).

有了分离的概念, 我们就可以讨论连通了. 直观地说, 连通就是分不开.

定义 6.3.3 给定一个拓扑空间 M. 一个集合 $U \subset M$ 称为闭开集, 如果它既是闭集也是开集. 一个拓扑空间 M 称为一个连通空间, 如果它只有两个闭开集: M 和 $\varnothing$.

用闭开集来定义连通似乎不够直观, 但实际上这是一个很聪明的办法. 我们通过几个简单例子来理解它.

例 6.3.2 设 $X = \mathbb{R}^1 \setminus \{0\}$. 将 X 看作 $\mathbb{R}^1$ 的拓扑子空间 (带 $\mathbb{R}^1$ 的普通拓扑), X 不连通. 记 $P = \{x \in X \,|\, x > 0\}$, $N = \{x \in X \,|\, x < 0\}$, 那么 P 和 N 均为开集. 同时, 在子空间意义下, $P^c = N$ 是开集, 故 P 闭. 因此 P 是闭开集. 同样可知, N 也是闭开集. 故 X 不连通.

那么在 $\mathbb{R}^1$ 上能否找到类似的闭开集呢? 这是不行的. 譬如, 类似于 X, 记 $P = \{x \in X \,|\, x \geqslant 0\}$, $N = \{x \in X \,|\, x < 0\}$. 那么, P 不开而 N 不闭.

$\mathbb{R}$ 是连通的. 设 $U \neq \varnothing$ 且 $U \neq \mathbb{R}$ 是一个 $\mathbb{R}$ 上的闭开集. 选 $x \in U$ 及 $y \in U^c$, 不妨设 $x < y$. 考虑集合 $V = \{x \in U \,|\, x < y\}$, 那么 V 具有最小上确界 $m \leqslant y$. 因为 U 是闭的, 则 $m \in U$, 因此 $m < y$. 但同时开区间 $(m, y) \subset U^c$, 它也是闭集, 因为 U 是开的. 因此 $m \in U^c$, 这是荒唐的.

同样的讨论显示 $\mathbb{R}$ 中的任何区间都是连通的. □

例 6.3.3 记 $G := GL(n, \mathbb{R}) \subset M_{n\times n}$ 为所有行列式值不为零的 $n \times n$ 实矩阵集合. 将 $M_{n\times n}$ 与 $\mathbb{R}^{n^2}$ 等同, 赋予 G 以 $\mathbb{R}^{n^2}$ 的子空间拓扑, 则 G 不连通. 因为, 定义 $G_+ = \{A \in M_{n\times n} \,|\, \det(A) > 0\}$, $G_- = \{A \in M_{n\times n} \,|\, \det(A) < 0\}$. 由于 $\det : M_{n\times n} \to \mathbb{R}$ 为连续映射, 则 $G_+ = \det^{-1}(0, +\infty)$ 开. 同样, $G_- = \det^{-1}(-\infty, 0)$ 也开. 故 G_+, G_- 均为闭开集. 后面我们将看到 G_+ 和 G_- 为 G 的两个连通分支. □

定义 6.3.4 给定一个拓扑空间 M. 一个连续映射 $\pi : I = [0, 1] \to M$ 称为 M 上的一个路径. M 称为是路径连通的, 如果对任意两点 $x, y \in M$ 总存在一条路径 π 使得 $\pi(0) = x$ 及 $\pi(1) = y$.

例 6.3.4 回忆例 6.3.3, 我们证明 G_+ 和 G_- 都是路径连通的. 为记号简单起见, 设 $n = 2$. 两者的证明本质上完全一样. 先证 G_+. 设 $A \in G_+$, 存在 P 使 $P^{-1}AP$ 为 Jordan 标准形.

情形 1:

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}, \quad a > 0,\ b > 0.$$

定义路径

$$\pi(t) = \begin{bmatrix} (1-t)a + t & 0 \\ 0 & (1-t)b + t \end{bmatrix} \in G_+.$$

显然, π 将 $P^{-1}AP$ 与 I_2 连接起来了, 于是路径 $\tilde{\pi}(t) := P\pi(t)P^{-1}$ 就将 A 与 I_2 连接起来了.

情形 2:

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}, \quad a < 0,\ b < 0.$$

类似于情形 1, 可先用一个路径 $\pi_1(t)$ 将 A 和 $-I_2$ 连接起来, 再用以下的 $\pi_2(t)$ 将 $-I_2$ 与 I_2 连接起来

$$\pi_2(t) = \begin{bmatrix} \cos((t-1)\pi) & \sin((t-1)\pi) \\ -\sin((t-1)\pi) & \cos((t-1)\pi) \end{bmatrix} \in G_+.$$

将两条路径组合成一条路径是很容易的. 即, 设 $\pi_1(0) = A$, $\pi_1(1) = B$, $\pi_2(0) = B$, $\pi_2(1) = C$. 那么, 定义

$$\pi(t) = \begin{cases} \pi_1(2t), & 0 \leqslant t \leqslant 1/2, \\ \pi_1(2t-1), & 1/2 \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

容易看出, π 是连接 A 与 C 的一条路径.

因此, 可以有一条路径将 A 与 I_2 连接起来.

情形 3:

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}.$$

先作

$$\pi(t) = \begin{bmatrix} a & (1-t) \\ 0 & a \end{bmatrix},$$

将它与对角矩阵连接起来. 再利用前两种情况的结果 (或直接构造路径) 将它与 I_2 连接起来.

最后一种情形:

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}.$$

定义 θ 满足

$$\cos(\theta) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin(\theta) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

然后定义路径

$$\pi(t) = \sqrt{a^2+b^2} \begin{bmatrix} \cos((1-t)\theta) & \sin((1-t)\theta) \\ -\sin((1-t)\theta) & \cos((1-t)\theta) \end{bmatrix}.$$

显然, 它将 $P^{-1}AP$ 与对角矩阵连接起来. 再利用前面的结果将它与 I_2 连接起来.

因此, 有路径将 G_+ 中的任何矩阵 A 与 I_2 连接起来. 注意到, 如果 $\pi(t)$ 连接 p, q. 则 $\pi(1-t)$ 连接 q, p. 因此, 有路径将 G_+ 中的任何两个矩阵 A 与 B 连接起来. 即, G_+ 也是路径连通的.

下面证明 G_- 也是路径连通的. 设 $A, B \in G_-$. 令 $Q = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, 则 $QA, QB \in G_+$, 存在 $\pi(t)$ 连接 QA、QB, 于是 $Q^{-1}\pi(t)$ 连接 A、B. (注意: $Q^{-1}\pi(t) \in G_-$.) □

拓扑空间中的一个最大连通子集称为它的一个连通分支. 因此, 通常称 $GL(n,\mathbb{R})$ 有两个连通分支. 这个结论无论在理论研究还是在实际应用中都是十分有用的.

命题 6.3.2 一个路径连通的拓扑空间也是连通的.

证明 设 M 为一个路径连通的拓扑空间, $U \neq \varnothing$ 及 $U \neq M$ 是 M 上的闭开集. 选 $x \in U$ 及 $y \in U^c$. 因为 M 是道路连通的, 所以存在一条路径 $\pi : I \to M$ 使得 $\pi(0) = x$ 及 $\pi(1) = y$. 由连续性, $\pi^{-1}(U)$ 及 $\pi^{-1}(U^c)$ 均为 I 上的非空闭开集, 这是不可能的, 见例 6.3.2. □

下面的例子表明命题 6.3.2 的逆命题不成立.

例 6.3.5 在 $\mathbb{R}^2$ 上定义一个拓扑子空间为 (图 6.3.1)

$$S = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y = \sin\left(\frac{1}{x}\right),\ x > 0 \right\} \cup \{(0,y) \mid y \in \mathbb{R}\}.$$

它是连通的, 因为 Y 轴和曲线均不是闭开集. 实际上, Y 轴不开, 因为它在 $[-1,1]$ 之间的每一点都不是内点, 它的任何邻域都包含曲线上的点. 而曲线不闭, 因为 Y 轴在 $[-1,1]$ 之间的每一点都是曲线的极限点.

但是 S 不是路径连通的, 因为没有一条路径能连接这样的两个点, 一点在 Y 轴上而另一点在曲线上. □

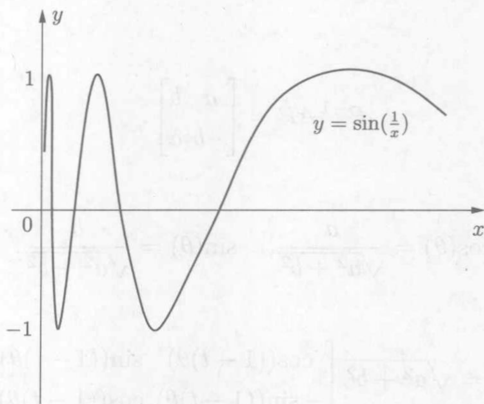


图 6.3.1 连通但不是道路连通

如果 X 是一个拓扑空间, $C \subset X$, 我们说 C 是连通子集 (简称 C 是连通的), 即指 C 作为拓扑子空间是连通的.

命题 6.3.3 设 $C_\lambda \subset X, \lambda \in \Lambda$ 是连通的, 且 $\cap_{\lambda\in\Lambda} C_\lambda \neq \varnothing$. 那么 $C = \cup_{\lambda\in\Lambda} C_\lambda$ 是连通的.

证明 在子空间 C 中, 设存在 $\varnothing \neq U \subsetneq C$ 为闭开集, 则 U^c 为非空闭开集. 由于 C_λ 是连通的, 它必须或者在 U 中或者在 U^c 中. 由于 U 与 U^c 非空, 至少有一个 C_{λ_1} 在 U 中, 也至少有一个 C_{λ_2} 在 U^c 中. 于是, $\cap_{\lambda\in\Lambda} C_\lambda = \varnothing$, 矛盾. □

命题 6.3.4 设 $A \subset X$ 连通, $A \subset B \subset \bar{A}$, 则 B 连通. 作为特例, $\bar{A}$ 连通.

证明 设 U 为 X 空间的闭开集, 则由 A 连通可知, $A \subset U$ 或 $A \subset U^c$. 不妨设 $A \subset U$, 则 $\bar{A} \subset U$, 故 $B \subset U$. □

邻域的连通性质常常也是十分重要的.

定义 6.3.5 一个拓扑空间 M 称为在点 $x \in M$ 局部连通, 如果 x 的任一邻域 N_x 包括一个连通的邻域 $U_x \ni x$. M 称为局部连通的, 如果它在每一点均局部连通.

下面的例子表明, 局部连通空间未必是连通的 (因此也未必道路连通); 反之, 道路连通空间也未必是局部连通的 (因此, 连通空间也未必是局部连通的).

例 6.3.6 (1) 考虑 $\mathbb{R}$ 连同它的离散拓扑, 那么它是局部连通的, 因为每一点它本身就是自己的连通邻域. 但它不连通, 因为每一点都是闭开集.

(2) 设 B_i, $i = 1, 2, \cdots$ 为从原点到 $(1, \frac{1}{i})$ 的闭线段, B_0 为 X 轴上的闭线段 $[0, 1]$, 如图 6.3.2 所示.

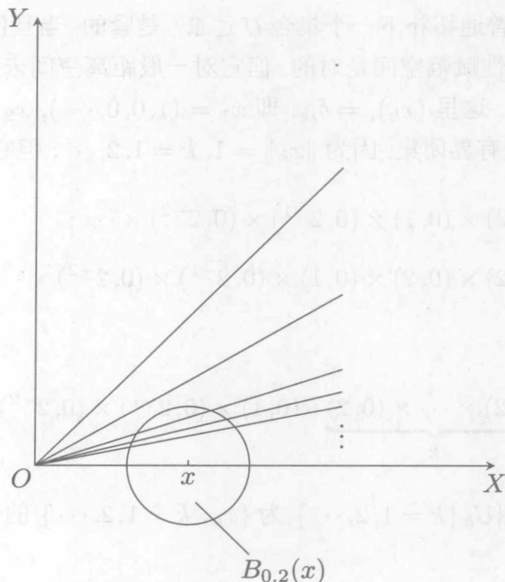


图 6.3.2 无限扫帚

一个无限扫帚定义为

$$B = \bigcup_{i=0}^{\infty} B_i,$$

它显然是道路连通的.

但它不是局部连通的. 假如, 考虑一点 $x = (0.5, 0)$, 其邻域球 $B_{0.2}(x)$ 不包括任何连通邻域. □

6.4 紧空间

不论在数学分析或者泛函分析中, 空间的紧致性都是十分重要的. 同样, 一般拓扑空间的紧致性是一个十分重要的概念.

定义 6.4.1 设 $\{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ 为 M 上的一族开集, 它称为 M 的一个开覆盖, 如果

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \supset M.$$

M 称为一个紧空间, 如果它的任一开覆盖均有一有限子覆盖, 即存在一个有限子集 $\{U_{\lambda_i} \mid i = 1, 2, \cdots, k\}$, 使得

$$\bigcup_{i=1}^{k} U_{\lambda_i} \supset M.$$

由微积分中知道在普通拓扑下一个集合 $U \subset \mathbb{R}^n$ 是紧的, 当且仅当它是有界闭集. 这对 $\mathbb{R}^n$, 或者说有穷维线性赋范空间是对的, 但它对一般距离空间未必对. 例如, 考虑集合 $\{x_k\} \subset \ell^2$, $k = 1, 2, \cdots$, 这里 $(x_k)_i = \delta_{ik}$, 即 $x_1 = (1, 0, 0, \cdots)$, $x_2 = (0, 1, 0, \cdots)$ 等. 显然 $\{x_k \mid k = 1, 2, \cdots\}$ 是有界闭集, 因为 $\|x_k\| = 1$, $k = 1, 2, \cdots$; 但它不紧. 构造开集族

$$\begin{aligned}
&U_1 = (0,2) \times (0,1) \times (0, 2^{-1}) \times (0, 2^{-2}) \times \cdots;\\
&U_2 = (0,2) \times (0,2) \times (0,1) \times (0, 2^{-1}) \times (0, 2^{-2}) \times \cdots;\\
&\vdots\\
&U_k = \underbrace{(0,2) \times \cdots \times (0,2)}_{k} \times (0,1) \times (0, 2^{-1}) \times (0, 2^{-2}) \times \cdots.
\end{aligned}$$

那么, $U_k \subset l^2$ 开. 显然 $\{U_k \mid k = 1, 2, \cdots\}$ 为 $\{x_k,\ k = 1, 2, \cdots\}$ 的一个开覆盖, 但不存在它的一个有限子覆盖.

定义 6.4.2 在一个拓扑空间 M 中称一个序列 x_k 收敛于 x, 如果对 x 的任一邻域 $U \ni x$ 总存在一个 $N > 0$, 使得 $n > N$ 时 $x_n \in U$.

为强调这是一个拓扑性质考虑如下的简单例子.

例 6.4.1 考虑 $\mathbb{R}^1$. 设 $x_k=\frac{1}{k}$, $k=1,2,\cdots$.

(1) 在普通拓扑下显见 $x_k\to 0$, 因为对零的任意邻域 U 存在一个开邻域, 球 $B_\varepsilon(0)=\{x\,|\,|x|<\varepsilon\}\subset U$. 令 $N>\frac{1}{\varepsilon}$, 则当 $n>N$ 时, $x_n\in U$, 故一般定义与微积分中的定义一致.

(2) 给 $\mathbb{R}^1$ 以离散拓扑, 即对每一点 $x\in\mathbb{R}^1$, $\{x\}$ 均为一开集, 那么 $\{x_k\}$ 不会收敛到任何点. 因为它不能进入任何单点集 $\{r\}$, 而这是 r 的一个邻域.

(3) 在 $\mathbb{R}^1$ 上加上余有限拓扑. 回忆例 6.1.3 之 (2), 在这个拓扑里 $U\neq\varnothing$ 为开集, 当且仅当 U^c 是有限的. 那么 x_k 收敛到任意一点. 设 $r\in\mathbb{R}$ 为任意点, 且 $U\ni r$ 为一余有限邻域, 因为 U^c 有限, 至多有有限 $x_k\in U^c$, 结论显见. □

命题 6.4.1 设 M、N 为两个拓扑空间. 且 M 是第一可数的. 那么 $f:M\to N$ 连续, 当且仅当对每一个序列 $x_k\to x$, 均有 $f(x_k)\to f(x)$.

证明 (必要性) 对任一开集 $U\ni f(x)$, 由连续性 $f^{-1}(U)\ni x$ 是开的. 由于 $x_n\to x$, 存在 $N>0$ 使得 $x_n\in f^{-1}(U)$, $n>N$, 于是有 $f(x_n)\in U$, $n>N$.

(充分性) 设 $U\subset N$ 为一开集, 我们要证明 $f^{-1}(U)$ 也是开的. 只要证明对每一个 $x\in f^{-1}(U)$ 存在一个开集 V, 使得 $x\in V\subset f^{-1}(U)$. 如果这不对, 那么至少有一个点 $x_0\in f^{-1}(U)$, 它的任一邻域不包含在 $f^{-1}(U)$ 中. 由于 M 是第一可数的, 设 U_k 为其可数邻域基, 且设 $V_k=\cap_{i=1}^k U_i$, 我们得到一族收缩的邻域. 因为 $V_k\not\subset f^{-1}(U)$, 存在 $x_k\in V_k$ 且 $x_k\notin f^{-1}(U)$. 现在 $x_k\to x_0$ 故 $f(x_k)\to f(x_0)\in U$. 于是存在 $N>0$ 使得 $f(x_n)\in U$, $n>N$, 这意味着 $x_n\in f^{-1}(U)$, 这是一个矛盾. □

定义 6.4.3 一个拓扑空间称为列紧的, 如果它的每一个无穷序列都包含一个收敛子序列.

紧与列紧的等价性在距离空间证明过, 实际上它可以推广到第一可数的拓扑空间[43].

定理 6.4.1 (Bolzano-Weierstrass) 设 M 为一个第一可数拓扑空间. M 是紧的, 当且仅当它是列紧的.

定理 6.4.2 (1) 紧集的连续像是紧的;

(2) 设 X 为 Hausdorff 空间, $A\subset X$ 是紧集, 则 A 为闭集;

(3) 紧空间 X 的闭子空间 $A\subset X$ 是紧的.

证明 (1) 设 Y 是紧集, $f:Y\to Z$ 是连续的. $\{U_\lambda\,|\,\lambda\in\Lambda\}$ 是 $f(Y)$ 的一个开覆盖, 则 $\{f^{-1}(U_\lambda)\,|\,\lambda\in\Lambda\}$ 是 Y 的一个开覆盖. 是紧的, 故存在 Y 的一个有限子覆盖 $\{f^{-1}(U_i)\,|\,i=1,\cdots,n\}$. 于是 $\{U_i\,|\,i=1,\cdots,n\}$ 是 $f(Y)$ 的一个有限子覆盖.

(2) 取 $x_0\in A^c$, 对任一 $a\in A$, 存在两个开集 $W_a\cap U_a=\varnothing$, 使得 $x_0\in W_a$ 及 $a\in U_a$. 于是 $\{U_a\cap A\,|\,a\in A\}$ 成为 A 的一个开覆盖. 由 A 的紧性, 存在有限子覆盖 $\{U_{a_i}\,|\,i=1,\cdots,n\}\supset A$, 于是 $\cap_{i=1}^n W_{a_i}\subset A^c$ 为一包含 x_0 的开集, 故 A^c 开.

(3) 设 $\{B_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ 为一族开集且

$$\cup_{\lambda\in\Lambda}(B_\lambda \cap A) \supset A,$$

那么 $\{B_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\} \cup A^c$ 是 X 的一个开覆盖. 故存在有限子覆盖 $\{B_{\lambda_i} \mid i=1,\cdots,n\} \cup A^c \supset X$.

于是 $\{B_{\lambda_i} \cap A \mid i=1,\cdots,n\}$ 为 A 的有限子覆盖, 故 A 紧. □

定理 6.4.3 设 X 是一个紧空间, Y 是一个 Hausdorff 空间, $f: X \to Y$ 为连续映射.

(1) f 是闭映射 (即将闭集映为闭集);

(2) 如果 f 还是一对一映上的, 则 f 是一个同胚.

证明 (1) 利用定理 6.4.2: 设 $C \subset X$ 为闭集, 则 C 紧, 于是 $f(C) \subset Y$. 又因 Y 是一个 Hausdorff 空间, 则 $f(C)$ 闭.

(2) 因 $f(C)$ 闭, 故 f^{-1} 连续. □

我们知道对于连续映射, 一个开集 (或闭集) 的逆像也是开的 (闭的). 但一个紧集的逆像却未必是紧的. 例如, $f(x)=\sin(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是连续的. $I=[-1,1]$ 是紧的, 但 $f^{-1}(I)=\mathbb{R}$ 却不紧.

定义 6.4.4 设 $f: M \to N$ 为一连续映射. 如果对每一个紧集 $V \subset N$, 其逆像 $f^{-1}(V)$ 也是紧的, 则 f 称为一个恰当映射.

例 6.4.2 (1) 设 $f: \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ 为严格单调连续函数, 且 $|f(x)| \to \infty$ (当 $|x| \to \infty$), 则 f 为一恰当映射.

这时, 因为 $f(x)$ 是一个同胚映射, 结论显见.

(2) 设 $f: \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ 为 $2n+1$ 次多项式, 则 f 为一恰当映射.

不妨设 $f(x)$ 的 $2n+1$ 次方项系数为正, 由于当 $|x|$ 足够大时 $f(x)$ 是严格单调增的, 故存在两点 $x_1 < x_2$, 使当 $x \leqslant x_1$ 或 $x \geqslant x_2$ 时 $f(x)$ 严格单调增, 并且

$$f(x_1) < f(x) < f(x_2), \quad x_1 < x < x_2.$$

令 V 为一紧集, $y_1 = \inf\{y \mid y \in V\}$, $y_2 = \sup\{y \mid y \in V\}$. 如果 $y_1 < f(x_1)$, 由单调性存在唯一 x_3, 使 $f(x_3)=y_1$. 取 $z_1 = x_3$, 否则, 取 $z_1 = x_1$. 同样, 如果 $y_2 > f(x_2)$, 存在唯一 x_4, 使 $f(x_4) = y_2$. 取 $z_2 = x_4$, 否则, 取 $z_2 = x_2$. 显见, $f^{-1}(V) \subset [z_1, z_2]$, 即 $f^{-1}(V)$ 有界、闭, 故紧. □

紧距离空间的开覆盖有一个重要的可度量的性质:

定理 6.4.4 设 X 为一紧距离空间, $\{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ 为其开覆盖, 则存在一个数 $\mu > 0$, 称为该覆盖的 Lebesgue 数, 使对每一点 $x \in X$, 至少存在一个 λ, 使得

$$B_\mu(x) \subset U_\lambda.$$

证明 对每个点 $x \in X$, 选择一个 $r_x > 0$, 使得 $B_{r_x}(x) \subset$ 某个 U_λ. 于是

$$\left\{B_{r_x/2}(x) \,\middle|\, x \in X\right\}$$

是 X 的一个开覆盖. 找出一个有限子覆盖

$$\left\{B_{r_{x_i}/2}(x_i) \,\middle|\, i = 1, \cdots, n\right\}.$$

令

$$\mu = \frac{1}{2}\min\{r_{x_i} \,|\, i = 1, \cdots, n\}.$$

下面证明: $\mu > 0$ 是一个 Lebesgue 数.

给定任一 $B_\mu(x)$, 我们有 (对某个 i) $x \in B_{r_{x_i}}(x_i)$. 设 $y \in B_\mu(x)$, 那么

$$d(y, x_i) \leqslant d(y, x) + d(x, x_i) < \mu + r_{x_i}/2 \leqslant r_{x_i},$$

故 $B_\mu(x) \subset B_{r_{x_i}}(x_i)$. 根据我们的选择, $B_{r_{x_i}}(x_i)$ 含于某个 U_λ 中. □

作为 Lebesgue 数的一个应用, 下面的定理在连续映射的估计中十分有用.

定理 6.4.5 设 X 为一紧距离空间, Y 为一距离空间. $f: X \to Y$ 为连续映射. 那么任给 $\varepsilon > 0$, 总存在 $\delta > 0$, 使得对任何点 $x \in X$, 有

$$f(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(f(x)). \tag{6.4.1}$$

证明 构造 Y 的一个开覆盖如下

$$\left\{B_{\varepsilon/2}(y) \,\middle|\, y \in Y\right\},$$

则

$$\left\{f^{-1}(B_{\varepsilon/2}(y)) \,\middle|\, y \in Y\right\}$$

为 X 的一个开覆盖, 设其 Lebesgue 数为 μ. 因为 $B_\mu(x)$ 属于某一个 $f^{-1}(B_{\varepsilon/2}(y))$ 中, 即

$$f(B_\mu(x)) \subset B_{\varepsilon/2}(y), \quad \text{对某个 } y.$$

注意到 $f(x) \in B_{\varepsilon/2}(y)$, 对任一 $z \in B_\mu(x)$ 有

$$d(f(z), f(x)) \leqslant d(f(z), y) + d(y, f(x)) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

故 $f(B_\mu(x)) \subset B_\varepsilon(f(x))$. □

在数学分析中有一个熟知的结论: 紧区间上的连续函数一致连续. 实际上, 式 (6.4.1) 的几何意义就是一致连续, 因此, 上述定理是分析中的一致连续定理的推广.

下面讨论紧与闭的关系.

命题 6.4.2 紧空间的闭子集是紧的.

证明 设 X 为紧空间, $C \subset X$ 为一闭子集. 设 $\{O_\lambda \,|\, \lambda \in \Lambda\}$ 为 C 的一个开覆盖, 那么 $\{O_\lambda \,|\, \lambda \in \Lambda\} \cup C^c$ 为 X 的一个开覆盖. X 紧, 故存在一个有限子覆盖: $\{O_{\lambda_i} \,|\, i=1,\cdots,n\} \cup C^c$, 于是 $\{O_{\lambda_i} \,|\, i=1,\cdots,n\}$ 为 C 的一个有限子覆盖. □

命题 6.4.3 Hausdorff 空间的紧子集是闭的.

证明 设 X 为 Hausdorff 空间, $C \subset X$ 为其紧子集. 设 $x \in C^c$, 对每一点 $y \in C$ 存在开集 U_y、V_y, $U_y \cap V_y = \varnothing$, 使 $y \in U_y$, $x \in V_y$, 于是 $\{U_y \,|\, y \in C\}$ 成为 C 的一个开覆盖, 它有有限子覆盖

$$\bigcup_{i=1}^{n} U_{y_i} \supset C.$$

取 $V = \bigcap_{i=1}^{n} V_{y_i}$, 则 $x \in V$, $V \subset C^c$ 为开集. 因为 $x \in C^c$ 是任选的, 故 C^c 开, 即 C 为闭集. □

6.5 乘积空间、商空间

乘积空间是一个重要的概念, 一个复杂的空间有时可以分解成几个很简单的拓扑空间的乘积空间.

定义 6.5.1 设 $(X_i, \mathcal{T}_i)$, $i=1,2$ 为两个拓扑空间. 考虑笛卡儿乘积, $X_1 \times X_2 = \{(x,y) \,|\, x \in X_1,\ y \in X_2\}$. 设

$$\{U_1 \times U_2 \,|\, U_1 \in \mathcal{T}_1,\ U_2 \in \mathcal{T}_2\}$$

为一个拓扑基, 记由这个拓扑基生成的拓扑为 $\mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2$, 那么 $(X_1 \times X_2,\ \mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2)$ 为一个拓扑空间, 它称为 X_1 和 X_2 的乘积拓扑空间.

例 6.5.1 考虑线性系统集合

$$S := \{A, B, C \,|\, A \in M_{n\times n},\ B \in M_{n\times m},\ C \in M_{p\times n}\},$$

S 可看作乘积空间 $S = M_{n\times n} \times M_{n\times m} \times M_{p\times n}$.

记能控系统的集合为 $\mathcal{C}$, 能观测系统的集合为 $\mathcal{O}$. 容易证明, 在乘积拓扑下 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{O}$ 均为开稠集. 以能控集为例, 如果 (A,B) 能控, 则能控性矩阵满秩, 那么, 当变化很小时它还是满秩的. 稠是因为, 让能控性矩阵降秩的 (A,B) 满足一组代数方程 (使相应行列式为零), 作为代数方程零点集, 这是零测集, 而且, 它是闭集, 因此, 它无处稠. 因此, $\mathcal{C} \cap \mathcal{O}$ 亦为开稠集. 这说明: 既能控又能观测的系统是"很多"的. □

例 6.5.2 轮胎面, 记作 T^2, 可以看作 x-z 平面上的一个圆 $(x-R)^2 + z^2 = r^2$ 绕 z 轴旋转而成的曲面, 于是曲面上的一个点可以用它在半径为 r 的小圆上的位置 (用角度 φ 表示) 和它在半径为 R 的大圆上的位置 (用角度 θ 表示) 来确定. 严格地说, 用 $[0, 2\pi)$ 角

度表示圆周 S^1 上的一个点, 则 $S^1 = \{\varphi \,|\, 0 \leqslant \varphi < 2\pi\}$ 或 $S^1 = \{\theta \,|\, 0 \leqslant \theta < 2\pi\}$. 那么, 可定义乘积空间 $S^1 \times S^1$ 到轮胎面的一个映射 $F: S^1 \times S^1 \to T^2: (\varphi, \theta) \mapsto (x, y, z)$ 如下

$$\begin{cases} x = R\cos(\theta) + r\cos(\varphi)\cos(\theta), \\ y = R\sin(\theta) + r\cos(\varphi)\sin(\theta), \\ z = R\cos(\varphi). \end{cases}$$

当然, 我们在 S^1 和 T^2 上的拓扑均为普通拓扑, 即 S^1 上的开集是 $\mathbb{R}^2$ 上的开集与它的交, T^2 上的开集是 $\mathbb{R}^3$ 上的开集与它的交. 那么, 容易证明, 上面定义的 F 是一个同胚映射, 所以我们说: $T^2 = S^1 \times S^1$.

一般地说, 我们定义

$$T^k = \underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_{k}.$$

□

判断一个空间是否是 T_2 空间, 下面的判据在乘积空间中给出.

定理 6.5.1 *拓扑空间 $(X, \mathcal{T})$ 是 Hausdorff 空间, 当且仅当在乘积空间 $(X \times X, \mathcal{T} \times \mathcal{T})$ 中对角线*

$$D = \{(x, x) \,|\, x \in X\}$$

是乘积空间中的闭集.

证明 (必要性) 设 X 为 Hausdorff 空间. 令 $(x, y) \in X \times X$ 且 $(x, y) \notin D$, 即 $x \neq y$, 则存在两开集 $U_x \ni x$ 和 $U_y \ni y$, 使得 $U_x \cap U_y = \varnothing$. 现在 $U_x \times U_y \subset X \times X$, $U_x \times U_y$ 是开集且 $(U_x \times U_y) \bigcap D = \varnothing$. 因此, D^c 为开集, 即 D 是闭集.

(充分性) 设 D 为闭集. 给定任意两点 $x, y \in X$ 且 $x \neq y$, 我们知道 $(x, y) \in D^c$, 后者为开集. 因此, 存在开集 $U \subset X \times X$ 使得 $(x, y) \in U \subset D^c$, 但是 $\{U \times V \,|\, U, V \in \mathcal{T}\}$ 是 $\mathcal{T} \times \mathcal{T}$ 的拓扑基, 因此存在 $U_x, V_y \in \mathcal{T}$ 使得

$$(x, y) \in U_x \times V_y \subset U \subset D^c,$$

即有 $x \in U_x$ 及 $y \in V_y$ 并且 $U_x \cap V_y = \varnothing$. 这就证明了 X 是 Hausdorff 空间. □

下面定义无穷多个 (不一定要可数) 拓扑空间的乘积空间: 设 $(X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$ 为一族拓扑空间, 对任一 $\xi \in \Lambda$, $O^\xi \in \mathcal{T}_\xi$, 定义

$$\tilde{O}^\xi = \{\{x_\lambda\} \,|\, x_\lambda \in X_\lambda, \lambda \in \Lambda, \lambda \neq \xi, x_\xi \in O^\xi\},$$

即该集合包含乘积空间这样的点, 它在除 ξ 外的分量可取任意值, 而第 ξ 分量为 O 中点.

任取 Λ 的有限子集 ξ_i 和 $O^{\xi_i} \in \mathcal{T}_{\xi_i}$, $i = 1, \cdots, n$, 我们可构造

$$\tilde{O} = \bigcap_{i=1}^{n} \tilde{O}^{\xi_i},$$

由所有这样形成的 $\tilde{O}$ 的集合族记作 $\mathcal{B}$. 显然, $\mathcal{B}$ 构成一个拓扑基. 由这个拓扑基生成的拓扑称为乘积空间的拓扑, 乘积集合

$$\{\{x_\lambda\} \mid x_\lambda \in X_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$$

带上这个拓扑称为 X_λ, $\lambda \in \Lambda$ 的乘积空间.

直观地说, 在这个乘积拓扑里, 每个开集除了有限多个分量是相应空间的真开子集外, 其他分量均为全空间.

乘积空间会保留因子空间的许多良好性质.

定理 6.5.2 任意多个 Hausdorff 空间的乘积空间是 Hausdorff 空间.

证明 记 $X = \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$. $x, y \in X$, 且 $x \neq y$. 那么, 至少有一个分量 λ_0, 使 $x_{\lambda_0} \neq y_{\lambda_0}$. 于是, 在 X_{λ_0} 上可找到两个开集 U、V, $U \cap V = \varnothing$, 且 $x_{\lambda_0} \in U$, $y_{\lambda_0} \in V$. 现在, 构造乘积空间的两个开集如下: $\tilde{U} = \prod_{\lambda\neq\lambda_0} X_\lambda \times U$, $\tilde{V} = \prod_{\lambda\neq\lambda_0} X_\lambda \times V$, 则 $\tilde{U} \cap \tilde{V} = \varnothing$, 且 $x \in \tilde{U}$, $y \in \tilde{V}$. □

定理 6.5.3 可数多个第一可数 (第二可数) 空间的乘积空间是第一可数 (第二可数) 空间.

证明 我们证第二可数, 第一可数的证明类似. 设 X_i, $i = 1, 2, \cdots$ 为第二可数空间, $\mathcal{B}_i$ 为其可数拓扑基. 首先, 选自然数的有限子集 s, 因为可数集的有限子集可数, 因此, $S := \{s \mid s \subset \mathbb{N}, |s| < \infty\}$ 为可数集. 然后对每个 s 构造

$$O_s = \left\{ \prod_{i\notin s} X_i \prod_{i\in s} B_i \,\middle|\, B_i \in \mathcal{B}_i \right\},$$

于是 O_s 是可数集的有限乘积集合, 仍可数. 最后, $\mathcal{B} := \{O_s | s \in S\}$ 是可数集的可数并, 故仍可数.

同时, 不难验证, $\mathcal{B}$ 是乘积空间的一个拓扑基. 于是, 乘积空间第二可数. □

下面的定理说, 紧空间的乘积空间也是紧的, 它的证明比较麻烦, 可参考文献 [71].

定理 6.5.4 (Tychonoff 定理) 给定 X_λ, $\lambda \in \Lambda$. $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ 是紧的, 当且仅当每一个 X_λ 是紧的.

下面我们考虑商空间, 它也是分析和构造拓扑空间的重要工具. 实际上, 大量有趣的拓扑空间是经由黏合 (即构造商空间) 造出来的.

定义 6.5.2 设 S 为一集合, $\sim$ 为 S 上两个元之间的一个关系. $\sim$ 称为一个等价关系, 如果

(1) $x \sim x$;

(2) 如果 $x \sim y$, 则 $y \sim x$;

(3) 如果 $x \sim y$ 且 $y \sim z$, 则 $x \sim z$.

定义 6.5.3　设 M 为一拓扑空间, $\sim$ 为 M 上的一个等价关系.

(1) 对任一 $x \in M$, 一个等价类, 记作 $[x]$, 定义为

$$[x] = \{y \in M \mid y \sim x\}.$$

(2) 等价类集合记作 $M/\sim$, 映射 $\pi : x \to [x]$ 称为自然投影.

(3) 定义 $M/\sim$ 上的一个子集族如下, 它称为商拓扑,

$$\mathcal{T}_\sim = \{U \in M/\sim \mid \pi^{-1}(U) \text{ 为} M \text{中的开集}\}.$$

命题 6.5.1　设 $M/\sim$ 及 $\mathcal{T}_\sim$ 定义如上, 那么 $(M/\sim, \mathcal{T}_\sim)$ 是一个拓扑空间, 称为 M 对 $\sim$ 的商空间.

证明　我们只要证明 $\mathcal{T}_\sim$ 是一个拓扑空间就够了. 显见, $M/\sim$, $\varnothing \in \mathcal{T}_\sim$.

设 $\pi^{-1}(U_\lambda) \in \mathcal{T}_\sim$, $\lambda \in \Lambda$, 那么因为 $\cup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ 在 M 中开, 则

$$\cup_{\lambda \in \Lambda} \pi^{-1}(U_\lambda) = \pi^{-1}(\cup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda) \in \mathcal{T}_\sim.$$

设 $\pi^{-1}(U_i) \in \mathcal{T}_\sim$, $i = 1, \cdots, k$, 那么因为 $\cap_{i=1}^k U_i$ 在 M 中开, 则

$$\cap_{i=1}^k \pi^{-1}(U_i) = \pi^{-1}(\cap_{i=1}^k U_i) \in \mathcal{T}_\sim.$$

因此, $\mathcal{T}_\sim$ 是一个拓扑. □

如果在一个拓扑空间 M 中, 有等价关系 $\sim$ 使得 $x \sim y$, 则称这两点被黏合到一起. 各种拓扑空间可由一个空间通过粘接某些点而得到. 这样得到的空间称为黏合空间.

黏合实际上是将原空间的点分成一个互不相交的子集族, 称为一个划分. 每个子集就是一个等价类. 因此, 黏合空间的一个点是原空间的一个集合. 于是, 有一个从原空间到黏合空间的一个自然投影, 它将每个点投到它所属的等价类, 而黏合空间的拓扑就是使投影连续的最细的拓扑.

例 6.5.3　令 S 为 $\mathbb{R}^2$ 中的一个矩形

$$S = [0,1] \times [0,1] \in \mathbb{R}^2,$$

设 $\mathbb{R}^2$ 具有普通拓扑且 $S \subset \mathbb{R}^2$ 为其拓扑子空间.

(1) 如果我们将 S 的左边与右边粘接, 即

$$(0, y) \sim (1, y), \quad 0 \leqslant y \leqslant 1,$$

那么商空间 $S/\sim$ 就是一个圆柱面 (图 6.5.1 (a)).

(2) 如果我们将 S 的左边与右边反向粘接, 即

$$(0, y) \sim (1, 1-y), \quad 0 \leqslant y \leqslant 1,$$

那么商空间 $S/\sim$ 就是一个带, 它没有 "里面" 和 "外面" 之分. 直观地说, 一只蚂蚁可以从带的一个面爬到另一个面而无须穿过带的边缘, 这样的面称为不可定向面. 上面这个面称为 Möbius 带 (图 6.5.1 (b)).

(3) 如果我们将 S 的右边与上边粘接, 即

$$(1,z) \sim (z,1), \quad 0 \leqslant z \leqslant 1,$$

并将 S 的左边与下边粘接, 即

$$(0,z) \sim (z,0), \quad 0 \leqslant z \leqslant 1,$$

那么商空间 $S/\sim$ 是一个球面 (图 6.5.1 (c)).

(4) 如果我们将 S 的右边与左边粘接, 即

$$(0,y) \sim (1,y), \quad 0 \leqslant y \leqslant 1,$$

并将 S 上边与下边粘接, 即

$$(x,0) \sim (x,1), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

那么商空间 $S/\sim$ 是一个轮胎面 (图 6.5.1 (d)).

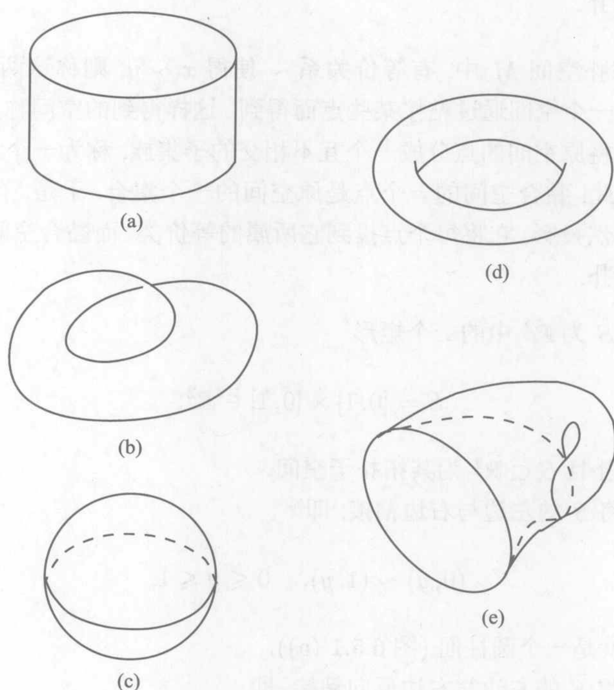


图 6.5.1 矩形的黏合空间

(5) 如果我们将 S 的右边与左边粘接, 即

$$(0,y) \sim (1,y), \quad 0 \leqslant y \leqslant 1,$$

并将 S 的上边与下边反向粘接, 即

$$(x,0) \sim (1-x,1), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

那么商空间 $S/\sim$ 是这样一个密封的瓶子, 蚂蚁可以由瓶子里边爬到外面. 它称为 Klein 瓶 (图 6.5.1 (e)). 实际上这样的瓶子不能在三维空间 $\mathbb{R}^3$ 实现. □

下面讨论黏合空间的一些性质.

命题 6.5.2 设 Y 为 X 的黏合空间, $\pi: X \to Y$ 为自然投影, Z 为任一拓扑空间. 那么 $f: Y \to Z$ 连续, 当且仅当 $f \circ \pi: X \to Z$ 连续.

证明 设 $U \subset Z$ 开. 根据黏合拓扑 (即商拓扑) 的定义, $f^{-1}(U)$ 开, 当且仅当 $\pi^{-1}(f^{-1})(U)$ 开, 也就是 $(f \circ \pi)^{-1}(U)$ 开. □

我们把原空间到黏合空间的自然投影称作黏合映射. 严格定义如下.

定义 6.5.4 设 X, Y 为两拓扑空间. $f: X \to Y$ 称为黏合映射, 如果 (1) f 是映上的 (即满映射); (2) Y 上的拓扑是使 f 连续的最细拓扑 (即 $U \subset Y$ 开当且仅当 $f^{-1}(U)$ 开).

设 $f: X \to Y$ 为一黏合映射, 那么我们可以构造一个 X 的黏合空间 Y_* 如下: X 上的等价类集合为

$$\{f^{-1}(y) \,|\, y \in Y\},$$

它是 X 上的一个划分. 设 Y_* 为这个划分下的黏合空间, $\pi: X \to Y_*$ 为自然投影, 则有如下命题.

命题 6.5.3 (1) $g: Y \to Z$ 连续, 当且仅当 $g \circ f: X \to Z$ 连续.

(2) 空间 Y 与 Y_* 同胚.

证明 (1) 由于 Y 具有使 f 连续的最细拓扑, (1) 的证明与命题 6.5.2 一样.

(2) Y_* 上的点为 $f^{-1}(y)$. 定义 $\xi: Y_* \to Y$ 为 $\xi: f^{-1}(y) \mapsto y$, 则 ξ 为一对一且映上的, 并且满足

$$\xi \circ \pi = f, \quad \xi^{-1} \circ f = \pi.$$

第一个等式及命题 6.5.2 说明 ξ 连续, 第二个等式及本命题的 (1) 说明 ξ^{-1} 连续. □

命题 6.5.4 设 $f: X \to Y$ 为连续满映射, 若 f 为开映射 (将 X 开集映为 Y 开集), 或闭映射 (将 X 闭集映为 Y 闭集), 则 f 为黏合映射.

证明 先设 f 为开映射. 令 $U \subset Y$ 且 $f^{-1}(U) \subset X$ 为开集, 我们要证明 U 为开集. 因为 f 为满映射, 故 $f(f^{-1}(U)) = U$, 但 f 为开映射, 故 U 开. 因此, f 为黏合映射.

闭映射同理可证. □

推论 6.5.1 设 X 为紧空间, Y 为 Hausdorff 空间, $f: X \to Y$ 为连续满映射, 则 f 为黏合映射.

证明 设 $C \subset X$ 为闭集, 则 C 为紧集. $f(C) \subset Y$ 为紧集连续像, 故紧. 现在, $f(C)$ 为 Hausdorff 空间的紧子集, 故闭. 因此, f 为闭映射, 由命题 6.5.4, f 为黏合映射. □

6.6 注释与参考

直观地说, 拓扑学将连续变换的几何体看作一回事. 譬如, 球面和椭球面, 甚至立方体表面. 它研究的对象是几何形体在连续变换下不变的性质. 一个形象的说法是, 拓扑学家不必脱下外衣就可以将里边的背心脱掉. 这个观念是很有用的, 你总可以将一个拓扑空间看作由可以无限伸缩的橡皮制成. 在这个变换下不变的性质就是拓扑性质. 点集拓扑是近代几何学的基础, 是近代数学中一个极其重要的工具.

一般将 18 世纪欧拉及其对哥尼斯堡七桥问题的讨论以及 19 世纪提出的四色问题等看作拓扑学思想的萌芽, 但真正的点集拓扑学是在 20 世纪初发展起来的. 德国数学家 Hausdorff 在 1941 年发表的《集合论基础》, 给出了点集拓扑的一系列基本概念, 标志着点集拓扑学的正式诞生.

哥尼斯堡七桥问题 (图 6.6.1) 是要设计一条路径, 使它不重复地通过每个桥. 欧拉给出了判定一个图可以不重复地一笔画成的条件, 满足这个条件的图后来被称为欧拉图, 而哥尼斯堡七桥不是欧拉图.

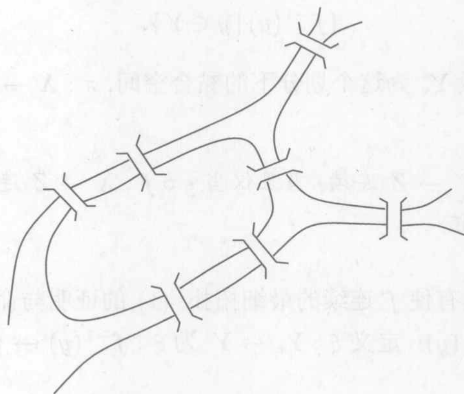


图 6.6.1 哥尼斯堡七桥

四色问题指一张地图总可以用至多四种颜色着色, 使相邻两区域颜色不同. 它最早是 De Morgan 的一个学生在 1852 年提出的, 许多数学家为此绞尽脑汁, 经过一百多年, 两位美国数学家于 1976 年借助电子计算机完成了证明.

哥尼斯堡七桥问题以及四色问题不仅刺激了拓扑学的发展, 还引发了另一个数学分支——图论[115], 图论在系统与控制论中用处很多.

代数拓扑是拓扑学的一个重要组成部分, 它的一些基本概念和方法将在第 6 章介绍.

拓扑学在系统科学和控制理论中有大量应用. 例如, 在处理模糊系统和模糊控制中用到的模糊拓扑. 拓扑动力学是动力系统研究的有力工具[43], 还有在微分动力系统研究中大量使用的微分拓扑的许多重要结论和手段[41]. 由于篇幅所限, 本书未涉及微分拓扑.

点集拓扑的标准教材已经很多, 笔者见到较好的有文献 [1, 85, 71] 等.

各种典型例子, 特别是反例, 有助于加深对概念的理解. 建立严格的数学思维, 避免凭直观想当然的毛病. 因此, 文献 [108] 是一本值得一翻的参考书.

6.7 习题

6.1 证明: (1) 在例 6.1.3 (1) 中定义的半直线拓扑是 $\mathbb{R}^1$ 上的拓扑.

(2) 在例 6.1.3 (2) 中定义的余有限拓扑是 X 上的拓扑.

6.2 验证例 6.1.1 (3) 中的 D2、D3 和 D4 均为距离, 证明它们导出的拓扑是相同的.

6.3 在一个集合上 M 有一组闭集族 $\mathcal{C}=\{C_\lambda\,|\,\lambda\in\Lambda\}$, 当这组闭集族满足什么条件时, 它在 M 上定义了一个拓扑?

6.4 证明命题 6.1.1.

6.5 给一个集合 $M=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ 及一个子集族 $S=\{\{1,3\},\{3,4,5\}\}$.

(1) 找出包含 S 的最小拓扑 $\mathcal{T}$;

(2) 找出 $\mathcal{T}$ 的最小拓扑基;

(3) 找出 0 的一个邻域基;

(4) 一个映射 $F:(M,\mathcal{T})\to(M,\mathcal{T})$ 定义为 $F(1)=1$, $F(2)=4$, $F(3)=1$, $F(4)=5$, $F(5)=4$, $F(k)=5$, $k=6,7,8,9,0$. F 是否连续?

6.6 在 $\mathbb{R}^1$ 中定义一个余可数拓扑 $\mathcal{T}$ 为: $\mathbb{R}^1\in\mathcal{T}$, $\phi\in\mathcal{T}$, 如果 $S\neq\phi$, $S\in\mathcal{T}$ 当且仅当 S^c 可数. (1) 证明 $(M,\mathcal{T})$ 是一个拓扑空间. (2) $(M,\mathcal{T})$ 是 T_0 空间吗? 是 T_1 空间吗? 是 T_2 空间吗? (3) $(M,\mathcal{T})$ 是第一可数的吗? 是第二可数的吗?

6.7 在 $\mathbb{R}^2$ 中定义拓扑 $\mathcal{T}$ 如下: $\mathcal{T}$ 包含 $\mathbb{R}^2$ 及圆盘 $\{D_r\,|\,r\geqslant 0\}$, 它定义为

$$D_r=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,x^2+y^2<r^2\}.$$

(1) 证明这是一个拓扑空间. (2) $(M,\mathcal{T})$ 是 T_0 空间吗? 是 T_1 空间吗? 是 T_2 空间吗? (3) $(M,\mathcal{T})$ 是第一可数的吗? 是第二可数的吗?

6.8 设 X 为一集合, $\mathcal{C}$ 为 X 的一个子集族, 它满足

(1) $X\in\mathcal{C}$, $\varnothing\in\mathcal{C}$;

(2) 如果 $U_\lambda\in\mathcal{C}$, $\forall\lambda\in\Lambda$, 则 $\cap_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda\in\mathcal{C}$;

(3) 如果 $U_i\in\mathcal{C}$, $i=1,\cdots,n$, 那么 $\cup_{i=1}^n U_i\in\mathcal{T}$.

证明 X 是以 $C\in\mathcal{C}$ 为闭集的拓扑空间.

6.9 (拓扑的闭集定义) 设 X 为一集合, $\mathcal{C}$ 为 X 的子集族, 满足

(1) $X \in \mathcal{C}, \varnothing \in \mathcal{C}$;

(2) 如果 $W_\lambda \in \mathcal{C}$, $\lambda \in \Lambda$, 那么

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} W_\lambda \in \mathcal{C};$$

(3) 如果 $W_i \in \mathcal{C}$, $i = 1, \cdots, n$, 那么

$$\bigcup_{i=1}^{n} W_i \in \mathcal{C};$$

则 $(X, \mathcal{T})$ 是一个拓扑空间, 这里

$$\mathcal{T} = \{W^c \mid W \in \mathcal{C}\}.$$

6.10 举例说明

(1) 一个集合未必有包含它的最小开集;

(2) 一个集合未必有它所包含的最大闭集.

6.11 记 $A = \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ 为平面上除去以整数为坐标的点余下的集合. 给出 $\bar{A}$、$\mathring{A}$、$bd(A)$.

6.12 证明命题 6.1.3 的 (2) 和 (3).

6.13 (1) 设 $\mathbb{R}^1$ 带有半直线拓扑 (见例 6.1.3), 证明 $\mathbb{Z}$ 在 $\mathbb{R}^1$ 中稠.

(2) 设 $\mathbb{R}^1$ 带有余有限拓扑 (见例 6.1.3), 证明 $\mathbb{Z}$ 在 $\mathbb{R}^1$ 中稠.

6.14 设 U_i, $i = 1, \cdots, n$ 为拓扑空间 X 中的开稠集, 证明 $\cap_{i=1}^n U_i$ 也是一个开稠集.

6.15 开稠集一定很大吗? 在 $\mathbb{R}^1$ 上, 在普通拓扑意义下造一个开稠集, 使其测度小于任给的 $\varepsilon > 0$.

6.16 证明: 距离空间是 T_3 空间. (提示: 利用引理 6.2.1.)

6.17 证明: 距离空间是 T_4 空间. (提示: 利用 Tietze 扩张定理.)

6.18 证明: $GL(n, \mathbb{C})$ 是道路连通的. 这里, $GL(n, \mathbb{C})$ 是 $n \times n$ 可逆复数矩阵集合.

6.19 设 X 为一个紧空间. C_λ, $\lambda \in \Lambda$ 为一族闭集. 如果

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda = \varnothing,$$

则存在有限子集, $\{C_{\lambda_k} | k = 1, \cdots, n\}$, 使得

$$\bigcap_{k=1}^{n} C_{\lambda_k} = \varnothing.$$

试证之.

6.20 证明: 紧的 Hausdorff 空间是 T_3 空间.

6.21 说明下列关系哪些是等价关系, 哪些不是?

(1) 空间同胚; (2) 群同构; (3) 群同态; (4) $f(x)=g(x)$, (a.e); (5) $a \geqslant b$.

6.22 某论文使用以下命题: 设 M 为一拓扑空间, $A, B \subset M$. 设 (1) 作为 M 的两个子空间, A 和 B 同胚; (2) A 在 M 中稠, 则 B 也在 M 中稠. 这个命题是否正确, 证明或给出反例.

第 7 章 群、环、域

本章介绍近世代数的一些重要概念和基本结果, 内容包括群、环、域, 它们的定义、性质、同构、同态等相互关系和一些基本应用. 然后, 对域的扩张作了介绍. 作为应用的例子, 讨论了为什么用规矩三等分一个任意角是不可能的. 最后介绍伽罗瓦理论, 说明五次方程为什么一般没有公式解.

7.1 群与子群

定义 7.1.1 (1) 一个集合 G 及 G 上的一个运算 $*$, 记作 $(G,*)$, 称为一个群, 如果它满足

①封闭性: $a,b\in G\Rightarrow a*b\in G$;

②结合律: $(a*b)*c=a*(b*c)$, $\forall a,b,c\in G$;

③单位元: 存在唯一的单位元, 记作 e, 使得 $e*a=a*e=a$, $\forall a\in G$;

④逆元: 对每一个 $a\in G$, 存在唯一的元素 $a^{-1}\in G$, 称为 a 的逆, 使得 $a*a^{-1}=a^{-1}*a=e$.

(2) $(G,*)$, 称为一个半群, 如果它只满足①封闭性和②结合律. 如果它还含单位元, 则称含幺半群.

从代数角度看, 群是代数运算的一种抽象, 它反映了在不同集合上的 “加法”、“ 乘法” 等运算的共性.

例 7.1.1 (1) 复数集 $\mathbb{C}$、实数集 $\mathbb{R}$、有理数集 $\mathbb{Q}$、整数集 $\mathbb{Z}$ 在普通加法 “+” 下均构成群, 这里, 单位元是 “0”, a 的逆元为 $-a$.

(2) 除去零点, $\mathbb{C}\backslash\{0\}$、$\mathbb{R}\backslash\{0\}$、$\mathbb{Q}\backslash\{0\}$ 在普通乘法 “×” 下均为群, 这里, 单位元是 “1”, a 的逆元为 $1/a$.

(3) 整数集 $\mathbb{Z}$ 在普通乘法下为半群, 它是含幺半群. $\mathbb{Z}\backslash\{0\}$ 在普通乘法下也不是群, 因为只要 $z\neq\pm1$, 则它无逆元.

(4) 所有的 $m\times n$ 矩阵, 记作 $M_{m\times n}$, 在普通矩阵加法下构成一个群. 这里, 单位元是 “0” (零矩阵), A 的逆元为 $-A$.

(5) 所有的 $n\times n$ 可逆实 (复) 矩阵, 记作 $GL(n,\mathbb{R})$ (相应地, $GL(n,\mathbb{C})$), 在普通矩阵乘法下构成一个群, 这里, 单位元是 “I_n”, A 的逆元为 A^{-1}. □

群在几何意义下是一种对称性的表示.

例 7.1.2 设平面有一个正 n 边形 (见图 7.1.1), 考虑平面图形绕中心 O 的旋转, 旋转角为 ϕ, 那么平面上的一个点 $(x_0, y_0)^{\mathrm{T}}$ 将转到 $(x, y)^{\mathrm{T}}$ 点, 这里

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}.$$

定义

$$\Theta_k = \begin{bmatrix} \cos(\frac{2k\pi}{n}) & \sin(\frac{2k\pi}{n}) \\ -\sin(\frac{2k\pi}{n}) & \cos(\frac{2k\pi}{n}) \end{bmatrix}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

那么 $G := \{\Theta_k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ 就是使正 n 边形不变的那些旋转. Θ_k 表示将一个顶点, 譬如第 i 个顶点, 逆时针转到第 $i+k$ 个顶点. 当然, 如果 $k < 0$ 则成顺时针转了. G 按普通矩阵乘法构成一个群, 乘法的几何意义是 $\Theta_p \times \Theta_q$ 表示先走过 q 个顶点, 再走 p 个顶点. □

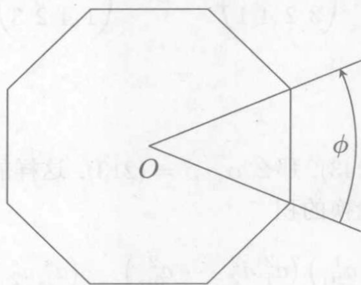


图 7.1.1 正多边形旋转

群有大量的实际背景, 文献 [20] 中有大量这种例子. 正因如此, 它在物理学中有许多应用[109].

定义 7.1.2 *一个群* $(G, *)$ *称为交换群或阿贝尔群* (Abelian Group), *如果* $a*b = b*a$, $\forall\, a, b \in G$.

例 7.1.3 (1) 复数 $\mathbb{C}$、实数 $\mathbb{R}$、有理数 $\mathbb{Q}$、整数 $\mathbb{Z}$ 在普通加法 "+" 下均构成阿贝尔群.

(2) $\mathbb{C}\backslash\{0\}$、$\mathbb{R}\backslash\{0\}$、$\mathbb{Q}\backslash\{0\}$ 在普通乘法下均为阿贝尔群.

(3) 所有的 $m \times n$ 矩阵, 记作 $M_{m\times n}$, 在普通矩阵加法下构成阿贝尔群.

(4) 所有的 $n \times n$ 可逆实 (复) 矩阵, 在普通矩阵乘法下不是阿贝尔群. □

例 7.1.4 用 $O(n, \mathbb{R})$ 表示 $n \times n$ 的正交矩阵集合. 即

$$O(n, \mathbb{R}) = \{\, A \in M_{n\times n} \mid A^{\mathrm{T}} A = I_n \}.$$

容易检验, 它是一个群. 称为 n 阶正交群. 它表示在 n 维空间中的旋转. 从例 7.1.2 可知, $n = 2$ 时它是一个阿贝尔群, 但 $n \geqslant 3$ 时它不是阿贝尔群. □

下面给出几个重要的群结构.

例 7.1.5 (置换群)　给定一个集合 A, 记所有 $A \to A$ 的可逆映射的集合为 S_A. S_A 上的运算为映射的复合 $\circ$, 即设 $F_1, F_2 \in S_A$, 则 $F_2 \circ F_1 \in S_A$, 定义为

$$F_2 \circ F_1(a) = F_2(F_1(a)), \quad \forall a \in A.$$

显然, $(S_A, \circ)$ 构成一个群, 它的单位元是恒等映射, 而每个映射的逆元就是它的逆映射, 这个群称为 A 的置换群.

下面给几个具体例子.

(1) $A = \mathbb{R}$, $\alpha = x + c$, $\beta = x^3$, 那么 $\alpha, \beta \in S_{\mathbb{R}}$ 且 $\alpha \circ \beta = x^3 + c$, $\beta \circ \alpha = (x+c)^3$, $\alpha^{-1} = x - c$, 等. 注意, $\gamma = x^2 \notin S_{\mathbb{R}}$.

(2) 当 A 为有限集时, 设 A 有 n 个元素, 则其置换群记作 S_n. 显然, 置换群与 A 的具体元素是什么无关, 于是, 通常把它们记作 $\{1, 2, \cdots, n\}$. 例如, $n = 4$, $\alpha, \beta \in S_4$ 为

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 \ 2 \ 3 \ 4 \\ 3 \ 2 \ 4 \ 1 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 \ 2 \ 3 \ 4 \\ 1 \ 4 \ 2 \ 3 \end{pmatrix},$$

则 $\alpha \circ \beta = \begin{pmatrix} 1 \ 2 \ 3 \ 4 \\ 3 \ 1 \ 2 \ 4 \end{pmatrix}$.

简记为 $\alpha = (134)$, $\beta = (243)$, 那么 $\alpha \circ \beta = (213)$. 这样的形式称为轮换式. 一般轮换式可写成若干个互不相交的轮换的积

$$\left(a_1^1 \, a_2^1 \, \cdots \, a_{n_1}^1\right) \left(a_1^2 \, a_2^2 \, \cdots \, a_{n_1}^2\right) \cdots \left(a_1^s \, a_2^s \, \cdots \, a_{n_s}^s\right),$$

它表示 $a_i^k \to a_{i+1}^k$, $i = 1, \cdots, n_k - 1$, $a_{n_k}^k \to z_1^k$, $k = 1, 2, \cdots, s$. 在一般轮换式中, 长度为 1 的轮换可略去.

单位元是恒等映射, 至于逆元, 则是反向映射, 即交换矩阵上下行. 例如

$$\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} 1 \ 2 \ 3 \ 4 \\ 4 \ 2 \ 1 \ 3 \end{pmatrix},$$

或写成 $\alpha^{-1} = (143)$ 等.

(3) S_n 中长度为 2 的置换 (ij) 称为对换, S_n 中的每一个置换都可以写成对换的乘积. 这种乘积的表示不唯一, 但因子个数的奇偶性不变. 由奇 (偶) 数次对换生成的置换称为奇 (偶) 置换. S_n 中所有的偶置换集合记作 A_n. 容易证明, 它也是一个群, 这个群称作 n 阶交错群. □

例 7.1.6 (单参数群)　考虑一个微分方程

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{7.1.1}$$

这里 $f(x)$ 是一个向量场. $f(x)$ 称为一个完备向量场, 如果式 (7.1.1) 的解对所有的 $t \in \mathbb{R}$ 都存在. 记其以 $x(0) = x_0$ 为初值的解为 $\Phi_t^{f(x)}(x_0)$, 那么 $\Phi_t^{f(x)}$ 可看作 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 的一个映射. 记

$$G = \left\{ \Phi_t^{f(x)} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\},$$

根据微分方程解的性质可知

$$\Phi_t^f(\Phi_s^f(x_0)) = \Phi_{t+s}^f(x_0).$$

故可定义 G 上的运算为

$$\Phi_t^f \circ \Phi_s^f = \Phi_{t+s}^f, \tag{7.1.2}$$

$(G, \circ)$ 称为单参数群. □

例 7.1.7 (循环群) 考虑一个非负整数集合: $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \cdots, n-1\}$. 定义加法 (同余加法)

$$a \oplus b = a + b(\mathrm{mod}\ n),$$

在这个运算下 $\mathbb{Z}_n$ 是一个阿贝尔群.

可以这样考虑 $\mathbb{Z}_n$ 的几何意义: 设有一个正 n 边形, 我们依顺时针方向绕中心旋转这个正 n 边形. 设 $i \in \mathbb{Z}_n$ 表示旋转 $2i\pi/n$ 角度, 则显然, $\mathbb{Z}_n$ 表示所有的使正 n 边形位置不变的旋转. 加法表示两次旋转依次进行. 将它与例 7.1.2 比较, 可以看出这个刻画的合理性, 它将同一个顶点位置用一个元素表示. □

上面的三个例子反映了群的另一个本质: 群可以看作一种作用, 对集合的置换 (例 7.1.5)、对状态空间点的转移 (例 7.1.6)、对平面图形的旋转 (例 7.1.7) 等. 群作用可严格定义如下.

定义 7.1.3 (1) 设 G 为一个群, M 为一个集合, 称 G 为 M 上的一个作用, 如果存在一个映射 $\phi: G \times M \to M$, 使得

① 单位元为恒等作用, 即

$$\phi(e, m) = m, \quad \forall m \in M;$$

②

$$\phi(g_1, \phi(g_2, m)) = \phi(g_1 g_2, m), \quad g_1, g_2 \in G,\ m \in M.$$

(2) 记 $T_m = \{gm \mid g \in G\}$, T_m 称为通过 m 的群轨道.

例 7.1.8 回顾例 1.3.9, 线性系统集合可以用 $L = \{A, B, C\}$ 表示. 设状态空间为 $\mathbb{R}^n$, 输入空间为 $\mathbb{R}^m$, 输出空间为 $\mathbb{R}^p$, 则 $A \in M_{n\times n}$, $B \in M_{n\times m}$, $C \in M_{p\times n}$. (A, B, C) 相应的状态空间实现为

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx. \end{cases} \tag{7.1.3}$$

(1) 设 $x = Tz$ 为一线性坐标变换, 则 $T \in GL(n, \mathbb{R})$, 且在 z 坐标下式 (7.1.3) 变为

$$\begin{cases} \dot{z} = T^{-1}ATz + T^{-1}Bu, \\ y = CTz, \end{cases} \tag{7.1.4}$$

即 (A,B,C) 变为 $(T^{-1}AT,T^{-1}B,CT)$. 容易证明, 这是群 $GL(n,\mathbb{R})$ 在线性系统集合 L 上的群作用.

(2) 考虑反馈控制

$$u = Kx + Hv, \tag{7.1.5}$$

这里 $K \in M_{m\times n}$, $H \in GL(m,\mathbb{R})$. 那么

$$G := \{K, H \mid K \in M_{m\times n}, H \in GL(m,\mathbb{R})\}$$

在运算

$$(K_1,H_1)\circ(K_2,H_2) := (K_1+K_2, H_1H_2)$$

下可构成一个群. 反馈控制可看作

$$\Psi_{(K,H)} : (A,B,C) \to (A+BK, BH).$$

容易证明, 这是 G 在 L 上的群作用.

在这个群作用下, 每一条群轨道就是一个反馈等价类. 换言之, 在一条群轨道上的两个系统是反馈等价的, 而在不同群轨道上的系统则不可能反馈等价. □

在实数域 $\mathbb{R}$ 上加上 $\mathbf{i}$ 则产生了新的数域 $\mathbb{C} = \{a+b\mathbf{i} \mid a,b\in\mathbb{R}\}$. 相信许多读者跟笔者一样, 曾试图寻找出新的添加, 使它成为更大的数域, 但这已被证明是不可能的. 而最接近域的而又有广泛应用的是四元数 (quaternion).

例 7.1.9 (四元数)　设

$$\mathcal{Q} = \{a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} \mid a,b,c,d\in\mathbb{R}\}$$

为一四维向量空间, 基底为 $\{1,\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\}$. 下面定义乘法: 设加法和乘法满足分配律

$$\begin{aligned}
&(c_1q_1+c_2q_2)q_3 = c_1(q_1q_3)+c_2(q_2q_3),\\
&q_3(c_1q_1+c_2q_2) = c_1(q_3q_1)+c_2(q_3q_2), \quad c_1,c_2\in\mathbb{R},\ q_1,q_2,q_3\in\mathcal{Q}.
\end{aligned}$$

那么只要对基底定义乘法就够了. 设基底向量的积满足

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1;$$

及

$$\mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k};\quad \mathbf{jk} = -\mathbf{kj} = \mathbf{i};\quad \mathbf{ki} = -\mathbf{ik} = \mathbf{j}.$$

显然, $(\mathcal{Q},+)$ 是一个阿贝尔群. 我们证明 $(\mathcal{Q}\setminus\{0\},\times)$ 是一个群, 它显然不是阿贝尔群, 封闭性显见, 结合律只要对基底作检验就够了. 我们要逐一检验, 例如

$$(\mathbf{ii})\mathbf{i} = -\mathbf{i};\quad \mathbf{i}(\mathbf{ii}) = \mathbf{i}(-1) = -\mathbf{i}\ \text{等}.$$

单位元是 1. 设 $q = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} \neq 0$, 可以证明 (参见附录, 例 A.2.2) 记 $\|q\| = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$, 则

$$q^{-1} = \frac{1}{\|q\|}(\alpha + \beta\mathbf{i} + \gamma\mathbf{j} + \delta\mathbf{k}),$$

其中

$$\begin{cases} \alpha = a^3 + a(b^2 + c^2 + d^2), \\ \beta = -b^3 - b(a^2 + c^2 + d^2), \\ \gamma = -c^3 - c(a^2 + b^2 + d^2), \\ \delta = -d^3 - d(a^2 + b^2 + c^2). \end{cases}$$

□

下面讨论子群.

定义 7.1.4 设 G 为一个群, $H \subset G$. 如果依 G 上的运算 H 也是一个群, 则称 H 为 G 的子群, 记作 $H < G$.

下面的命题给出判定子群的简单方法, 它的证明很简单, 留作练习(见习题 7.8).

命题 7.1.1 设 G 为一个群, 且有子集 $H \subset G$. $H < G$, 当且仅当对 H 中任意两个元素 $a, b \in H$ 均成立

$$a^{-1}b \in H. \tag{7.1.6}$$

例 7.1.10 考虑一般线性群 $GL(n,\mathbb{R})$. 这是一个极其重要的群, 它的许多子群同样重要.

(1) 设 $SL(n,\mathbb{R}) \subset GL(n,\mathbb{R})$ 为行列式值为 1 的 $n \times n$ 矩阵集. 容易证明, 它是一个子群

$$SL(n,\mathbb{R}) < GL(n,\mathbb{R}).$$

这个群称为特殊线性群.

(2) 记 $O(n,\mathbb{R})$ 为实正交矩阵集合, 容易证明, 它是一个子群

$$O(n,\mathbb{R}) < GL(n,\mathbb{R}).$$

这个群称为正交群.

(3) 设 $SO(n,\mathbb{R}) = SL(n,\mathbb{R}) \cap O(n,\mathbb{R})$, 则

$$SO(n,\mathbb{R}) < SL(n,\mathbb{R}); \quad 且 \quad SO(n,\mathbb{R}) < O(n,\mathbb{R}).$$

这个群称为特殊正交群. □

例 7.1.11 设 G 为一群, $a \in G$, 那么

$$\langle a \rangle := \{a^k \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

容易看出, 它是一个阿贝尔群, 称为由 a 生成的循环群. 显然, $\langle a\rangle < G$, 即 $\langle a\rangle$ 为 G 的一个子群. 使 $a^k = e$ (e 为单位元) 的最小正数 k 称为 a 的阶, 如果不存在这样的正数, 则称 a 的阶为无穷大. □

定理 7.1.1 (Cauchy) 设 $|G| = n$. $p > 1$ 是 n 的一个因子, 则存在 $a \in G$, 使 a 的阶为 p. 换言之, G 有 p 阶循环子群.

证明 考虑 G 的一类含 p 个元素的子集, 其 p 个元素的积为 e:

$$P = \{(g_1, \cdots, g_p) \,|\, g_1, \cdots, g_p \in G;\ g_1 \cdots g_p = e\}.$$

这样的子集共 n^{p-1} 个 (即 $|P| = n^{p-1}$), 这是因为 $g_1, \cdots, g_{p-1}$ 可以任选, 而 $g_p = g_{p-1}^{-1} \cdots g_1^{-1}$ 是唯一确定的.

下面我们在 P 上定义等价类

$$(g_1, g_2, \cdots, g_p) \sim (g_2, \cdots, g_p, g_1) \sim \cdots \sim (g_p, g_1, \cdots, g_{p-1}),$$

每个等价类中正好有 p 个元素, 除非它是 $(g, g, \cdots, g)$, 即每个元素都一样. P 中有一个这种元素, 即 $(e, e, \cdots, e)$. 假定 P 中只有一个这种元素, 那么 $n^{p-1} - 1$ 整除 p. 但 p 是 n 的因子, 这是不可能的. 故存在 $g \neq e$ 且 $(g, g, \cdots, g) \in P$, 根据 P 的定义, $g^p = e$. □

定义 7.1.5 设 $H < G$. 对 G 中的任一元素 $g \in G$ 定义 g 的右 (左) 陪集为 $Hg = \{hg \,|\, h \in H\}$ (相应地, $gH = \{gh \,|\, h \in H\}$).

命题 7.1.2 右 (左) 陪集是群的一个划分, 即对任意两个 $g_1, g_2 \in G$, Hg_1 和 Hg_2 (g_1H 和 g_2H) 或者完全一样, 或者不相交 (无公共元).

证明 设 H 为一群, $h \in H$, 那么, 易证 $hH = Hh = H$ (见习题 7.9). 现在设 $\xi \in Hg_1 \cap Hg_2$, 则 $\xi g_1^{-1} \in H$, 于是

$$Hg_1 = (H\xi g_1^{-1})g_1 = H\xi.$$

同理 $Hg_2 = H\xi$, 故 $Hg_1 = Hg_2$. □

设 G 为有限群, $H < G$, 那么容易证明 (1) $|aH| = |bH|$ (将 aH 与 bH 一一对应); (2) 左陪集与右陪集个数相等 (将 aH 与 Ha 一一对应). 因此, 我们将 H 的陪集个数称为 H 在 G 中的指数, 记作 $[G : H]$. 显然

$$|H|[G : H] = |G|. \tag{7.1.7}$$

下面定义正规子群, 它是一种特殊的子群, 在群的结构分析中起着重要作用.

定义 7.1.6 G 的一个子群 $H < G$ 称为 G 的正规子群, 如果

$$gH = Hg, \quad \forall g \in G.$$

如果 H 是 G 的正规子群, 则记 $H \lhd G$.

正规子群有若干等价的定义方法, 这在使用上提供了很大的方便. 它们的证明很容易, 留作练习(见习题 7.10).

命题 7.1.3 设 $H < G$. 以下的说法等价:

(1) $gH = Hg, \forall g \in G$;

(2) $gHg^{-1} = H$;

(3) $gHg^{-1} \subset H, \forall g \in G$;

(4) $ghg^{-1} \in H, \forall g \in G, \forall h \in H$.

定义 7.1.7 给定一个群 G.

(1) G 的中心 $Z(G)$ 定义为

$$Z(G) = \{x \in G \mid xy = yx, \forall y \in G\};$$

(2) 设 $A \subset G$, A 的中心化子 $Z_G(A)$ 定义为

$$Z_G(A) = \{g \mid ga = ag, \forall a \in A\}.$$

容易证明 $Z(G) \lhd G$. $Z_G(A) < G$.

考查 $GL(n, \mathbb{R})$. 容易检验, 其中心为

$$Z = \{rI_n \mid 0 \neq r \in \mathbb{R}\}.$$

例 7.1.12 设 G 为一个群. G 中具有如下形式的元素称为一个交换子: $a^{-1}b^{-1}ab$. 记由交换子生成的群为 C, C 称为交换子群. 交换子群是一个正规子群, 即 $C \lhd G$.

注意, 交换子的逆还是个交换子. 因此, 交换子生成的群就是交换子的有限积的集合, 即

$$C = \left\{ \prod_{i=1}^{k} a_i^{-1} b_i^{-1} a_i b_i \;\middle|\; k < \infty, a_i, b_i \in G \right\}.$$

要证明 $C \lhd G$, 只要证对任一 $g \in G$, 有

$$g^{-1} \prod_{i=1}^{k} a_i^{-1} b_i^{-1} a_i b_i g \in C$$

即可. 而这又等价于对任意一个交换子 $a^{-1}b^{-1}ab$,

$$g^{-1}a^{-1}b^{-1}abg \in C$$

成立. 显然

$$g^{-1}(a^{-1}b^{-1}ab)g = (ag)^{-1}b^{-1}(ag)b(b^{-1}g^{-1}bg) \in C.$$

□

命题 7.1.4 (1) 设 $H < G$, 如果 H 包含 G 的所有交换子, 则 $H \lhd G$.

(2) 设 $H \lhd G$, G/H 是阿贝尔群, 当且仅当 H 包含 G 的所有交换子.

证明　(1) 任选 $a \in G$, 因为 $aha^{-1}h^{-1} \in H$, 则 $aha^{-1} \in H$.

(2) 任选 $a, b \in G$, $(Ha)(Hb) = Hab$, $(Hb)(Ha) = Hba$, $Hab = Hba$, 当且仅当 $ab(ba)^{-1} = aba^{-1}b^{-1} \in H$. □

例 7.1.13　一个群 G, 有两个平凡的正规子群: $\{e\}$ 和 G. 一个群如果除 $\{e\}$ 和自己外没有其他正规子群, 则称为单群. □

下面给出一个单群的例子, 它在后面还要用到, 为此, 需要一点准备. 设 $\sigma \in S_n$, 将 σ 写成轮换式, 长度为 1 的轮换 r_1 个, 长度为 2 的轮换 r_2 个, $\cdots$, 长度为 n 的轮换 r_n 个, 则称它具有 $(r_1, r_2, \cdots, r_n)$ 型置换. 例如

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8 \\ 1\,5\,8\,2\,7\,6\,4\,3 \end{pmatrix} \in S_8,$$

σ 可写成 $\sigma = (2574)(38)$, 它的置换型为 $(2,1,0,1,0,0,0,0)$. 容易看出, 置换型是唯一的. 群 G 中的两个元素 a, b 称为共轭, 如果存在 $g \in G$, 使得 $gag^{-1} = b$.

引理 7.1.1　$\sigma_1, \sigma_2 \in S_n$ 共轭, 当且仅当它们的置换型相同.

证明　设 $\sigma_2 = \tau\sigma_1\tau^{-1}$. $\sigma_1 = c_1 \circ \cdots \circ c_t$, 其中 $c_i = (\sigma_1^i \cdots \sigma_{k_i}^i)$ 为长度为 k_i 的轮换. 那么, $\tau\sigma_1\tau^{-1} = d_1 \circ \cdots \circ d_t$, 其中 $d_i = (\tau\sigma_1^i\tau^{-1}, \cdots, \tau\sigma_{k_i}^i\tau^{-1})$ 亦为长度为 k_i 的轮换.

反之, 如果 σ_1, σ_2 置换型相同, 设为

$$\sigma_1 = (i_1, \cdots, i_{k_1}) \cdots (p_1, \cdots, p_{k_s}),$$
$$\sigma_2 = (j_1, \cdots, j_{k_1}) \cdots (q_1, \cdots, q_{k_s}),$$

取

$$\tau = \begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_{k_1} & \cdots & p_1 & \cdots & p_{k_s} \\ j_1 & \cdots & j_{k_1} & \cdots & q_1 & \cdots & q_{k_s} \end{pmatrix},$$

则 $\tau\sigma_1\tau^{-1} = \sigma_2$. □

现在设 $\sigma \in A_n$, 考虑它在 A_n 中的共轭类. 根据前面引理的证明可知, 共轭类中的元素必然与 σ 同型, 但同型或未必同类, 这是因为其共轭元素 τ 未必属于 A_n.

引理 7.1.2　设 $\sigma \in A_n$. T_σ 为 A_n 中与 σ 同型元素集合, σ 在 S_n 中的中心化子为 $Z_{S_n}(\sigma)$. 那么 (1) 当 $Z_{S_n}(\sigma)$ 含一个奇置换时, T_σ 为 σ 的一个共轭类; (2) 当 $Z_{S_n}(\sigma)$ 不含奇置换时, T_σ 分裂为 σ 的两个共轭类

$$T_\sigma^e = \{\tau\sigma\tau^{-1} \mid \tau \in S_n \text{为偶置换}\},$$
$$T_\sigma^o = \{\tau\sigma\tau^{-1} \mid \tau \in S_n \text{为奇置换}\}.$$

证明 (1) 设 $\tau_0 \in Z_{S_n}(\sigma)$ 为奇置换, 则 $\sigma = \tau_0\sigma\tau_0^{-1}$. 设 $\tau\sigma\tau^{-1} \in T_\sigma$, 如果 τ 是偶置换, 则 $\tau\sigma\tau^{-1}$ 与 σ 在 A_n 中共轭; 否则, τ 是奇置换, 但 $\tau\sigma\tau^{-1} = \tau\tau_0\sigma\tau_0^{-1}\tau^{-1} = (\tau\tau_0)\sigma(\tau\tau_0)^{-1}$, $\tau\tau_0 \in A_n$, 故 $\tau\sigma\tau^{-1}$ 也与 σ 在 A_n 中共轭.

(2) 先证 $T^e(\sigma)$ 中任一元素与 $T^o(\sigma)$ 中任一元素不属同一共轭类, 否则, 任给 $\tau_e\sigma\tau_e^{-1} \in T^e(\sigma)$, $\tau_o\sigma\tau_o^{-1} \in T^o(\sigma)$, 存在 $\tau \in A_n$, 使得 $\tau(\tau_e\sigma\tau_e^{-1})\tau = \tau_o\sigma\tau_o^{-1}$. 即 $(\tau_o^{-1}\tau\tau_e)\sigma(\tau_o^{-1}\tau\tau_e)^{-1} = \sigma$. 于是 $\tau_o^{-1}\tau\tau_e \in Z_{S_n}(\sigma)$, 但 $\tau_o^{-1}\tau\tau_e$ 是奇置换, 矛盾. 下面证明 $T^e(\sigma)$ 和 $T^o(\sigma)$ 为 σ 在 A_n 中的两个共轭类, $T^e(\sigma)$ 显然是. 对于 $T^o(\sigma)$, 任选 $\alpha = \tau_1\sigma\tau_1^{-1} \in T^o(\sigma)$, $\beta = \tau_2\sigma\tau_2^{-1} \in T^o(\sigma)$, 那么 $(\tau_2\tau_1^{-1})\alpha(\tau_2\tau_1^{-1})^{-1} = \beta$. 因为 $(\tau_2\tau_1^{-1}) \in A_n$, 故 α, β 属于 A_n 中同一共轭类. □

引理 7.1.3

$$S_n = ((12), (13), \cdots, (1n)). \tag{7.1.8}$$

$$A_n = ((123), (124), \cdots, (12n)). \tag{7.1.9}$$

证明 (1) 任一轮换都可由对换生成, 这是因为

$$(i_1\, i_2\, \cdots\, i_s) = (i_1\, i_s)(i_1\, i_{s-1})\, \cdots\, (i_1\, i_3)\, (i_1\, i_2).$$

任一对换都可由对换 $\{(1\, t) | t = 2, \cdots, n\}$ 生成, 这是因为

$$(i_1\, i_2) = (1\, i_1)(1\, i_2).$$

(2) 每个偶对换 $(i\, j)(s\, t)$ 都可以由 $\{(12i) \,|\, i = 1, \cdots, n\}$ 生成, 这是因为

$$(i\, j)(s\, t) = (1\, 2\, i)(1\, 2\, t)(1\, 2\, j)(1\, 2\, s)(1\, 2\, i)(1\, 2\, t).$$

□

定理 7.1.2 当 $n \geqslant 5$ 时, A_n 为单群.

证明 设 $\{e\} \neq N \lhd G$. 取 $\sigma = (123)$, 那么 T_σ 为所有的 3 轮换. 因为 $(45)\sigma(45)^{-1} = \sigma$, $(45) \in Z_{S_n}(\sigma)$, 因此, T_σ 是 A_n 的一个共轭类. 现在如果 N 包含一个 3 轮换, 因为 N 是正规子群, 它就包含了 3 轮换的共轭类 T_σ, 即所有的 3 轮换. 由引理 7.1.3, $N = A_n$, 这说明 A_n, $n \geqslant 5$ 为单群. 因此, 只要证 N 包含一个 3 轮换即可. 记 $\sigma \neq e$ 为 N 中不动点最多的一个置换, 可设 $\sigma = C^k$, 这里 C 为长度为素数 p 的轮换. 首先, 如果 σ 包含一个长度为 pq 的轮换, p, q 互质. 不妨设 $p < q$. 用 σ^p 代替 σ, 长度为 pq 的轮换变为长度为 p 的轮换, 而原来的不动点还是不动点. 因此, 不动点增加了. 所以, σ 不可能含合数轮换. 其次, 如果 σ 有两个不同素数长度的轮换, 譬如, p、q, 用 σ^p 代替 σ, 长度为 p 的轮换消失, 不动点增加了, 所以 σ 不可能含不同长度轮换. 因此假设成立.

现在, 如果 $p = 2$, 设 $\sigma = (12)(34)\cdots$, 取 $\tau = (345)$, 则 $\tau\sigma\tau^{-1}\sigma^{-1} = (1)(2)(345)\cdots \in N$. 它比 σ 有更多不动点 (即使 5 是原来的不动点). 故 $p \neq 2$.

如果 $p \geqslant 5$, 设 $\sigma = (12345\cdots p)$, 取 $\tau = (234)$, 则 $\tau\sigma\tau^{-1}\sigma^{-1} = (1)(4)(235)\cdots \in N$. 它比 σ 有更多不动点, 故 $p < 3$.

因此, $p = 3$. 设 $k \geqslant 2$, 则 $n \geqslant 6$, $\sigma = (123)(456)\cdots$. 取 $\tau = (234)$, 则 $\tau\sigma\tau^{-1}\sigma^{-1} = (6)(14235)\cdots \in N$, 它比 σ 有更多不动点, 故 $k = 1$.

这说明: σ 是一个 3 轮换. 于是, $N = A_n$. □

7.2 群同态、群同构

设 H 为 G 的一个正规子群, $H \lhd G$. 此时, 依定义左、右陪集相等. 在陪集 $\{gH \mid g \in G\}$ 上定义运算 "×" 如下

$$aH \times bH = abH. \tag{7.2.1}$$

由于陪集 aH 的代表元 a 不唯一, 我们须证明式 (7.2.1) 定义的乘法 "×" 的合理性, 即它不依赖于代表元的选择.

现在设 $a_1H = a_2H$, $b_1H = b_2H$. 我们要证明乘积与代表元无关, 即 $a_1b_1H = a_2b_2H$. 因为 $a_1H = a_2H$, 则存在 $h_1 \in H$, 使得 $a_2 = a_1h_1$; 同样, 有 $h_2 \in H$, 使得 $b_2 = b_1h_2$. 于是

$$a_2b_2 = a_1h_1b_1h_2.$$

因为 H 是正规子群, 故存在 $h_3 \in H$, 使得 $h_1b_1 = b_1h_3$. 因此

$$a_2b_2H = a_1b_1h_3h_2H = a_1b_1H.$$

容易看出, 陪集空间带上这个运算构成一个群, 这个群的单位元是 H, gH 的逆元为 $g^{-1}H$.

定义 7.2.1 *设 $H \lhd G$. H 的陪集集合 $\{gH \mid g \in G\}$ 加上式 (7.2.1) 定义的运算构成一个群, 称为 G 对 H 的商群, 记作 G/H.*

例 7.2.1 考虑行列式值为正的矩阵集合, $P = \{A \in M_{n\times n} \mid \det(A) > 0\}$. 容易证明, $P \lhd GL(n,\mathbb{R})$. 首先, 它是 $GL(n,\mathbb{R})$ 的一个子群, 这是因为, 设 $A, B \in P$ 则

$$\det(A^{-1}B) = [\det(A)]^{-1}\det(B) > 0,$$

故 $A^{-1}B \in P$. 要证明它是正规子群, 取 $g \in GL(n,\mathbb{R})$, 则

$$\det(g^{-1}Ag) = [\det(g)]^{-1}\det(A)\det(g) > 0, \quad \forall g \in GL(n,\mathbb{R}), \quad A \in P.$$

即 $g^{-1}Ag \in P$. $GL(n,\mathbb{R})$ 对 P 的陪集集合含两个陪集: P, $N = gP$, 这里 $\det(g) < 0$. 因此, 商空间即 $\{P, N\}$, 其上的乘法为

$P\backslash N$	P	N
P	P	N
N	N	P

□

下面讨论两个群之间的关系.

定义 7.2.2　设 G_1, G_2 为两个群. 一个映射 $\pi: G_1 \to G_2$ 称为一个同态, 如果它满足

$$\pi(ab) = \pi(a)\pi(b). \tag{7.2.2}$$

G_1 到 G_2 的同态集合记作 $\mathrm{Hom}(G_1, G_2)$.

群同态有如下性质.

命题 7.2.1　设 $\pi: G_1 \to G_2$ 为一个群同态, 则

(1) 记 e_i 为 G_i 的单位元, $i = 1, 2$, 则

$$\pi(e_1) = e_2. \tag{7.2.3}$$

(2)

$$\pi(g^{-1}) = [\pi(g)]^{-1}, \quad \forall g \in G_1. \tag{7.2.4}$$

证明　(1) 设 $\pi(e_1) = r$, 则

$$\pi(a) = \pi(ae_1) = \pi(a)\pi(e_1) = \pi(a)r.$$

故

$$e_2 = [\pi(a)]^{-1}\pi(a)r = r.$$

(2)

$$e_2 = \pi(g^{-1}g) = \pi(g^{-1})\pi(g),$$

故

$$[\pi(g)]^{-1} = \pi(g^{-1}).$$

□

例 7.2.2　这里给出一些简单的群同态的例子, 读者不妨自行检验其正确性.

(1) 设 $W = (\mathbb{R}, +)$, $H = (\mathbb{C}, +)$ (“+” 为普通实数或复数加法), $\pi(r) = r$, $r \in \mathbb{R}$ 是一个同态, 实际上, 任何一个线性映射 φ

$$\varphi(r) = \alpha r, \quad \alpha \in \mathbb{C}$$

都是一个同态.

(2) 设 $G = (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \times)$ (“×” 为普通实数乘法). 定义 $\det: GL(n, \mathbb{R}) \to G$ 为普通行列式运算. 因为 $\det(AB) = \det(A)\det(B)$, det 是一个群同态.

(3) $Q = (\mathbb{R}_+, \times)$, $G = (\mathbb{R}\setminus\{0\}, \times)$. 那么① $Q \lhd G$; ② $G/Q = \{[1], [-1]\}$; ③ 如果定义 $\pi: G \to Q$ 为 $x \mapsto |x|$, 则 $\pi \in \mathrm{Hom}(G, Q)$.

(4) 设 p 为 n 的一个因数, $pk = n$. 定义 $\pi: i \mapsto ki$, 那么 $\pi\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_n$ 为一群同态.　□

定义 7.2.3 一个同态 $\pi: G_1 \to G_2$ 称为一个同构, 如果它是一个一对一的满映射 (“一对一” 指如果 $\pi(a) = \pi(b)$, 则 $a = b$; “满映射” 指 $\{\pi(a) \mid a \in G_1\} = G_2$). G_1 到 G_2 的同构集合记作 $\mathrm{Iso}(G_1, G_2)$.

一个 G 到自身的同构 $\pi: G \to G$ 称为 G 的自同构. G 的自同构集合记作 $\mathrm{Aut}(G)$.

满映射通常也称 “映上”.

例 7.2.3 这里给出一些简单的群同构的例子.

(1) 设 $W = (\mathbb{R}^2, +)$, $H = (\mathbb{C}, +)$, 映射 $\pi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ 定义为 $\pi: (x, y)^{\mathrm{T}} \mapsto x + iy$, 则 π 是一个同构.

(2) 设 $G = (\mathbb{R}, +)$, $H = (\mathbb{R}_+, \times)$. 定义 $\pi: a \mapsto e^a$, 则 $\pi \in \mathrm{Iso}(G, H)$.

(3) 设 $Z \in GL(n, \mathbb{R})$. $\pi: GL(n, \mathbb{R}) \to GL(n, \mathbb{R})$ 定义为 $A \mapsto Z^{-1}AZ$, 则 $\pi \in \mathrm{Aut}(GL(n, \mathbb{R}))$. □

设 $\pi \in \mathrm{Hom}(G, Q)$. 分别记映射的像集为

$$\mathrm{im}(\pi) = \{F(g) \mid g \in G\} \subset Q;$$

映射的核为

$$\ker(\pi) = \{g \in G \mid F(g) = e \in Q\} \subset G.$$

那么, 容易证明如下命题.

命题 7.2.2 (1) $\mathrm{im}(\pi) < Q$; (2) $\ker(\pi) \lhd G$.

证明 (1) 设 $x, y \in \mathrm{im}(\pi)$, 只要证 $x^{-1}y \in \mathrm{im}(\pi)$ 即可. 因为 $x, y \in \mathrm{im}(\pi)$, 则存在 $a, b \in G$ 使得 $\pi(a) = x$, $\pi(b) = y$. 于是

$$\pi[a^{-1}b] = \pi(a^{-1})\pi(b) = [\pi(a)]^{-1}\pi(b) = x^{-1}y.$$

(2) 先证 $\ker(\pi) < G$. 设 $x, y \in \ker(\pi)$, 则

$$\pi(x^{-1}y) = \pi(x^{-1})\pi(y) = e^{-1}e = e,$$

故 $x^{-1}y \in \ker(\pi)$. 再证正规性, 设 $x \in G$, $k \in \ker(\pi)$, 则

$$\pi(x^{-1}kx) = [\pi(x)]^{-1}e\pi(x) = e.$$

因 k 是任取的, 故

$$x^{-1}\ker(\pi)x \subset \ker(\pi).$$

□

下面介绍几个群同态定理, 它们揭示了群的一些基本结构.

定理 7.2.1 (第一同态定理) (1) 设 $\pi \in \mathrm{Hom}(G, Q)$, $K = \ker(\pi)$. 定义映射 $\theta: G/K \to \mathrm{im}(\pi)$ 为 $gK \mapsto \pi(g)$, 那么 $\theta: G/K \to \mathrm{im}(\pi)$ 是一个同构, 即

$$G/\ker(\pi) \cong \mathrm{im}(\pi). \tag{7.2.5}$$

(2) 如果 $H \lhd G$, 定义映射 $\pi: G \to G/H$ 为 $g \mapsto gH$. 那么 $\pi: G \to G/H$ 是一个映上的同态, 并且 $\ker(\pi) = H$.

证明 (1) 首先证明 θ 是定义好的: 设 $gK = hK$, 则 $g^{-1}h \in K$. 因此

$$\theta(hK) = \theta(gg^{-1}hK) = \pi(gg^{-1}h) = \pi(g)\pi(g^{-1}h) = \pi(g) = \theta(gK).$$

同时, 我们还有

$$\theta(ghK) = \pi(gh) = \pi(g)\pi(h) = \theta(gK)\theta(hK).$$

因此, θ 是一个同态. θ 显然是映上的. 这样, 要证明 θ 是同构, 只要证明 θ 是一对一的即可.

设 $\theta(gK) = \pi(g) = e$. 那么 $g \in K$, 因此 $gK = K$, 这就说明 θ 是一对一的.

(2) 利用与 (1) 的证明类似的方法可知, π 是一个映上的同态. 现在如果 $g \in H$, 则 $\pi(g) = gH = H$, 如果 $g \notin H$, 则 $\pi(g) = gH \neq H$. 故 $\ker(\pi) = H$. □

定理 7.2.2 (第二同态定理) (1) 设 $H < G$, 且 $N \lhd G$. 则 $N \cap H \lhd H$.

(2) 设

$$NH = \{nh \,|\, n \in N,\ h \in H\},$$

则 $NH < G$.

(3) 对任一 $h \in H$ 定义 $\pi: H/(N \cap H) \to NH/N$ 为 $h(N \cap H) \mapsto hN$, 那么 π 是一个同构, 即

$$H/(H \cap N) \cong NH/N. \tag{7.2.6}$$

证明 (1) 令 $h \in H$ 及 $n \in N \cap H$. 我们只要证明 $h^{-1}nh \in N \cap H$ 即可. 显然 $h^{-1}nh \in H$, 因为 $n \in N$, 而且 N 是正规的, 故有某个 $n' \in N$, 使得 $hn = n'h$. 因此 $h^{-1}nh = n' \in N$.

(2) 令 $n_1, n_2 \in N$ 及 $h_1, h_2 \in H$, 我们只要证明 $(n_1h_1)^{-1}n_2h_2 \in NH$ 即可. 因为

$$(n_1h_1)^{-1}n_2h_2 = h_1^{-1}n_1^{-1}n_2h_2 = h_1^{-1}n_3h_2 = n_4h_1^{-1}h_2 \in NH,$$

这里 $n_3, n_4 \in N$, $n_3 = n_1^{-1}n_2$ 以及 $h_1^{-1}n_3 = n_4h_1^{-1}$ (因为 N 是正规子群, 这样的 n_4 存在).

(3) 首先证明 π 是一个同态:

$$\begin{aligned}\pi(x(N \cap H)y(N \cap H)) &= \pi(xy(N \cap H)) = xyN = (xN)(yN) \\ &= \pi(x(N \cap H))\pi(y(N \cap H)), \quad x, y \in H;\end{aligned}$$

其次证明 π 是映上的. 对每一个 $x=nh\in NH$, 存在某个 $n'\in H$ 使得

$$xN = nhN = hn'N = hN,$$

因此

$$\pi(h(N\cap H)) = hN = xN;$$

最后证明 π 是一对一的: 设 $x\in H$ 并且

$$\pi(x(N\cap H)) = xN = N,$$

那么 $x\in N$, 即 $x\in N\cap H$. □

定理 7.2.3 (第三同态定理) 设 $M\lhd G$, $N\lhd G$ 并且 $N<M$. 那么

(1)

$$M/N \lhd G/N, \tag{7.2.7}$$

(2)

$$(G/N)/(M/N) \cong G/M. \tag{7.2.8}$$

证明 (1) $M/N<G/N$ 是显然的. 我们证明它是正规的: 令 $g\in G$ 且 $m\in M$. 那么

$$(gN)^{-1}(mN)(gN) = (g^{-1}mg)N = m'N \in M/N,$$

这里 $m'\in M$. 因此 $M/N\lhd G/N$.

(2) 定义映射 $\pi:(G/N)/(M/N)\to G/M$ 为 $gN(M/N)\mapsto gM$. 我们首先证明 π 是定义好的. 设 $g_1N(M/N)=g_2N(M/N)$, 那么 $(g_1N)^{-1}(g_2N)\in M/N$. 也就是说, $(g_1^{-1}g_2)N\in M/N$, 这表明 $g_1^{-1}g_2\in M$. 等价地, $g_1M=g_2M$. 故

$$\pi(g_1N(M/N)) = g_1M = g_2M = \pi(g_2N(M/N)).$$

其次, 我们证明 π 是一个同态:

$$\begin{aligned}\pi((g_1N)(g_2N)(M/N)) &= \pi((g_1g_2N)(M/N)) = g_1g_2M = (g_1M)(g_2M)\\ &= \pi((g_1N)(M/N))\pi((g_2N)(M/N)),\end{aligned}$$

显见 π 是映上, 所以只要证明 π 是一对一的即可. 设

$$\pi(gN(M/N)) = gM = M,$$

则 $g\in M$, 也就是 $gN\in M/N$, 这就意味着 π 是一对一的. □

设 A 为一个集合, A 上的置换群记作 S_A. 一般把置换群的子群也称为置换群, 即如果 $G<S_A$, G 也称为 A 的置换群. 下面的定理应作这种理解. 为区别起见, 不妨称 S_A 为 A 的全置换群.

定理 7.2.4 (Cayley 定理)　任何一个群同构于一个置换群.

证明　给定群 G, 我们要证明它与 G 上的某个置换群同构. 首先对每个 $a \in G$, 定义 $\pi_a : G \to G$ 为 $\pi_a : x \mapsto ax$. 显然, π_a 是一对一且映上的, 所以它是一个置换. 记

$$G^* = \{\pi_a \mid a \in G\},$$

容易看出, G^* 是一个群, 其单位元为 π_e, π_a 的逆元为 $\pi_{a^{-1}}$. 因此, $G^* < S_G$. 定义 $f : G \to G^*$ 为 $f(a) = \pi_a$, 它是一一映上的, 且 $f(ab) = \pi_{ab} = \pi_a \pi_b$, 故 G 与 G^* 同构. □

例 7.2.4 (乘积群)　设 G, Q 为给定的两个群. 在乘积集合 $G \times Q$ 上定义一个运算 $\otimes$ 为 $(g_1, q_1) \otimes (g_2, q_2) := (g_1 g_2, q_1 q_2)$, 这里 $g_1, g_2 \in G$ 及 $q_1, q_2 \in Q$. 那么 $G \times Q$ 成为一个群, 它称为 G 和 Q 的乘积群.

如果我们将 $G \times \{e\}$ 等同于 G, 那么容易证明 $G \lhd G \times Q$. 同样, 如果我们将 Q 等同于 $\{e\} \times Q$, 则 $Q \lhd G \times Q$.

对于乘积群再作商群, 则有

$$G \times Q / G \cong Q, \quad G \times Q / Q \cong G.$$

□

例 7.2.5 (共轭子群)　设 $Q < G$. 那么, 对任何一个元素 $g \in G$, 均有 $g^{-1} Q g < G$. Q 及 $g^{-1} Q g$ 称为两个共轭子群, 两个共轭子群显然是同构的. □

7.3　环

定义 7.3.1　*在集 R 上定义两个运算: 加法 "+" 和乘法 "×" (为记号的方便乘号通常略去, 即 $ab := a \times b$), R 称为一个环, 如果以下条件成立:*

(1) $(R, +)$ 是一个阿贝尔群;

(2) $(R, \times)$ 是半群, 即乘法满足结合律: 对任意的 $a, b, c \in R$ 有 $(ab)c = a(bc)$;

(3) 加法和乘法满足分配律, 即 $(a+b)c = ac + bc$, $\quad a(b+c) = ab + ac$.

下面给出几个环的例子.

例 7.3.1　(1) 整数集 $\mathbb{Z}$ 连同普通加法和乘法, 构成一个环.

(2) 域 F (例如, $F = \mathbb{R}$, $F = \mathbb{C}$ 等) 上的多项式集合是一个环, 记作 $F[x]$.

(3) $n \times n$ 矩阵集合连同普通矩阵加法和乘法, 构成一个环, 记作 M_n. □

例 7.3.2 (四元数环)　回顾例 7.1.9. 设

$$\mathcal{Q} = \{a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$$

为一四维向量空间. 对向量空间的普通加法, 它显然是一个阿贝尔群. 我们定义过乘法, 它满足分配律, 且在乘法下是半群 (实际上, 我们证明了 $(\mathcal{Q} \setminus \{0\}, \times)$ 是一个群). 因此, 在这种加法与乘法意义下, $\mathcal{Q}$ 形成一个环, 这个环称为四元数环. □

定义 7.3.2　(1) 一个环 R 称为交换环, 如果它满足 $ab = ba, \forall a, b \in R$.

(2) 环中的一个元 $e \in R$ 称为环 R 的单位元, 如果 $re = er = r$, $\forall r \in R$. 如果一个环 R 有单位元, 则称为有单位元的环.

(3) 如果 $0 \neq a \in R$ 且 $0 \neq b \in R$ 使得 $ab = 0$, 那么 a 称为一个左零因子, 而 b 称为一个右零因子 (这里 0 是加法群的单位元).

(4) 有单位元而无零因子的环称为整环.

例 7.3.3　(1) 在例 7.3.1 中, $\mathbb{Z}$ 和 $\mathbb{R}[x]$ (或 $\mathbb{C}[x]$) 均为交换整环.

(2) M_n 不是交换环, 但它有单位元 I_n. 它有零因子: 例如在 M_2 中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$A \neq 0$ 且 $B \neq 0$, 但是 $AB = 0$. 故 A 是左零因子, 而 B 是右零因子.

(3) 考虑例 7.1.3 中的 $\mathbb{Z}_n$, 它对同余加法 $\oplus$ 为阿贝尔群. 定义同余乘法 $\otimes$

$$a \otimes b = ab \pmod{n},$$

那么容易证明, $(\mathbb{Z}_n, \oplus, \otimes)$ 是一个环, 这个环有单位元, 单位元为 "1". 如果 n 为合数, 它有零因子, 例如, 在 $\mathbb{Z}_6$ 中, $2 \otimes 3 = 0$, 故 2, 3 均为零因子. 如果 n 为素数, 它没有零因子. □

例 7.3.4　考虑四元数环, 它有单位元 "1". 它不可交换, 因为 $\mathbf{ij} = -\mathbf{ji}$. 这个环没有零因子. 事实上, 设 $ab = 0$, 如果 $a \neq 0$, 那么 $a^{-1}ab = a^{-1}0 = 0$, 即 $b = 0$. 因此, 它没有零因子. □

定义 7.3.3　设 $S \subset R$ 为环 R 的一个子集. 如果在与 R 中相同的运算下 S 是一个环, 则 S 称为 R 的一个子环.

下面的命题给出判定子环的方法.

命题 7.3.1　设 $S \subset R$ 为环 R 的一个子集, 如果

(1) 对任意 $a, b \in S$, $a - b \in S$;

(2) 对任意 $a, b \in S$, $ab \in S$.

则 S 是 R 的一个子环.

证明　由条件 (1), S 是一个子群, 它显然是个阿贝尔群. 条件 (2) 保证它对乘法封闭. 结论显见. □

例 7.3.5　(1) 在普通加法和乘法意义下, 实数集 $\mathbb{R}$ 是复数集 $\mathbb{C}$ 的子环; 有理数集 $\mathbb{Q}$ 是实数集 $\mathbb{R}$ 的子环; 整数集 $\mathbb{Z}$ 是有理数集 $\mathbb{Q}$ 的子环.

(2) Z_6 有两个非平凡的子环: $Z^2 = \{0, 3\}$, $Z^3 = \{0, 2, 4\}$.

(3) 设 R 为一个环, R 的中心 Z 定义为

$$Z = \{z \in R \,|\, rz = zr, \forall r \in R\}. \tag{7.3.1}$$

容易证明, Z 是 R 的子环.

(4) $(M_n,+,\times)$ (即 $n\times n$ 矩阵集合连同普通矩阵加法和乘法构成的环) 的中心为

$$Z=\{rI_n\,|\,r\in\mathbb{R}\}.$$

□

定义 7.3.4 (1) 一个子环 $S\subset R$, 如果它满足

$$rs\in S,\quad sr\in S,\quad \forall r\in R,\ s\in S, \tag{7.3.2}$$

则称它为一个理想.

(2) 给定一个元素 $r\in\mathbb{R}$, 包含 r 的最小理想称为由 r 生成的主理想, 记作 $S=(r)$.

容易证明, 一些理想的交还是理想. 因此, 由 r 生成的主理想 (r) 是存在的, 它是所有包含 r 的理想的交.

例 7.3.6 (1) 考虑 $\mathbb{R}[x]$, 它是一个整环. 记 $I_2[x]$ 为以 2 为其一个根的多项式, 即

$$I_2[x]=\{p(x)\in\mathbb{R}[x]\,|\,P(2)=0\}.$$

显然, $I_2[x]$ 是 $\mathbb{R}[x]$ 的一个理想, 这个理想是由 $x-2$ 生成的主理想 $(x-2)$.

(2) 记 $F(\mathbb{R})$ 为 $\mathbb{R}$ 上的可测函数集合, 它在普通函数加法与数乘下成环. 记 $C(\mathbb{R})$ 为 $\mathbb{R}$ 上的连续函数集合, 则 $C(\mathbb{R})$ 是 $F(\mathbb{R})$ 的一个子环, 但不是一个理想.

(3) 记 $F_0=\{f(x)\in F(\mathbb{R})\,|\,f(0)=0\}$. 那么, F_0 是 $F(\mathbb{R})$ 的一个理想, 并且 $F_0\cup C(\mathbb{R})$ 是 $C(\mathbb{R})$ 的一个理想. □

定义 7.3.5 设 R_1, R_2 为两个环.

(1) 映射 $F:R_1\to R_2$ 称为一个环同态, 如果它对加法是一个群同态, 并且满足

$$F(ab)=F(a)F(b).$$

(2) 一个环同态称为一个环同构, 如果它是一对一且映上的.

下面我们考虑多项式环. 记域 F 上的多项式环为 $F[x]$, 这里 F 可能是 $\mathbb{C}$、$\mathbb{R}$、$\mathbb{Q}$ 等.

定理 7.3.1 $F[x]$ 上的每一个理想都是主理想.

证明 设 $J\subset F[x]$ 为 $F[x]$ 的一个理想. 如果 J 只有零元, 则它由 0 生成; 否则, 设 $a(x)\neq 0$ 为 J 中次数最低的一个多项式. 我们证明 $J=\langle a(x)\rangle$.

设 $b(x)\in J$. 我们要证明 $b(x)=k(x)a(x)$. 用多项式除法可得

$$b(x)=a(x)k(x)+r(x),$$

这里 $r(x)$ 的次数低于 $a(x)$ 的次数, 并且 $r(x)=b(x)-a(x)k(x)\in J$. 如果 $r(x)\neq 0$, 这与 $a(x)$ 的定义矛盾. 故 $r(x)=0$, 即 $J=\{a(x)k(x)\,|\,k(x)\in F[x]\}=\langle a(x)\rangle$. □

下面这些结果是熟知的, 它很容易用辗转相除法得到. 为以后使用方便我们把它写成命题形式.

命题 7.3.2 (1) 设 $m, n \in \mathbb{Z}$, m、n 的最大公因数为 k, 则存在 $p, q \in \mathbb{Z}$, 使得

$$mp + nq = k.$$

特别是当 m、n 互质时, $k = 1$.

(2) 设 $m(x), n(x) \in F[x]$, $m(x)$、$n(x)$ 的最大公因式为 $k(x)$, 则存在 $p(x), q(x) \in F[x]$, 使得

$$m(x)p(x) + n(x)q(x) = k(x).$$

特别是当 $m(x)$、$n(x)$ 互质时, $k(x) = 1$.

例 7.3.7 (1) 映射 $F: Z \to Z_n$ 定义为 $z \mapsto z \pmod{n}$ 是一个环同态.

(2) 设

$$Q = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

容易证明, Q 是 2×2 实矩阵环 $M_2(\mathbb{R})$ 的子环. 定义 $F: \mathbb{C} \to Q$ 为 $a + ib \mapsto \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$. 直接检验可知, F 是一个环同构. □

例 7.3.8 选择 $A, B, C, D \in M_2(\mathbb{C})$ 如下

$$A = I_2, \quad B = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}.$$

定义

$$Q = \{aA + bB + cC + dD \,|\, a, b, c, d \in \mathbb{R}\}.$$

按照普通的矩阵加法和乘法, 它构成一个环. 有趣的是, 它们的乘积关系与四元数的基底 $\{1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ 的乘积关系完全一样, 例如: $BC = -CB = D$ 等. 定义映射 $F: Q \to Q$ 如下

$$F(a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}) = aA + bB + cC + dD.$$

容易证明, 这是一个环同构. □

命题 7.3.3 设 J 为 R 的一个理想. 作陪集 $R/J := \{J + r \,|\, r \in R\}$, 对陪集集合作加法与乘法如下

$$(J + a) + (J + b) = J + (a + b), \quad (J + a) \times (J + b) = J + ab.$$

那么容易证明, R/J 构成一个环, 这个环称为商环.

设 $F: A \to B$ 为一环同态. 同态核定义为 $K = \{a \in A \,|\, F(a) = 0\}$, 那么我们有如下定理.

定理 7.3.2 (环同态基本定理) 设 $F: A \to B$ 为一环同态, 同态核为 K, 那么

(1) K 是一个理想;

(2) 像集 $\mathrm{im}(A) \subset B$ 与 A 对 K 的商环同构, 即

$$\mathrm{im}(A) \cong A/K. \tag{7.3.3}$$

证明 (1) 显然, K 是子环. 设 $k \in K$, $a \in A$, 则

$$F(ak) = F(a)F(k) = F(a) \times 0 = 0.$$

即 $aK \subset K$, 故 K 为理想.

(2) 定义 $\tilde{F}: A/K \to B$ 如下: $\tilde{F}(a+K) := F(a)$. 显然它与代表元无关, 因此上述定义是合理的. 我们证明 $\tilde{F}: A/K \to \mathrm{im}(A)$ 为同构映射. 事实上

$$\tilde{F}((a+k)+(b+k)) = \tilde{F}(a+b+k) = F(a+b) = F(a)+F(b) = \tilde{F}(a+k)+\tilde{F}(b+k);$$

$$\tilde{F}((a+k)(b+k)) = \tilde{F}(ab+k) = F(ab) = F(a)F(b) = \tilde{F}(a+k)\tilde{F}(b+k).$$

因此, $\tilde{F}$ 是一个同态. 要证明它是同构, 只要证明它是一对一的即可, 这等价于零的原像是零. 令 $\tilde{F}(a+k) = 0$ 即 $F(a) = 0$, 由定义 $a \in K$, 即 $a + K = K$. □

7.4 域和域的扩张

定义 7.4.1 一个交换的整环 E, 如果它的每个非零元均有逆, 则称它为一个域.

例 7.4.1 (1) $\mathbb{C}$、$\mathbb{R}$、$\mathbb{Q}$ 在普通加法和乘法下都是域, 通常分别称它们为复数域、实数域和有理数域.

(2) 四元数不是域. 它只差一点, 就是对乘法不可交换.

(3) 如果 n 是素数, 则 $\mathbb{Z}_n$ 是域. 例如 $\mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_7$, $\cdots$. 要证明 $\mathbb{Z}_n$ 是个域, 它显然是个交换整环, 所以只要证明每个非零元有逆即可. 设 $s < n$, 因 n 是素数, n 与 s 互质, 故存在 $p > 0$, $q > 0$, $p < n$ 使得

$$sp + nq = 1,$$

于是 $s \times p = 1 \pmod{n}$.

(4) 如果 n 是合数, 则 $\mathbb{Z}_n$ 不是域, 因为此时有零因子. 设 $st = n$, $s > 1$, $t > 1$, 则 $s \times t = 0 \pmod{n}$. □

一个域的特征值指最小的正整数 n, 使

$$\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n} = 0.$$

如果不存在 n, 则称其特征值为 0. 例如, $\mathbb{Z}_5$ 的特征值为 5, $\mathbb{C}$、$\mathbb{R}$、$\mathbb{Q}$ 的特征值为 0.

定义 7.4.2 设 E 为一个域. $F \subset E$ 称为 E 的子域, 如果 F 对加法、加法的逆 (或称减)、乘法、乘法的逆 (或称除) 均封闭, 即 $a+b \in F, \forall a,b \in F$; $-a \in F, \forall a \in F$; $ab \in F, \forall a,b \in F$; $a^{-1} \in F, \forall a \in F$.

如果 F 是 E 的子域, 则称 E 为 F 的扩张域.

显然, $\mathbb{Q}$ 是 $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{C}$ 的子域, $\mathbb{R}$ 是 $\mathbb{C}$ 的子域, $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{C}$ 是 $\mathbb{Q}$ 的扩张域, $\mathbb{C}$ 是 $\mathbb{R}$ 的扩张域. 下面给出一个重要的扩张形式.

例 7.4.2 在有理数 $\mathbb{Q}$ 中添加 $\sqrt{2}$. 记作

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a+b\sqrt{2} \,|\, a,b \in \mathbb{Q}\},$$

显然它是一个整环. 要证明它是域, 只要证明它的每个非零元有逆元即可. 设 $a+b\sqrt{2} \neq 0$, 如果 $b=0$, 则 $1/a$ 为其逆. 如果 $b \neq 0$, 则

$$\frac{1}{a+b\sqrt{2}} = \frac{a-b\sqrt{2}}{a^2-2b^2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}),$$

因此, $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 是 $\mathbb{Q}$ 的一个扩张域. □

本节主要介绍域的扩张. 设 E 为 F 的一个扩张. 对一个 F 外的元素 $c \in E \backslash F$, 定义一个映射 $\sigma_c : F[x] \to E$ 为

$$\sigma_c(a(x)) = a(c), \quad a(x) \in F[x]. \tag{7.4.1}$$

因为

$$\begin{cases} \sigma_c(a(x)+b(x)) = a(c)+b(c) = \sigma_c(a(x)) + \sigma_c(b(x)), \\ \sigma_c(a(x)b(x)) = a(c)\cdot b(c) = \sigma_c(a(x))\sigma_c(b(x)), \end{cases}$$

σ_c 是一个环同态.

记 K_c 为 σ_c 的同态核, 即 $K_c = \{a(x) \in F[x] \,|\, a(c) = 0\}$. $c \in E$ 称为一个代数数, 如果存在一个非零多项式 $a(x) \in F[x]$ 使得 $a(c)=0$. 否则, c 称为超越数. 显然, c 是代数数, 当且仅当 $K_c \neq \{0\}$.

注意到: (1) K_c 是一个理想; (2) $F[x]$ 中任何一个理想都是由理想中次数最低的多项式产生的主理想.

让 $K_c = \langle p(x) \rangle$, 这里 $p(x)$ 为首一多项式 (最高次项系数为 1). $p(x)$ 称为 c 在 F 上的最小多项式. 显然, $p(x)$ 是不可约多项式. 否则, 设 $p(x) = a(x)b(x)$, 则 $a(c)b(c) = p(c) = 0$, 从而 $a(c)=0$ 或 $b(c)=0$, 矛盾.

下面证明, σ_c 的像是一个域. 对加、减、乘的封闭性是显然的. 下证非零元有逆. 设像集中任一非零元 $f(c) \neq 0$. 因 $p(x)$ 不可约, 则 $f(x)$ 与 $p(x)$ 互质. 于是存在 $a(x)$ 与 $b(x)$ 使得

$$f(x)a(x) + p(x)b(x) = 1. \tag{7.4.2}$$

令 $x = c$, 则得 $f(c)a(c) = 1$, 故 $a(c) = (f(c))^{-1}$. 显然 σ_c 的像是包含 F 和 c 的最小域, 记作 $F(c)$.

由环的基本同态定理可知

$$F(c) \cong F[x]/\langle p(x)\rangle. \tag{7.4.3}$$

由式 (7.4.3) 可知存在如下命题.

命题 7.4.1　如果 c 和 d 为同一个不可约多项式 $p(x)$ 的根, 那么 $F(c) \cong F(d)$.

由上面的讨论可以得到一个域扩张的基本定理.

定理 7.4.1　设 F 为一个域, $a(x) \in F[x]$ 为一非常值多项式, 则存在一个 F 的扩张域 E 及 $c \in E$, 使得 $a(c) = 0$.

证明　设 $p(x)$ 为 $a(x)$ 的一个不可约因子, 那么 $F[x]/\langle p(x)\rangle$ 是一个域. 记 $J = \langle p(x)\rangle$, 定义 $\pi : F \to F[x]/J$ 为 $h \mapsto J + h$. 这显然是一个域的同构. 将 $h \in F$ 等同 $J + h$, 则 $F[x]/J$ 成为 F 的一个扩张域.

最后, 要在 $F[x]/J$ 中找到一个元, 它是 $a(x)$ 的根. 我们找的是 $\bar{x} = J + x$. 首先, 显然, 只要它是 $p(x)$ 的根就行了. 设 $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$. 因为现在 F 被 π 嵌入 $F[x]/J$, 系数变为 $\bar{a}_i = \pi(a_i) = J + a_i$. 现在

$$\begin{aligned}
p(\bar{x}) &= \bar{a}_0 + \bar{a}_1\bar{x} + \cdots + \bar{a}_n\bar{x}^n \\
&= (J + a_0) + (J + a_1)(J + x) + \cdots + (J + a_n)(J + x)^n \\
&= J + a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \\
&= J + p(x) = J.
\end{aligned}$$

□

定义 7.4.3　设 F_1, F_2 为两个域, $\pi : F_1 \to F_2$ 如果满足

$$\pi(a + b) = \pi(a) + \pi(b), \quad \pi(ab) = \pi(a)\pi(b), \quad \forall a, b \in F_1,$$

则称 F_1 与 F_2 同态, π 为同态映射. 如果同态映射 π 是一对一且映上的, 则称 F_1 与 F_2 同构, π 为同构映射.

以下的结论是显见的.

命题 7.4.2　设 F_1, F_2 为两个域, $\pi : F_1 \to F_2$ 为域同态, 那么 $\pi(0) = 0, \pi(1) = 1$, $\pi(-a) = -\pi(a)$, $\pi(a^{-1}) = [\pi(a)]^{-1}$.

如果 E 是 F 的扩张, 则显然, E 可以看作 F 上的一个线性空间. 例如 $\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$, 即 $\mathbb{C}$ 是 $\mathbb{R}$ 上以 $\{1, i\}$ 为基底的二维线性空间. 又如 $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ 也是 $\mathbb{Q}$ 上的二维空间. 然而, $\mathbb{R}$ 作为 $\mathbb{Q}$ 的扩张就是无穷维的, 例如, $\{\pi, \pi^2, \pi^3, \cdots\}$ 都线性无关. 于是有如下定义.

定义 7.4.4 设 E 为 F 的一个扩张域. 如果 E 作为 F 上的线性空间是有穷维的, 则称 E 是 F 的代数扩张, 否则称为超越扩张. 维数 n 称为扩张指数, 记作

$$[E:F]=n.$$

设 c 为 F 上的代数数, 且 $p(x)$ 为 c 在 F 上的最小多项式. 设 $\deg(p(x))=n$, 那么, 显然 $1,c,\cdots,c^{n-1}$ 线性无关, 并且它们张成 $F(c)$. 则 $F(c)$ 为 F 上包含 c 的最小域, 称为 c 在 F 上的扩张域.

例 7.4.3 考虑 $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}-1)$. $c=\sqrt[3]{2}-1$ 在 $\mathbb{Q}$ 上的最小多项式为 $p(x)=x^3+3x^2+3x-1=0$. 于是 1, c, c^2 线性无关. 否则, 有 $q_1\times 1+q_2\times c+q_3\times c^2=0$, q_1、q_2、q_3 为不全为零的有理数, 这与 $p(x)$ 的定义矛盾. 但由定理 7.4.1, $\{q_1\times 1+q_2\times c+q_3\times c^2\mid q_i\in\mathbb{Q}\}$ 是一个域, 同时, 它也是 $\mathbb{Q}$ 上的一个三维线性空间. □

用与上例同样的讨论可知, 一般地说, 我们有以下定理.

定理 7.4.2 设 c 为 F 上的一个代数数, 则 $F(c)$ 对 F 的扩张次数 $[F(c):F]$ 等于 c 在 F 上的最小多项式次数.

现在考虑两次扩张的情况. 设有三个域 F、E 和 K, 这里 E 是 F 的代数扩张, 基底为 $\{e_1,\cdots,e_m\}$; K 是 E 的代数扩张, 基底为 $\{k_1,\cdots,k_n\}$. 那么对任一 $k\in K$, 有展式

$$\begin{aligned}
k &= a_1k_1+a_2k_2+\cdots+a_nk_n \qquad a_i\in E\\
&= (a_1^1e_1+\cdots+a_m^1e_m)k_1+\cdots+(a_1^ne_1+\cdots+a_m^ne_m)k_m \qquad a_j^i\in F\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_j^ie_ik_j,
\end{aligned} \tag{7.4.4}$$

容易证明, $\{e_ik_j\mid 1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant m\}$ 线性无关. 因此, K 是 F 上的一个线性空间, 维数为 mn. 把它写成下面的定理.

定理 7.4.3 考虑三个域 $F\subset E\subset K$, 这里 E 是 F 的代数扩张, 且 K 是 E 的代数扩张. 那么有

$$[K:F]=[K:E][E:F]. \tag{7.4.5}$$

作为应用, 我们考虑古老的平面几何中的尺规作图问题. 先弄清尺规作图的规则:

直尺: 过两点作一条线.

圆规: 给定点 c, 给定线段长 r, 作一个以 c 为圆心, 以 r 为半径的圆.

现在我们可以在平面上任选两个点 A、B, 不妨设 $A=(0,0)$, $B=(1,0)$ (在平面上任选第三个点 C 没有任何意义, 因为它的坐标无法确定). 于是, 从这两点出发, 看什么样的点是尺规作图所能达到的. 从平面几何可知, 我们可任意有限等分, 可以作垂线. 因此, $(x,y)\in\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ 的点都是几何作图可构造的. 从 $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ 出发, 还有哪些点可构造呢? 显然, 一个点可构造, 当且仅当它是下面三种情况之一:

(1) 两条直线的交;

(2) 直线与圆的交;

(3) 圆与圆的交.

分别考虑以下三种情况.

(1) 两条直线的交: 设 L_1 过 (a_1, b_1) 和 (a_2, b_2); L_2 过 (a_3, b_3) 和 (a_4, b_4); $a_i, b_i \in \mathbb{Q}$, 因此, 这两条线可构造. 这两条线的方程分别为

$$\frac{y-b_1}{x-a_1} = \frac{b_2-b_1}{a_2-a_1}, \tag{7.4.6}$$

$$\frac{y-b_3}{x-a_3} = \frac{b_4-b_3}{a_4-a_3}. \tag{7.4.7}$$

设其交点为 (x, y), 则显然 $x, y \in \mathbb{Q}$. 因此, 我们不能得到任何新东西.

(2) 直线与圆的交: 画一个以 (c_1, c_2) 为圆心, r 为半径的圆, 方程为

$$(x-c_1)^2 + (y-c_2)^2 = r^2. \tag{7.4.8}$$

只要 $c_1, c_2, r \in \mathbb{Q}$, 则圆是可构造的. 考虑它与 L_1 的交: 由式 (7.4.6) 解出 y 代入式 (7.4.8), 得

$$p(x) := a_x x^2 + \beta_x x + \gamma_x = 0, \tag{7.4.9}$$

这里 $\alpha_x = 1 + \left(\frac{b_2-b_1}{a_2-a_1}\right)^2 \neq 0$, 且

$$q(y) := \alpha_y y^2 + \beta_y y + \gamma_y = 0, \tag{7.4.10}$$

这里

$$\alpha_y = 1 + \left(\frac{a_2-a_1}{b_2-b_1}\right)^2 \neq 0.$$

设 (x_0, y_0) 为交点, 那么 $[Q(x_0):Q] = 2$, 且 $[Q(y_0):Q] = 2$. 因此 $[Q(x_0, y_0):Q] = 2$ 或 4.

(3) 圆与圆的交: 将两个圆方程相减即得到一个线性方程, 因此这种情况可退化到第二种情况.

注意到: 一个点 (a, b) 可构造, 当且仅当两个数 a 和 b 可构造 (一个数可构造即长度为这个数的线段可构造). 因此, 下面只讨论什么时候一个数可构造. 根据上面的讨论有如下定理.

定理 7.4.4 一个数可构造的必要条件是 $[\mathbb{Q}(a):\mathbb{Q}] = 2^k$, $k \geqslant 0$.

例 7.4.4 (1) 倍立方问题 (将立方体体积扩大一倍), 是几何作图不能的. 因为我们要构造长度 $2^{1/3}$. 而 $[\mathbb{Q}(2^{1/3}):\mathbb{Q}] = 3$, 根据定理 7.4.4, 这不可作.

(2) 等方圆问题 (作一正方形与圆等面积), 是几何作图不能的. 因为我们要构造长度 $\sqrt{\pi}$. 而 $\sqrt{\pi}$ 是一个超越数, 即 $[\mathbb{Q}(\sqrt{\pi}):\mathbb{Q}] = \infty$.

(3) 三等分角问题 (三等分一任意角), 是几何作图不能的. 我们只要证明不能三等分某一个角就行了. 考虑 60°, 如果可以, 那就可以构造 $\cos(20°)$ (或 $\sin(20°)$). 但是

$$\cos(3\theta) = 4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta).$$

取 $\theta = 60^\circ$, 则 $x = \cos(20^\circ)$ 满足

$$p(x) := x^3 - \frac{3}{4}x - \frac{1}{8} = 0.$$

$p(x)$ 不可约, 所以, $[\mathbb{Q}(\cos(20^\circ)) : \mathbb{Q}] = 3$. 因此, 它不可构造. □

平面几何的尺规作图问题, 实质上是 a 长度可否作出来的问题. 如果 a 只涉及到平方根, 则一定可作. 例如, $a = \sqrt{2}(\sqrt{3}+1)$, $a = \sqrt{2} + \sqrt{\sqrt{3}+1}$, 等.

7.5　伽罗瓦理论 (I) —— 伽罗瓦群*

伽罗瓦理论是经典近世代数的最精华部分, 它的产生是要回答一个这样的问题: 什么时候一个代数方程有根式解?

本节假定所讨论的域的特征值均为 0. 我们需要一些准备工作.

引理 7.5.1　*一个不可约多项式 $a(x) \in F[x]$ 无重根.*

证明　设 c 为其重根, 则 c 也是其导数 $a'(x)$ 的根. 设 c 在 F 上的最小多项式为 $p(x)$, 则 $p(x)$ 为 $a(x)$ 和 $a'(x)$ 的因子. 但 $a(x)$ 不可约, 故 $p(x) = \alpha a(x)$, $0 \neq \alpha \in F$, 即 $a(x)$ 为 $a'(x)$ 的因子, 矛盾. □

每一个代数扩张都可以写成有限次扩张形式. 这是因为如果 $[E : F] = n$, 找一 $c_1 \in E\backslash F$, 作 $F(c_1)$, 如果 $F(c_1) \neq E$, 找一 $c_2 \in E\backslash F(c_1)$, 作 $F(c_1)(c_2)$, 记作 $F(c_1, c_2)$. 继续这个过程, 经有限次即得 $E = F(c_1, \cdots, c_k)$. 如果 $k = 1$, 即 $F(c)$ 称为单扩张.

实际上, 对 F 每一个有限扩张 E, 都可以找到适当的 c, 使扩张一次完成, 即 $E = F(c)$.

定理 7.5.1　*每一个有限扩张都是单扩张.*

证明　显然, 只要证一个二次扩张 $F(a, b)$ 可写成单扩张即可. 设 $A(x)$、$B(x)$ 分别为 a、b 的最小多项式, 其根分别为 $a_1 = a, a_2, \cdots, a_n$, $b_1 = b, b_2, \cdots, b_m$. 取

$$t \neq \frac{a_i - a}{b - b_j}, \quad i = 2, \cdots, n; j = 2, \cdots, m.$$

令 $c = a + tb$. 显见

$$c - tb_j \neq a_i, \quad i = 1, \cdots, n; j = 2, \cdots, m.$$

令 $h(x) = A(c - tx)$, 则

$$h(b) = A(c - tb) = A(a) = 0.$$

由于 $c - tb_j \neq a_i$, $i = 1, \cdots, n$, 则

$$h(b_j) = A(c - tb_j) \neq 0,$$

即 b 是 $h(x)$ 与 $B(x)$ 的唯一公共根.

我们断言: $b \in F(c)$. 如果断言正确, 那么 $a = c - tb \in F(c)$, 于是 $F(a,b) \subset F(c)$. 但 $c \in F(a,b)$, 则 $F(c) \subset F(a,b)$, 故 $F(a,b) = F(c)$.

因此, 只要证明断言即可. 设 $p(x)$ 为 b 在 $F(c)$ 上的最小多项式, 如果 $p(x)$ 次数为 1, 则 $[F(c,b):F(c)] = 1$, 即: $F(c,b) = F(c)$. 如果 $\deg(p(x)) \geqslant 2$, 因为 $p(x)$ 是 $h(x)$ 和 $B(x)$ 的因子, 则 $h(x)$ 和 $B(x)$ 至少有两个公共根, 矛盾. □

注意, 上面的证明是构造性的, 它给出单扩张的构造方法, 我们用一个例子说明.

例 7.5.1 考虑 $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{5})$. $\sqrt{2}$ 的最小多项式为 $x^2 - 2 = 0$, 其根为 $a = a_1 = \sqrt{2}$, $a_2 = -\sqrt{2}$; $\sqrt[3]{5}$ 的最小多项式为 $x^3 - 5 = 0$, 其根为 $b = b_1 = \sqrt[3]{5}$, $b_2 = \sqrt[3]{5}[\cos(\frac{2\pi}{3}) + i\sin(\frac{2\pi}{3})]$, $b_3 = \sqrt[3]{5}[\cos(\frac{4\pi}{3}) + i\sin(\frac{4\pi}{3})]$.

$$\{1\} \notin \left\{\frac{a-a_2}{b-b_2}, \frac{a-a_2}{b-b_3}\right\},$$

故可取 $t = 1$. 由上述定理的证明可知

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{5}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt[3]{5}).$$

□

现在, 设 $h: F_1 \to F_2$ 为一个域同构, $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \in F_1[x]$, 则

$$hp(x) := h(a_0) + h(a_1)x + \cdots + h(a_n)x^n \in F_2[x].$$

容易证明, 在这样的定义下, h 变为 $F_1[x] \to F_2[x]$ 的环同构.

定理 7.5.2 设 $h: F_1 \to F_2$ 为一个域同构, $p(x) \in F_1[x]$ 不可约, α 为其一根, β 为 $hp(x)$ 一根. 则存在 h 的一个扩张 $\tilde{h}$, 使得

$$\tilde{h}: F_1(\alpha) \to F_2(\beta)$$

为一同构, 并且 $\tilde{h}(\alpha) = \beta$.

证明 首先, 因为 $h: F_1[x] \to F_2[x]$ 是一个环同构, 显然 $hp(x) \in F_2[x]$ 也是不可约的. 于是 $F_1(\alpha)$ 中的元可表示为

$$a_0 + a_1\alpha + \cdots + a_n\alpha^n,$$

$F_2(\beta)$ 中的元可表示为

$$b_0 + b_1\beta + \cdots + b_n\beta^n.$$

定义

$$\tilde{h}(a_0 + a_1\alpha + \cdots + a_n\alpha^n) = h(a_0) + h(a_1)\beta + \cdots + h(a_n)\beta^n.$$

容易检验, 这是域同构. □

在上述定理中, 取 $F_1 = F_2$, h 为恒等映射, 则得如下推论.

推论 7.5.1 设 α, β 为 F 上的不可约多项式 $p(x)$ 的两个根, 则存在同构 $h: F(\alpha) \to F(\beta)$, 满足 $h(a) = a, \forall a \in F$ 及 $h(\alpha) = \beta$.

现在设有两个双重扩张结构 $F \subset K_1 \subset E$ 及 $F \subset K_2 \subset E$. $h: K_1 \to K_2$ 为一域同构, 它固定 F (即 $h(a) = a, \forall a \in F$). $c \in K_1$ 为某个 $a(x) \in F[x]$ 的一个根, 则 $h(c) \in K_2$ 也是 $a(x)$ 的一个根. 这是因为

$$
\begin{aligned}
a(h(c)) &= a_0 + a_1 h(c) + \cdots + a_n (h(c))^n \\
&= h(a_0 + a_1 c + \cdots + a_n c^n) = h(0) = 0.
\end{aligned}
$$

设 $F \subset K \subset E$, $a(x) \in F[x]$, $c_1, \cdots, c_n$ 为 $a(x)$ 的根, 且 $K = F(c_1, \cdots, c_n)$, 则称 K 为 F 关于 $a(x)$ 的根域.

定理 7.5.3 设 K_1, K_2 为 F 的两个有限扩张, 且 K_1 为 F 的关于 $a(x)$ 的根域, $h: K_1 \to K_2$ 为一固定 F 的同构, 则 $K_1 = K_2$.

证明 设 $c_1, \cdots, c_n$ 为 $a(x)$ 的根, 由推论 7.5.1 则 $h(c_i) = c_{\sigma(i)}$, $(\sigma \in S_n)$. 也就是说, 将 h 作用在根集合上, 它是根的一个置换. 于是 $K_1 = F(c_1, \cdots, c_n)$, $K_2 = F(c_1, \cdots, c_n)$, 则 $K_1 = K_2$. □

定理 7.5.4 设 L_1 和 L_2 为 F 的两个有限扩张, K 为 L_1 的一个扩张, 使得 K 为 F 上的一个根域, $H: L_1 \to L_2$ 为一个固定 F 的同构. 那么 h 可扩展为 $\tilde{h}: K \to K$, 一个 K 到 K 上的自同构.

证明 由定理 7.5.1 可设 $K = L_1(c)$. 由定理 7.5.2, h 可扩展为一个同构

$$
\tilde{h}: L_1(c) \to L_2(d).
$$

再应用定理 7.5.3 可知, $L_1(c) = L_2(d)$, 即得同构 $\tilde{h}: K \to K$. □

从定理 7.5.4 的证明可知 $L_2 \subset L_2(d) = K$.

推论 7.5.2 设 K 为 F 上的根域, $p(x) \in F[x]$ 不可约. 如果 $p(x)$ 的一个根属于 K, 则 $p(x)$ 所有的根均属于 K.

证明 设 α, β 为 $p(x)$ 的两个根, $\alpha \in K$. 依定理 7.5.2, 存在 $h: F(\alpha) \to F(\beta)$ 为固定 F 的同构, 使 $h(\alpha) = \beta$. 应用定理 7.5.4, 令 $L_1 = F(\alpha)$, $L_2 = F(\beta)$, 则 $L_2 = F(\beta) \subset K$, 于是, $\beta \in K$. □

命题 7.5.1 设 $L \subset E \subset K$, 这里 E 是 L 的有限扩张, K 是 E 的有限扩张. 如果 K 是 L 的根域, 则 K 也是 E 的根域.

证明 设 K 是 L 上关于 $a(x)$ 的根域, 则 K 也是 E 上关于 $a(x)$ 的根域. □

现在设 K 为 F 的一个关于 $a(x)$ 的根域, 并设 $a(x)$ 的根为 $c_1,\cdots,c_n$, 则 $K=F(c_1,\cdots,c_n)$. 设 h 为 K 的一个固定 F 的自同构, 则 h 实现根的置换, 而且, 显然 h 完全由这个置换所决定. 那么, 这样的自同构到底有多少呢? 直觉也许会觉得, 每个置换都是一个自同构. 但实际上并不如此, 下面的命题回答了这个问题.

命题 7.5.2 设 K 为 F 的一个根域, $[K:F]=n$, 则 K 的固定 F 的自同构共有 n 个.

证明 由定理 7.5.1, 可设 $K=F(\alpha)$, $\alpha\in K$. 设 α 的最小多项式为 $p(x)$, 则 $\deg(p(x))=n$. 现在, 任一固定 F 的自同构 π 将 α 映成 $p(x)$ 的一个根, 而且 π 由 $\pi(\alpha)$ 值唯一确定. 因此, 这样的自同构正好有 n 个. □

上述的自同构依复合运算构成一个群, 这个群称为伽罗瓦群.

定义 7.5.1 设 K 为 F 的关于 $a(x)$ 的根域, 则 K 的固定 F 的自同构群称为 $a(x)$ 的伽罗瓦群, 或 K 在 F 上的伽罗瓦群, 记作

$$\mathrm{Gal}(K:F).$$

现在如果 K 为 F 的关于 $a(x)$ 的根域, $[K:F]=n$. 那么 $\deg(a(x))=n$. 如果 $a(x)=a_1(x)\cdots a_k(x)$, $a_i(x)$ 不可约. 设 $\deg(a_i(x))=n_i$, $i=1,\cdots,k$, 则有 $\prod_{i=1}^k n_i=n$. 由推论 7.5.1, 存在一个固定 F 的同构, 它把 $a_i(x)$ 的一个根映为其另一个根. 这样的同构有 n_i 个. 由命题 7.5.1, 固定 F 的自同构为 n 个. 因此, 每个自同构将 $a_i(x)$ 的一个根映为它的另一个根.

我们给出一些数值例子, 看如何构造伽罗瓦群.

例 7.5.2 (1) 考虑 $K=\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. 它是 $\mathbb{Q}$ 上关于 $p(x)=(x^2-2)$ 的根域. 于是 K 在 $\mathbb{Q}$ 上的伽罗瓦群包含两个自同构, 一个是 h_1, $h_1(\sqrt{2})=\sqrt{2}$. 一个是 h_2, $h_2(\sqrt{2})=-\sqrt{2}$. 由于

$$K=\{a+b\sqrt{2}\,|\,a,b\in\mathbb{Q}\},$$

因此, h_1 是 K 上的恒等映射, $h_2:K\to K$ 为 $h_2:a+b\sqrt{2}\mapsto a-b\sqrt{2}$. $\mathrm{Gal}(K:\mathbb{Q})=\{h_1,h_2\}$. 显然, $h_1=e$ 是单位元.

(2) 考虑 $K=\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})$. 它是 $\mathbb{Q}$ 上关于 $p(x)=(x^2-2)(x^2-3)$ 的根域, $[\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3}):\mathbb{Q}]=4$. $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 的元可表示为: $a+b\sqrt{2}$, 于是 $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})=\mathbb{Q}(\sqrt{2})(\sqrt{3})$ 的元可表示为

$$(a+b\sqrt{2})+(c+d\sqrt{2})\sqrt{3}=a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}+d\sqrt{6},$$

即

$$K=\{a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}+d\sqrt{6}\,|\,a,b,c,d\in\mathbb{Q}\}.$$

现在, 每个使 $\mathbb{Q}$ 不动的自同构将 x^2-2 的一个根映为它的一个根. 将 x^2-3 的一个根映

为它的一个根. 因此, 这里有四个自同构, 分别满足

$$\begin{aligned} h_0 &: \sqrt{2} \to \sqrt{2};\ \sqrt{3} \to \sqrt{3}, \\ h_1 &: \sqrt{2} \to -\sqrt{2};\ \sqrt{3} \to \sqrt{3}, \\ h_2 &: \sqrt{2} \to \sqrt{2};\ \sqrt{3} \to -\sqrt{3}, \\ h_3 &: \sqrt{2} \to -\sqrt{2};\ \sqrt{3} \to -\sqrt{3}. \end{aligned}$$

容易得到它的四个自同构为

$$\begin{aligned} h_0 &: a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}+d\sqrt{6} \mapsto a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}+d\sqrt{6}; \\ h_1 &: a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}+d\sqrt{6} \mapsto a+b\sqrt{2}-c\sqrt{3}-d\sqrt{6}; \\ h_2 &: a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}+d\sqrt{6} \mapsto a-b\sqrt{2}+c\sqrt{3}-d\sqrt{6}; \\ h_3 &: a-b\sqrt{2}-c\sqrt{3}+d\sqrt{6} \mapsto a-b\sqrt{2}-c\sqrt{3}-d\sqrt{6}. \end{aligned}$$

容易检验, 其伽罗瓦群 $\mathrm{Gal}(K:\mathbb{Q})$ 的乘法满足

$\circ$	h_0	h_1	h_2	h_3
h_0	h_0	h_1	h_2	h_0
h_1	h_1	h_0	h_3	h_2
h_2	h_2	h_3	h_0	h_1
h_3	h_3	h_2	h_1	h_0

□

下面考虑伽罗瓦群结构与域结构的关系. 设 K 为 F 的根扩张, $G=\mathrm{Gal}(K,F)$, L 为中间域: $F\subset L\subset K$. 记 $H_L=\mathrm{Gal}(K:L)$, 称 H_L 为 L 的固定子. 显然, $H_L<G$ 是 G 的子群. 反之, 设 $H<G$ 为 G 的一个子群, 定义

$$L_H=\{k\in K \mid \pi(k)=k,\ \forall \pi\in H\},$$

显然, L_H 是 K 的一个子域, 并且 $F\subset L_H$, L_H 称为 H 的不变域.

我们的目的是要在中间域与子群间建立一一对应关系.

定理 7.5.5 设 K 为 F 的根域, α、β 为不可约多项式 $p(x)\in F[x]$ 的两个根, 则存在一个 K 上的自同构 $\pi:K\to K$, 使得 $\pi(\alpha)=\beta$.

证明 由推论 7.5.1, 存在同构 $h: F(\alpha)\to F(\beta)$, 使得 $h(\alpha)=\beta$. 记 $L_1=F(\alpha)$, $L_2=F(\beta)$, 利用定理 7.5.4, 构造 $\tilde{h}$, 则 $\pi=\tilde{h}$ 即所要求的. □

定理 7.5.6 设 K 为 F 的根域, 如果 $H<\mathrm{Gal}(K:F)$ 是 $I\subset K$ 的固定子, 则 I 是 H 的固定域.

证明 设 J 为 H 的固定域, 则 $I\subset J$. 要证 $J\subset I$, 我们证 $I^c\subset J^c$: 设 $\alpha\notin I$, α 的最小多项式为 $p(x)\in I[x]$, 则 $\deg(p(x))\geqslant 2$. (如果等于 1, 那么 $\alpha\in I$.) 于是 $p(x)$ 有不同于

α 的其他根, 记其一作 β. 由定理 7.5.5 存在 K 上的一个自同构 h, 使 I 不动, 而 $h(\alpha)=\beta$. 这个 $h\in H$, 因为它使 I 不动. 因为 J 是 H 的固定域, 如果 $\alpha\notin J$ 则 $h(\alpha)=\alpha$, 因此, $\alpha\notin J$. □

设 $h:K\to K$ 为一域同构, 定义 $\tilde{h}:K[x]\to K[x]$ 为

$$\tilde{h}(a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n):=h(a_0)+h(a_1)x+\cdots+h(a_n)x^n. \tag{7.5.1}$$

前面说过, 这是一个环同构.

引理 7.5.2 设 K 为 F 的根域, H 为 $G=\mathrm{Gal}(K:F)$ 的子群, I 是 H 的固定域, 则 H 的元素个数等于 $[K:I]$.

证明 设 H 的元素个数为 r, 即 $H=\{h_1,\cdots,h_r\}$. 设 $K=I(a)$, 定义一个多项式

$$b(x)=[x-h_1(a)][x-h_2(a)]\cdots[x-h_r(a)].$$

首先证明 $b(x)\in I[x]$. 依式 (7.5.1) 定义同构 $\tilde{h}_i:K[x]\to K[x]$, 则

$$\begin{aligned}\tilde{h}_i(b(x))&=\tilde{h}_i\left((x-h_1(a))\cdots(x-h_r(a))\right)\\&=(x-h_ih_1(a))\cdots(x-h_ih_r(a)).\end{aligned}$$

注意到 $h_ih_1,\cdots,h_ih_r$ 还是 H 的 r 个不同元素, 故 $b(x)$ 对 $\tilde{h}_i$ 不变. 回到式 (7.5.1) 可知, $b(x)$ 的系数对 h_i 不变, 故属于 H 的固定域 I.

其次, 因为恒等映射是某个 h_i, 故 a 是 $b(x)$ 的一个根. 因此, a 的最小多项式 $p(x)$ 是 $b(x)$ 的因子, 于是 $r\geqslant[K:I]$. 利用命题 7.5.2, $[K:I]$ 等于 K 上固定 I 的自同构数, 我们已找到 r 个, 故 $[K:I]\geqslant r$. □

下面的定理是定理 7.5.6 的逆命题.

定理 7.5.7 设 K 为 F 的根域, $H<\mathrm{Gal}[K:F]$. 如果 I 是 H 的固定域, 则 H 是 I 的固定子.

证明 设 I^* 是 I 的固定子, 则 $H\subset I^*$. 由定理 7.5.6, I 是 I^* 的固定域. 由引理 7.5.2, $|H|=|I^*|=[K:I]$. 于是 $I^*=H$. □

由定理 7.5.6 和定理 7.5.7 可知, 在 $\mathrm{Gal}(K:F)$ 的子群和 K 与 F 的中间域之间存在一一对应关系, 这种对应称为伽罗瓦对应.

例 7.5.3 回顾例 7.5.2. 设 $K=\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})$, 则 $G=\mathrm{Gal}(K,\mathbb{Q})=\{h_0,h_1,h_2,h_3\}$. 易知, G 的子群有 $G_0=\{h_0\}$, $G_1=\{h_0,h_1\}$, $G_2=\{h_0,h_2\}$, $G_3=\{h_0,h_3\}$. K, $\mathbb{Q}$ 的中间域有 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{6})$.

容易检验, 固定子–固定域的伽罗瓦对应为

$$
\begin{aligned}
G_0 &\leftrightarrow K,\\
G_1 &\leftrightarrow \mathbb{Q}(\sqrt{2}),\\
G_2 &\leftrightarrow \mathbb{Q}(\sqrt{3}),\\
G_3 &\leftrightarrow \mathbb{Q}(\sqrt{6}),\\
G &\leftrightarrow \mathbb{Q}.
\end{aligned}
$$

□

下面考虑 $F\subset I\subset K$, 设 K、I 均为 F 的根域 (则 K 也是 I 的根域). 设 $h\in \mathrm{Gal}(K:F)$, 定义 $\mu(h):=h|_I$, 即将 h 限制在 I 上. 那么 $\mu(h):I\to K$ 是 I 到像集 $\mu(h)(I)$ 的同构. 由定理 7.5.3, $\mu(h)(I)=I$, 即 $\mu(h)$ 为 I 上的自同构. 于是 μ 成为映射

$$
\mu:\mathrm{Gal}(K:F)\to \mathrm{Gal}(I:F).
$$

这是一个同态映射, 因为

$$
\mu(h_1\circ h_2)=(h_1\circ h_2)|_I=h_1(h_2|_I),
$$

但 $h_2|_I:I\to I$, 于是

$$
h_1(h_2|_I)=h_1|_I\circ h_2|_I=\mu(h_1)\circ\mu(h_2),
$$

即 $\mu(h_1\circ h_2)=\mu(h_1)\circ\mu(h_2)$. 显然, 它是映上的, 因为据定理 7.5.4 (令 $L_1=L_2=I$), 任何一个 $h\in \mathrm{Gal}(I:F)$ 可扩展为 $\tilde{h}\in \mathrm{Gal}(K:F)$. 而 μ 的同态核显然是 $\mathrm{Gal}(K:I)$, 因为固定 I 的自同构限制在 I 上则成恒等映射. 因此, $\mathrm{Gal}(K:I)$ 是 $\mathrm{Gal}(K:F)$ 的正规子群, 即

$$
\mathrm{Gal}(K:I)\lhd \mathrm{Gal}(K:F).
$$

于是由群的第一同态定理 (定理 7.2.1) 可得如下定理.

定理 7.5.8 设 $F\subset I\subset K$, 设 K, I 均为 F 的根域. 那么 $\mathrm{Gal}(K:I)\lhd \mathrm{Gal}(K:F)$, 而且

$$
\mathrm{Gal}(I:F)\cong \frac{\mathrm{Gal}(K:F)}{\mathrm{Gal}(K:I)}. \tag{7.5.2}
$$

7.6 伽罗瓦理论 (II) —— 代数方程的解*

本节讨论高次方程的公式解问题.

先看什么叫公式解. 对二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有公式解

$$
x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.
$$

设 $a \neq 0$, b, c 为有理数, 有公式解可以看作在 $\mathbb{Q}$ 中添加 $\Delta = \sqrt{b^2-4ac}$, 使 $ax^2+bx+c=0$ 在 $\mathbb{Q}(\Delta)$ 有解. 当然, 对高次方程可能需要多次的根式扩张, 例如对有理系数 3 次方程 (总可以化为) $x^3+ax+b=0$ 有一个根可表示为

$$\sqrt[3]{-\frac{b}{2}+\sqrt{D}}+\sqrt[3]{-\frac{b}{2}-\sqrt{D}}, \quad \text{这里 } D=\frac{a^3}{27}+\frac{b^2}{4}.$$

于是, 对 $\mathbb{Q}$ 先作二次根式扩张 $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$, 再作三次根式扩张

$$\mathbb{Q}(\sqrt{D})\left(\sqrt[3]{-\frac{b}{2}+\sqrt{D}}, \sqrt[3]{-\frac{b}{2}-\sqrt{D}}\right),$$

那么, 在这个扩张域里, 就可以找到解.

我们做一个严格定义.

定义 7.6.1 (1) $F(c_1,\cdots,c_n)$ *称为 F 的根式扩张, 如果对每个 c_i 存在正整数 n_i, 使得*

$$(c_i)^{n_i} \in F(c_1,\cdots,c_{i-1}).$$

(2) *一个多项式 $a(x)\in F[x]$ 称为 (根式) 可解的, 如果存在 F 的一个根式扩张, 它包含 $a(x)$ 的所有的根.*

注意, 按定义可知, 根式扩张 $F(c_1,\cdots,c_n)$ 是这样得到的: 先将 $c_1=\sqrt[n_1]{f_0}$ $(f_0\in F)$ 添加到 F 上, 得到 $F(c_1)$, 再将 $c_2=\sqrt[n_2]{f_1}$ $(f_1\in F(c_1))$ 添加到 $F(c_1)$ 上, 得到 $F(c_1,c_2)$, 等等.

定理 7.6.1 *设 F 为一个域, $G<(F\backslash\{0\},\times)$ 为一有限乘法群, 则 G 为循环群.*

证明 设 $|G|=n$, 我们通过将 G 与 $\mathbb{Z}_n$ 比较证明结论. 设 k 为 n 的一个因数, 定义

$$g(k)=\{g\in G\,|\,g^k=1\}.$$

因为在 F 中 $x^k=1$ 至多有 k 个根, 因此, 如果有 $1\neq a\in g(k)$, 则有 $g(k)=\langle a\rangle=\{1,a,a^2,\cdots,a^{k-1}\}$. 定义

$$z(k)=\{z\in\mathbb{Z}_n\,|\,kz=0\}.$$

取 $m=n/k$, 则 $z(k)=\langle m\rangle=\{0,m,2m,\cdots,(k-1)m\}$. 现在将 G 与 Z_n. 比较两个循环群 $g(k)$ 与 z_k 可知, 如果有 $1\neq a\in g(k)$, 则 G 与 Z_n 阶数为 k 的元素相等. 否则 G 中阶数为 k 的元素为零. 现在将 G 与 $\mathbb{Z}_n$ 按元素阶数作一划分, 如果有某个 k, G 中阶数为 k 的元素比 Z_n 中阶数为 k 的元素少, 则 $|G|<|\mathbb{Z}_n|=n$. 矛盾. 现在, $\mathbb{Z}_n$ 中有阶数为 n 的元素, 譬如, 元素 1, 故 G 中也有阶数为 n 的元素, 记作 a, 则 $G=\langle a\rangle$. □

在域 F 或其扩张中, 所有的 n 次单位根 $\{x\,|\,x^n=1\}$ 显然构成一个 n 阶乘法群. 由定理 7.6.1, 存在一个 n 阶元 ω, 使得

$$\{x\,|\,x^n=1\}=\{1,\omega,\omega^2,\cdots,\omega^{n-1}\}=\langle\omega\rangle,$$

这样的 ω 称为 n 次基根 (primitive n-th root).

一个扩张 $F\subset K$ 称为阿贝尔扩张, 如果 $\mathrm{Gal}(K,F)$ 是阿贝尔群.

下面我们要证明: 一个一次根式扩张是一个阿贝尔扩张.

设 ω 为 $x^n-1\in F[x]$ 在 F 的某个扩张域中的一个基根, 即 $1,\omega,\omega^2,\cdots,\omega^{n-1}$ 为其 n 个根, 那么 $F(\omega)$ 是一个阿贝尔扩张, 因为

$$F(\omega)=\{a_0+a_1\omega+\cdots+a_{n-1}\omega^{n-1}\mid a_0,\cdots,a_{n-1}\in F\}.$$

因为设 h,g 为固定 F 的扩张, $h(\omega)=\omega^p$, $g(\omega)=\omega^q$, 那么

$$h\circ g(\omega)=\omega^{p+q(\mathrm{mod}\ n)}=g\circ h(\omega).$$

于是容易证明, 在 F 上 $h\circ g=g\circ h$.

现在, 假定 F 包含一个 n 次基根, b 是 a 的一个 n 次根, 那么, $\{b,b\omega,b\omega^2,\cdots,b\omega^{n-1}\}\subset F(b)$. 因此, $F(b)$ 是 F 的关于 x^n-a 的根域, 可证明 $F(b)$ 是阿贝尔扩张. 设 h, g 为固定 F 的扩张, $h(b)=b\omega^p$, $g(b)=\omega^q$, 那么

$$h\circ g(b)=b\omega^{p+q(\mathrm{mod}\ n)}=g\circ h(b).$$

类似于对 n 次基根扩张的说明, 不难证明 $h\circ g=g\circ h$.

设 b 为 x^n-a 的一个根, 则 $b,b\omega,b\omega^2,\cdots,b\omega^{n-1}$ 为它的全部根, 这里 ω 是 1 的 n 次基根, 即 $\omega^k\neq 1,k<n$, $\omega^n=1$. 设 $g,h\in\mathrm{Gal}(F(b),F)$, 于是 $g(b)=b\omega^i$, $h(b)=b\omega^j$. 容易看出, $g\circ h=h\circ g$.

注意, 一个一次根式扩张都会包含相应次数的基根, 这是因为 $b\in F(b)$, $b\omega\in F(b)$, 则 $\omega=(b\omega)/b\in F(b)$.

对于多次根式扩张 $F(c_1,\cdots,c_n)$, 有

$$\underbrace{F}_{J_0}\subset\underbrace{F(c_1)}_{J_1}\subset\underbrace{F(c_1,c_2)}_{J_2}\subset\cdots\subset\underbrace{F(c_1,c_2,\cdots,c_n)}_{J_n=K},\tag{7.6.1}$$

由前面的讨论可知, 这里每一步均为阿贝尔扩张.

下面证明式 (7.6.1) 中的每一个域都是 F 的根域, 我们用数学归纳法. $J_1=F(c_1)$, 依定义, 存在 n 和 $a\in F$ 使得 $c_1^n=a$ (不妨设, 这里的 n 是使 $c_1^n\in F$ 的最小的 $n>0$). 设 J_q 是 F 的根域, $c_{q+1}\in J_{q+1}$ 是某个 $a\in J_q$ 的 n 次根. 记 $H=\{h_1,\cdots,h_r\}$ 为 J_q 中固定 F 的自同构. 考虑多项式

$$b(x)=[x^n-h_1(a)][x^n-h_2(a)]\cdots[x^n-h_r(a)].$$

因为恒等映射属于 H, $b(x)$ 中有一个因子为 (x^n-a). 因此, c_{p+1} 是 $b(x)$ 的一个根. 回忆引理 7.5.2 的证明可知, $b(x)$ 的系数属于 H 的不动域, 即 F. 于是, I_{q+1} 是 F 的根域. 由归纳法, 式 (7.6.1) 中的每一个域都是 F 的根域.

现在记 $G = \mathrm{Gal}(K:F)$. J_k^* 为 J_k 的固定子, 则有

$$\underbrace{K^* = J_n^*}_{=\{e\}} \subset J_{n-1}^* \subset \cdots \subset J_1^* \subset \underbrace{J_0^* = F^*}_{=G}$$

由定理 7.5.8, $J_{k+1}^* \lhd J_k^*$, 并且

$$\mathrm{Gal}(J_k : J_{k+1}) = \frac{J_k^*}{J_{k+1}^*}, \quad k = 0, \cdots, n-1.$$

现在, 因为 J_{k+1} 是 J_k 的阿贝尔扩张, 所以 $\mathrm{Gal}(J_k : J_{k+1})$ 是一个阿贝尔群.

根据以上的讨论, 我们给出如下定义.

定义 7.6.2 *一个群 G 是可解的, 如果存在子群 H_i, $i = 0, \cdots, m$, 使得*

$$e = H_0 \rhd H_1 \rhd H_2 \rhd \cdots \rhd H_m = G, \tag{7.6.2}$$

并且 H_{k+1}/H_k, $k = 0, \cdots, m-1$ 为阿贝尔群.

由前面的讨论我们知道以下定理.

定理 7.6.2 *设 K 为 F 的根式扩张, 则 $\mathrm{Gal}(K:F)$ 可解.*

定理 7.6.3 *可解群的同态像可解.*

证明 记 $f: G \to f(G)$ 为同态, 且

$$\{e\} = H_0 \lhd H_1 \lhd \cdots \lhd H_m = G,$$

设 $\xi \in f(H_i)$, $\eta \in f(H_{i+1})$, 则存在 $a \in H_i$, $x \in H_{i+1}$, 使得 $\xi = f(a)$, $\eta = f(x)$. 因此

$$\eta\xi\eta^{-1} = f(xax^{-1}) \in f(H_i),$$

故 $f(H_i) \lhd f(H_{i+1})$. 设 $x, y \in H_{i+1}$ 则 $xyx^{-1}y^{-1} \in H_i$, 因此

$$f(x)f(y)[f(x)]^{-1}[f(y)]^{-1} = f(xyx^{-1}y^{-1}) \in f(H_i).$$

注意到 f 是映上的, 由命题 7.1.4 可知 $f(H_{i+1})/f(H_i)$ 为阿贝尔群. □

定理 7.6.4 *设 $a(x) \in F[x]$ 根式可解, 则其伽罗瓦群可解.*

证明 记 K 为 F 对于 $a(x)$ 的根域, 则有根式扩张 $F(c_1, \cdots, c_n)$, 使 $F \subset K \subset F(c_1, \cdots, c_n)$. 由定理 7.5.8, 有

$$\mathrm{Gal}(F(c_1, \cdots, c_n) : F)/\mathrm{Gal}(F(c_1, \cdots, c_n) : K) \cong \mathrm{Cal}(K : F).$$

因此, $\mathrm{Cal}(K:F)$ 是 $\mathrm{Gal}(F(c_1, \cdots, c_n) : F)$ 的同态像. 由定理 7.6.2, $\mathrm{Gal}(F(c_1, \cdots, c_n) : F)$ 可解. 由定理 7.6.3, $\mathrm{Gal}(K:F)$ 可解. □

实际上, 定理 7.6.4 的逆也成立, 其证明不难, 但较繁, 此处略去, 有兴趣的读者可参考一些标准代数教程, 譬如文献 [88] 等. 所以, 一个多项式的全部根能否用根式表出, 就看它的伽罗瓦群是否可解.

作为应用, 我们考虑五次方程公式解问题. 我们证明一般的五次方程不可能有有限根式形式表示的公式解. 我们需要一点准备.

引理 7.6.1　S_5 不可解.

证明　S_5 有一个子群 A_5, 易证 $A_5 \lhd S_5$. 因此, 有正规列

$$\{e\} \lhd A_5 \lhd S_5. \tag{7.6.3}$$

由于 S_5 与 A_5 的大小可知, S_5 与 A_5 间不可能有中间群 (见习题 7.7). 根据定理 7.1.2, A_5 是单群. 因此, 它与 $\{e\}$ 间不可能有中间的正规子群, 所以式 (7.6.3) 是唯一非平凡正规列. 但 $A_5/\{e\} = A_5$ 不是阿贝尔群, 故 S_5 不可解. □

例 7.6.1　五次方程没有公式解. 要证明这一点, 只要找到一个五次方程, 它的根不能全用根式表出即可.

考虑 $a(x) = x^5 - 5x - 2$. 容易检验, 它有 3 个实根, r_1, r_2, r_3, 一对共轭复根, $r_4 = \alpha + \beta i$, $r_5 = \alpha - \beta i$. 记 K 为 $\mathbb{Q}$ 上关于 $a(x)$ 的根域. 注意到 $\mathrm{Gal}(K:\mathbb{Q})$ 中的元对于根的一个置换, 所以它可以看作 (或者说, 同构于) 置换群 S_5 的一个子群. 因为 $1, r_1, r_1^2, r_2^3, r_1^4$ 是 $\mathbb{Q}(r_1)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上的一组基, $[\mathbb{Q}(r_1):\mathbb{Q}] = 5$. 但 $[K:\mathbb{Q}] = [K:\mathbb{Q}(r_1)][\mathbb{Q}(r_1):\mathbb{Q}]$, 因而, $\mathrm{Gal}(K:\mathbb{Q})$ 的元素个数 $n = [K:\mathbb{Q}]$, 含有一个素因子 5. 由 Cauchy 定理 7.1.1, 它有一个阶数为 5 的元素. 把置换写成标准循环乘积的形式, 只有五循环 (例如 (12345)) 才可能阶数为 5. 因此, G 中有一个五循环. 同时, G 中有一个长度为 2 的对换, 它将 $\alpha + \beta i$ 与 $\alpha - \beta i$ 对换, 而保持 r_1, r_2, r_3 不变. 显然, 这个对换保持 $\mathbb{Q}$ 不变, 故它属于 G.

容易证明, 在 S_5 中, 一个五循环加一个对换即可生成 S_5 (见习题 7.11). 因此, $\mathrm{Gal}(K,\mathbb{Q}) \cong S_5$.

由引理 7.6.1, S_5 不可解. 再由定理 7.6.4 可知 $a(x)$ 的根不能全用根式表出 (实际上全不能, 因为只要有一个可表, 则降为 4 次方程, 其他根也可表了). □

一般五次多项式 $P_5(x)$ 的根不能用根式表出, 那么 $P_k(x)$, $k > 5$ 的根也不能用根式表出. 因为, 譬如假设 $k = 6$ 可以解, 将 $xP_5(x)$ 的根用根式表出, 除去一个零根即可.

7.7　注释与参考

近世代数也称抽象代数, 它的诞生是基于对高次方程的研究. 中世纪的代数学以解方程为主, 到了 19 世纪初, 人们将注意力集中于五次及更高次方程的公式解. 两个天才的青年数学家彻底解决了这个问题. 阿贝尔 (Abel, 1802–1829) 证明了一般五次方程没有公式解, 但这并不等于所有的五次以上方程解都不能用根式表示. 伽罗瓦 (Galois, 1811–1832) 证明了 $a(x)$ 可解, 当且仅当它的伽罗瓦群可解. 他们的工作奠定了近世代数的基础.

四元数的发现和对超复数的探讨和研究, 是近世代数的另一个起源. 用四元数环刻画刚体转动可避免用欧拉角引起的奇异值情况, 它在力学系统控制中, 如卫星姿态控制等问题中得到大量应用[87].

域的扩张在非线性系统的微分代数方法中起着重要作用[13].

近世代数现在已经是数学、物理学、化学以及许多其他自然科学领域的一个重要的基本工具. 它同样也是系统与控制理论研究与工科设计的一个不可或缺的工具. 例如, 哈佛大学的 Brockett 教授被人称为 "非线性系统几何理论之父", 他的 (当然也是世界上) 第一篇用微分几何考虑非线性系统几何理论的文章, 题目为《群流形与陪集空间上的系统理论》[53], 第一次用李群李代数为工具, 解决了如卫星姿态等一类非线性系统的能控性问题; 他以卫星姿态观测为例, 提出以陪集空间为观测空间的思想. 陪集上的能观性后来由笔者等解决[60].

近世代数方面的标准教科书很多, 但适合工程人员或工科学生阅读的却不多. 文献 [20] 是一本较好的入门书, 里边有许多实际例子. 文献 [32] 只讲群, 也是不错的参考书. 文献 [80] 是这方面的经典著作. 手头有一本文献 [78] 或文献 [88] 备查是一个好主意.

用尺规三等分任意角, 给出五次方程公式解等这些问题, 如果作为中学生对它们有兴趣, 是情有可原的. 但如果是一些自诩为 "专家" 的人宣布解决了这种问题, 或替这些人作宣传, 那是一种无知.

7.8 习题

7.1 考虑 $\mathbb{R}^3$ 上的叉积 (也称向量积). 设 I、J、K 为三个坐标轴方向的单位向量, $X, Y \in \mathbb{R}^3$, $X = x_1I + x_2J + x_3K$, $Y = y_1I + y_2J + y_3K$, 那么根据中学数学, 其叉积定义为

$$X \times Y = \det \begin{bmatrix} I & J & K \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}.$$

$(\mathbb{R}^3, \times)$ 是否构成一个群? 半群? 证明你的结论.

7.2 考虑一个光滑 (即 C^∞) 非线性系统

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

设 $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 为一光滑坐标变换, 例如, $z = T(x)$. 在新坐标下有

$$\dot{z} = J_T f(T^{-1}(z)).$$

证明所有的坐标变换是作用在光滑系统集合上的群作用. 它的一条群轨道是什么意思?

7.3 记 $O(n, \mathbb{R})$ 为 $n \times n$ 正交矩阵集, $SO(n, \mathbb{R})$ 为其行列式值为 1 的子集. (1) 证明 $O(n, \mathbb{R})$ 在普通矩阵乘法下为一群, $SO(n, \mathbb{R})$ 为其子群; (2) $SO(n, \mathbb{R}) \lhd O(n, \mathbb{R})$; (3) 什么是商群 $O(n, \mathbb{R})/SO(n, \mathbb{R})$?

7.4 (1) 证明例 7.1.5 定义的坐标变换 $T \in GL(n,\mathbb{R})$ 及反馈 $(K,H) \in G$ 均为线性系统集 L 上的群作用; (2) 同时考虑坐标变换与反馈, 在集合

$$Q := \{T, K, H \,|\, T \in GL(n,\mathbb{R}); K \in M_{m\times n}; H \in GL(m,\mathbb{R})\}$$

上定义一个运算, 使它成为一个群, 并证明它是线性系统集 L 上的群作用.

7.5 在 $M_{m\times n}$ 上定义 Hadamard 积 $\circ$ 如下[120]: 设 $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $C = (c_{ij}) \in M_{m\times n}$ 且 $C = A \circ B$, 则 $c_{ij} = a_{ij} b_{ij}$, $\forall i, j$.

记 P 为 $n \times n$ 正定矩阵集, 即 $P = \{A \in M_{n\times n} \,|\, A > 0\}$. $(P, \circ)$ 是否构成群? 半群? (提示: 如果 $A \geqslant 0$, $B \geqslant 0$ (即为两半正定矩阵), 则 $\det(A \circ B) \geqslant \det(A)\det(B)$.)

7.6 设 $a \in G$ 为群 G 中任一元, 记 $\langle a\rangle = \{a^k \,|\, k \geqslant 1\}$. 证明: 如果存在 $k > 0$ 使得 $a^k = e$, 那么 $\langle a\rangle$ 同构于 $\mathbb{Z}_n$, 这里 n 是使 $a^k = e$ 的最小 $k > 0$. 否则, $\langle a\rangle$ 同构于 $\mathbb{Z}$.

7.7 证明 (1) $|S_n| = n!$; (2) $|A_n| = n!/2$; (3) $A_n \lhd S_n$.

7.8 证明命题 7.1.1.

7.9 设 $H < G$ 且 $h \in H$, 证明 $hH = Hh = H$.

7.10 证明命题 7.1.3.

7.11 设 σ_1 为 S_5 中一个五循环, σ_2 为 S_5 中一个对换, 则 $S_5 = (\sigma_1, \sigma_2)$. 试证之.

7.12 在一个环 R 中, 记 "0" 为加法单位元, 证明

$$0 \times r = r \times 0 = 0, \quad \forall r \in R.$$

7.13 证明以下集合为 $\mathbb{R}$ 的子环.

(1) $S_1 = \{a + \sqrt{3}b \,|\, a, b \in \mathbb{Z}\}$;

(2) $S_2 = \{a + 2^{1/3}b + 2^{2/3}c \,|\, a, b, c \in \mathbb{Z}\}$;

(3) $S_3 = \{a2^b \,|\, a, b \in \mathbb{Z}\}$.

7.14 分别记 S_n、K_n、U_n、D_n 为 $n \times n$ 对称、反对称、上三角、下三角矩阵集合, "+"、"×"、"∘" 分别为普通矩阵加法、普通矩阵乘法和 Hadamard 积. 问下列集合连同两个运算哪些构成环, 哪些不是?

(1) $(S_n, +, \times)$; (2) $(S_n, +, \circ)$; (3) $(K_n, +, \times)$; (4) $(K_n, +, \circ)$; (5) $(U_n, +, \times)$; (6) $(U_n, +, \circ)$; (7) $(D_n, +, \times)$; (8) $(D_n, +, \circ)$.

7.15 证明 Z_n 的任何一个理想都是主理想 (r). 如何找出生成元 r?

7.16 设 $h : K \to K$ 为一域同构, 定义 $\tilde{h} : K[x] \to K[x]$ 如下

$$\tilde{h}(a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n) := h(a_0) + h(a_1)x + \cdots + h(a_n)x^n.$$

证明这是一个环同构.

7.17 设 E 为 F 的代数扩张, 那么 E 的每个元都是 F 上的代数数.

7.18 考虑非线性控制系统

$$\Sigma : \dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^{m} g_i(x)u_i := f(x) + g(x)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m.$$

一个反馈等价变换指一个坐标变换 $z = \psi(x)$ 和一个反馈控制

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v,$$

这里 $\alpha(x)$ 为 $m \times 1$ 光滑函数向量, $\beta(x)$ 为 $m \times m$ 非奇异光滑函数矩阵. 使系统变为

$$\Sigma : \dot{z} = \tilde{f}(z) + \sum_{i=1}^{m} \tilde{g}_i(z)v_i := \tilde{f}(z) + \tilde{g}(z)v, \quad z \in \mathbb{R}^n, v \in \mathbb{R}^m.$$

因此, 一个反馈等价变换由 (ψ, α, β) 刻画.

(1) 在反馈等价变换集 $G = \{(\psi, \alpha, \beta)\}$ 上定义一个运算, 使得 G 成为一个群.

(2) 证明它是非线性系统集 Σ 上的群作用.

(3) 什么是通过 $\sigma \in \Sigma$ 的群轨道?



第 8 章 拓扑空间的代数特征

用代数的方法来刻画几何形体的特征, 即寻找形体在连续变化时不改变的那些代数变量, 这就是代数拓扑的方法. 本章介绍代数拓扑的一些基本理论和研究方法, 主要内容包括同伦与同调理论.

8.1 拓扑空间的同伦

从第 6 章知道, 拓扑学是研究几何形体在连续变化下不变的性质. 那么, 为什么几何形体能用代数的方法来刻画? 因为确实有一些与几何形体相关的代数结构 (例如, 本章将讨论到的同调群等) 在连续变化下是不变的. 我们先用一个经典的例子来说明.

例 8.1.1 考查图 8.1.1 中的多面体, 将一个多面体的面、棱及顶点的个数分别记作 n_s、n_e 和 n_v. 定义多面体的一个特征数

$$\chi(P) = n_s - n_e + n_v,$$

称它为欧拉特征数.

不难算出, 对四面体 (图 8.1.1 (a))、立方体 (图 8.1.1 (b)) 和三棱台 (图 8.1.1 (c)), 均有 $\chi(P) = 2$. 再考虑第二排的两个图, 一个是从三棱柱中挖去一个三棱台 (图 8.1.1 (d)), 另一个是从三棱柱中挖去一个小三棱柱 (图 8.1.1 (e)). 不难计算, 对它们俩, $\chi(P) = 0$. 实际上, 你可以再画许多实心的多面体, 你会发现, 它们均满足 $\chi(P) = 2$. 然后, 类似于第二排的两个图, 你从一个实心的多面体中挖通一个 "洞". 你会发现, 它们的欧拉特征数变为 $\chi(P) = 0$. □

从上面的例子可以看出, 欧拉特征数反映了多面体的某些性质, 例如, 有没有洞. 从这个意义上说, 四面体、立方体和三棱台都是 "等价" 的. 想象它们是用橡皮做的, 容易看出, 可以从其中的一个连续地变成另一个, 挖去一个三棱台的三棱柱和挖去一个小三棱柱的三棱柱也是 "等价" 的. 可见, 欧拉特征数是一个拓扑性质.

刻画两个拓扑空间的代数等价性是通过 "同伦" 这个概念来描述的, 我们从函数的同伦开始.

定义 8.1.1 设 X、Y 为两个拓扑空间, f、g 为两个从 X 到 Y 的映射, $I = [0,1]$ 为闭区间.

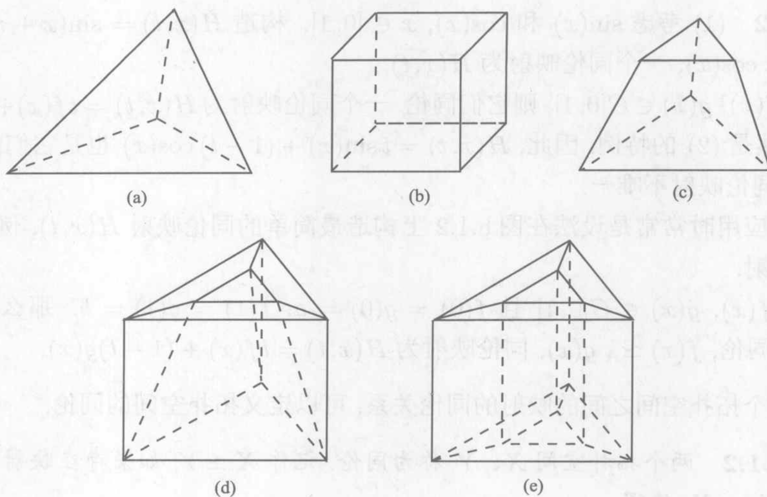


图 8.1.1 多面体的欧拉特征数

(1) f 和 g 称为同伦的, 记作 $f \simeq g$, 如果存在一个连续映射 $H : X \times I \to Y$, 称为 f 和 g 的同伦, 使得

$$\begin{cases} H(x,0) = f(x), \\ H(x,1) = g(x). \end{cases} \tag{8.1.1}$$

(2) 设 $A \subset X$. f 和 g 称为关于 A 的同伦, 记作 $f \simeq_A g$, 如果除式 (8.1.1) 外我们还有

$$H(x,t) = f(x) = g(x), \quad x \in A. \tag{8.1.2}$$

从图 8.1.2 可以看出, 两个函数同伦就是说一个函数可以连续地变为另外一个函数.

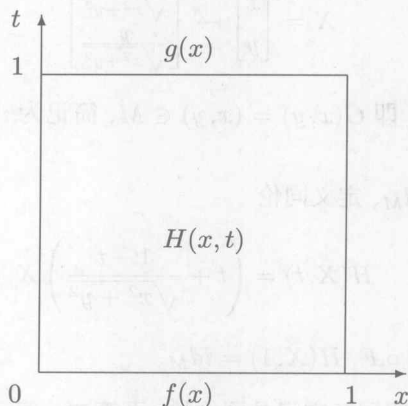


图 8.1.2 同伦 $f \simeq g$

例 8.1.2 (1) 考虑 $\sin(x)$ 和 $\cos(x)$, $x \in [0,1]$. 构造 $H(x,t) = \sin(x + \pi t/2)$, 则显然, $\sin(x) \simeq \cos(x)$, 一个同伦映射为 $H(x,t)$.

(2) 设 $f(x)$, $g(x) \in C[0,1]$, 则它们同伦. 一个同伦映射为 $H(x,t) = tf(x)+(1-t)g(x)$.

(1) 显然是 (2) 的特例, 因此, $H(x,t) = t\sin(x) + (1-t)\cos(x)$ 也是它们的一个同伦映射. 可见同伦映射不唯一.

在实际应用时常常是设法在图 8.1.2 上构造最简单的同伦映射 $H(x,t)$, 例如, 分片线性的同伦映射.

(3) 设 $f(x)$, $g(x) \in C[0,1]$ 且 $f(0) = g(0) = a$, $f(1) = g(1) = b$. 那么, 它们关于 $A = \{0,1\}$ 同伦, $f(x) \simeq_A g(x)$, 同伦映射为 $H(x,t) = tf(x) + (1-t)g(x)$. □

通过两个拓扑空间之间的映射的同伦关系, 可以定义拓扑空间的同伦.

定义 8.1.2 *两个拓扑空间 X、Y 称为同伦, 记作 $X \simeq Y$, 如果存在映射 $f: X \to Y$ 和映射 $g: Y \to X$, 使得*

$$g \circ f \simeq id_X; \quad f \circ g \simeq id_Y.$$

这里 id_X 和 id_Y 分别为 X 和 Y 上的恒等映射.

下面给出几个同伦空间的例子.

例 8.1.3 (1) 如果两个拓扑空间 X 与 Y 同胚, 则它们同伦. 因为同胚映射及其逆映射显然满足要求.

(2) $\mathbb{R}^2$ 与其原点 $O = \{(0,0)\}$ 同伦. 定义 $F: \mathbb{R}^2 \to O$ 为 $F(x,y) = (0,0)$, 定义 $G: O \to \mathbb{R}^2$ 为 $G: (0,0) \mapsto (0,0)$. 那么 $f := F \circ G: O \to O$ 为 $f(x,y) = (0,0)$, 则有 $f = id_O$, $g := G \circ F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, 则 $g(x,y) = (0,0)$. 构造 $H((x,y),t) = (1-t)(x,y)$, 则 $t = 0$, $H((x,y),0) = id_{\mathbb{R}^2}$; $t = 1$, $H((x,y),1) = g = F \circ G$, 即 $g = G \circ F \simeq id_{\mathbb{R}^2}$. 因此, $\mathbb{R}^2 \simeq O$.

(3) $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\} \simeq S^1$. 定义 $F: M \to N$ 为

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{bmatrix}.$$

$G: N \hookrightarrow M$ 为嵌入映射, 即 $G(x,y) = (x,y) \in M$, 简记为 inc_N. 因为 $F \circ inc_N = id_N$, 这个同伦是平凡的.

要证明 $inc_N \circ F \simeq id_M$, 定义同伦

$$H(X,t) = \left(t + \frac{1-t}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) X,$$

不难验证 $H(X,0) = inc_N \circ F$, $H(X,1) = id_M$. □

上面的第一个例子证明同胚空间是同伦的. 而第二、第三个例子说明, 不同胚的空间也可以同伦. 从第二个和第三个例子不难想象, 两个空间同伦指的是一个空间可见连续变到第二个空间.

定义 8.1.3　一个拓扑空间 X 称为可收缩的, 如果它同伦于一个单点.

例 8.1.4　(1) $\mathbb{R}^n$ 是可收缩的. 实际上, 例 8.1.3 中已经证明了 $\mathbb{R}^2$ 是可收缩的. 同样可证, $\mathbb{R}^n$ 是可收缩的.

(2) 一个星形集 $S \subset \mathbb{R}^n$ 是这样一个集合, 存在一个点 $c \in S$, 称为中心, 使得对每一点 $x \in S$ 线段 $[x, c] \in S$. 特别地, 一个凸集一定是一个星形集.

$\mathbb{R}^n$ 中的一个星形集是可收缩的. 定义 $e_c : S \to \{c\}$ 为 $e_c(x) = c$, $\forall x \in S$; 定义 $inc_c : \{c\} \to S$ 为 $inc_c(c) = c$. 则 $e_c(x) \circ inc_c = id_c$. 要证 $inc_c \circ e_c \simeq id_S$, 定义

$$H(x, t) = tc + (1 - t)x,$$

则 $H(x, 0) = id_S$, $H(x, 1) = inc_c \circ e_c$. □

直观地说, 如果两个映射同伦, 则一个映射可以连续地转化为另一个映射. 同样, 如果两个空间同伦, 则一个空间可以连续地变形为另一个空间. 如果一个空间是可收缩的, 它就可以连续地缩到一个点. 例如, $\mathbb{R}$ 可以连续地缩到一个点. 但是一个圆周不可能连续地缩到一个点. 如果你想让一个圆周缩到一个点, 那么至少要有一个点, 它的左边往左缩, 右边往右缩, 于是在这一点收缩映射就不连续了.

定义 8.1.4　设 X 为一拓扑空间, 且 $A \subset X$.

(1) 一个连续映射 $\pi : X \to A$ 称为以 A 为核的保核收缩, 如果 $\pi|_A = id_A$.

(2) 一个保核收缩 π 称为以 A 为收缩核的形变收缩, 如果 $\pi \simeq id_X$.

(3) 一个形变收缩称为强形变收缩, 如果存在同伦 $\pi \simeq id_X$ 的一个同伦映射 $H(x, t)$ 使得

$$H(x, t) = x, \quad \forall t, \forall x \in A.$$

例 8.1.5　(1) 设 $M = R_1 \cup R_2$, 这里

$$R_i = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leqslant x \leqslant 1; i - 1 \leqslant y \leqslant i - 0.5\}, \quad i = 1, 2,$$

并设 $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leqslant x \leqslant 1; y = 0\}$. 定义映射 $\pi : M \to A$ 为 $\pi : (x, y) \mapsto (x, 0)$, 则 π 为以 A 为核的保核收缩. 但它不可能是一个形变收缩, 否则存在 $\pi \simeq id_M$ 的同伦映射 $H(x, t)$, 使 $H(x, 0) = \pi(x)$, $H(x, 1) = id_M$. 现在取一点 $y = (y_1, y_2) \in R_2$, 定义 $\varphi(t) := H(y, t)$. 那么 $\varphi(t)$ 是 M 上的一个路径, 且 $\varphi(0) = x = (y_1, 0)$, $\varphi(1) = y$. 这显然是不可能的 (见图 8.1.3 (a)).

(2) 原点 $\{0\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 或圆盘 $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, \|x\| \leqslant 1\}$ 的强形变收缩核, 收缩映射为 $\pi(x) = 0$, 所要求的同伦映射为 $H(x, t) = tx + (1 - t) \times 0$ (见图 8.1.3 (b)).

(3) 圆是圆柱面的强形变收缩核 (见图 8.1.3 (c)).

(4) 设 $u \in T^2$ 为轮胎面上的一点, $M = T^2 \backslash \{u\}$. 那么, M 可强形变收缩到 “8”.

将圆环面展开, 见图 8.1.3 (d), 对 x 定义 $\pi(x)$ 为射线 $u - x$ 与边界的交点. 于是, $M \backslash \{u\}$ 强形变收缩到边界. 注意到边界实际上是上与下是粘合在一起的, 而两个端点也是黏合在一起的, 因此, 上下边实际上是一个圆周. 同理, 左右边也是一个圆周. 矩形的四个顶点是黏在一起的, 这就是两个圆周的相连点. 因此, 它是一个 “8” 字. □

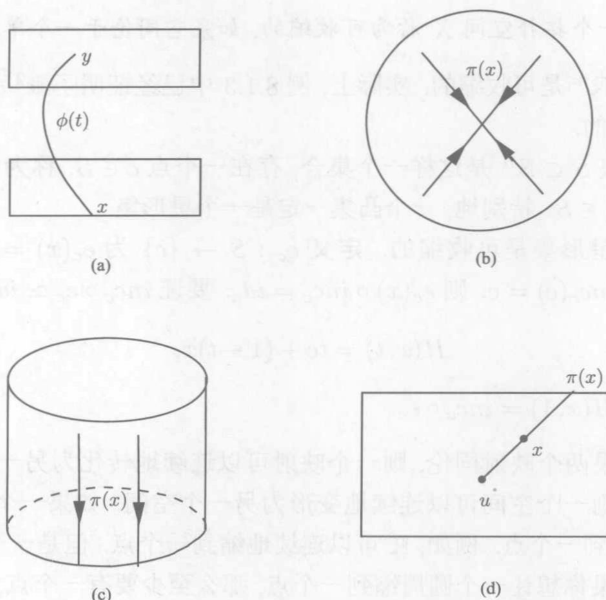


图 8.1.3 保核收缩与形变收缩

8.2 基本群

本节讨论拓扑空间的基本群.

考查拓扑空间特征的一种方法就是看它上面的圆环. 直观地说, 例如, 在 S^1 上一个圆环不可能缩成一点. 而在 $\mathbb{R}^2$ 上, 任一圆环均可缩为一点. 因此, 它们的拓扑结构不同. 这就是基本群的想法, 我们从考虑路径着手.

定义 8.2.1 设 f_1、f_2 为两路径, 称它们为等价的, 记作 $f_1 \sim f_2$, 如果它们关于两个端点同伦. 换言之, 它们不仅同伦而且两个端点相同, 即

$$f_1 \simeq_{(\{0\},\{1\})} f_2.$$

记等价类为 $[f]$.

例 8.2.1 设 $X = \mathbb{R}^2\backslash\{x_0\}$, 这里 $x_0 = (0.25, 0)^{\mathrm{T}}$. 考虑三个函数 $f_i : [0,1] \to X$, $i = 1,2,3$ 如下 (见图 8.2.1)

$$f_1 : \begin{cases} x = 2t, \\ y = \sin(\pi 2t); \end{cases} \quad f_2 : \begin{cases} x = 2t, \\ y = \sin(\pi t); \end{cases} \quad f_3 \begin{cases} x = 2t, \\ y = -\sin(\pi t). \end{cases}$$

那么 $f_1 \simeq f_2$, $f_1 \simeq f_3$. $f_1 \simeq f_2$ 是显然的, $f_1 \simeq f_3$ 是因为 f_3 一个端点 $(1,0)$ 可以顺时针绕过 x_0 回到原处. 但如果固定端点, 则 $f_1 \simeq_{(\{0\},\{1\})} f_2$, 但 $f_1 \not\simeq_{(\{0\},\{1\})} f_3$. 故 $f_1 \sim f_2$, $f_1 \not\sim f_3$. 同理, $f_2 \not\sim f_3$. □

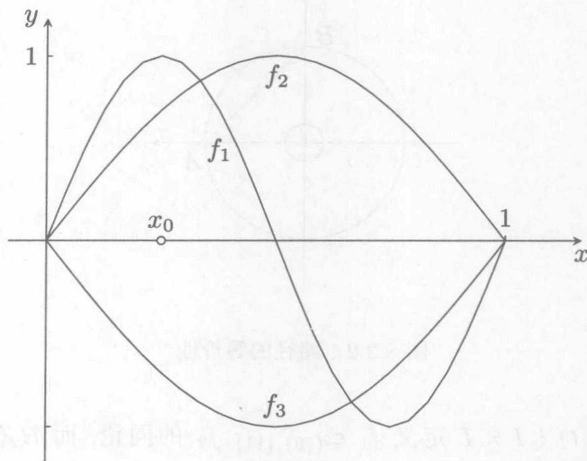


图 8.2.1 函数同伦

定义 8.2.2 如果 f、g 为 X 上的两个路径, $f(0)=x$, $f(1)=y$ 且 $g(0)=y$, $g(1)=z$, 那么这两个路径的乘积是一条从 x 到 z 的路径, 定义为

$$f\circ g=\begin{cases}f(2t), & 0\leqslant t\leqslant 1/2,\\ g(2t-1), & 1/2\leqslant t\leqslant 1.\end{cases}\tag{8.2.1}$$

直观地说, 根据式 (8.2.1) 所定义的乘法, 我们希望路径集构成一个群, 这个群的单位元是单点路径. 而一条路径的逆元则是它的反向路径. 不幸的是, 式 (8.2.1) 定义的乘法不满足结合律, 即 $(f\circ g)\circ h\neq f\circ(g\circ h)$.

实际上, 我们关心的是路径, 而不是它的表现形式. 例如, 在图 8.2.2 中, 我们考虑

$$\sigma_1:\begin{cases}x=1-t,\\ y=t, \quad t\in[0,1];\end{cases}\qquad \sigma_2:\begin{cases}x=\cos(\frac{\pi}{2}t),\\ y=1-\cos(\frac{\pi}{2}t), \quad t\in[0,1].\end{cases}$$

它们代表的是同一个从 A 到 B 的路径. 更一般地说, 假定我们考虑的是挖去一个洞的平面, 我们再定义两条从 A 到 B 的曲线

$$\sigma_3:\begin{cases}x=\cos(\frac{\pi}{2}t),\\ y=\sin(\frac{\pi}{2}t), \quad t\in[0,1];\end{cases}\qquad \sigma_4:\begin{cases}x=\cos(\frac{3\pi}{2}t),\\ y=-\sin(\frac{3\pi}{2}t), \quad t\in[0,1].\end{cases}$$

在研究平面形状时, σ_3 和 σ_1 也没什么不同, 因为 σ_3 可连续变到 σ_1. 但 σ_4 就不一样了, 它不能连续变到 σ_1. 它们之间围了一个洞, 因此我们要考虑路径的等价类, 设法在等价类上定义乘法.

引理 8.2.1 设 f_1、f_2、g_1、g_2 为 X 上的路径. 如果 $f_1\sim f_2$ 及 $g_1\sim g_2$, 且 $f_1(1)=g_1(0)$, 那么 $f_1\circ g_1\sim f_2\circ g_2$.

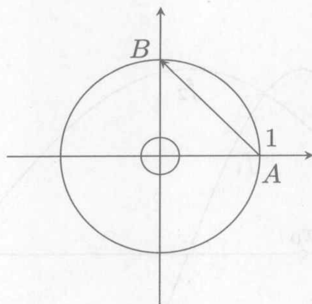


图 8.2.2　路径的等价性

证明　设 $H_1(s,t): I\times I$ 定义 $f_1 \simeq_{(\{0\},\{1\})} f_2$ 的同伦, 而 $H_2(s,t): I\times I$ 定义 $g_1 \simeq_{(\{0\},\{1\})} g_2$ 的同伦. 记

$$H(s,t)=\begin{cases} H_1(2s,t), & 0\leqslant s\leqslant 1/2,\\ H_2(2s-1,t), & 1/2\leqslant s\leqslant 1, \end{cases}$$

这个映射是连续的, 因为

$$H_1(1,t)=f_1(1)=g_1(0)=H_2(0,t).$$

由定义有

$$H(s,0)=f_1\circ g_1;\quad H(s,1)=f_2\circ g_2.$$

而且

$$\begin{cases} H(0,t)=H_1(0,t)=f_1(0)=f_2(0)=f_1\circ g_1(0)=f_2\circ g_2(0),\\ H(1,t)=H_2(1,t)=g_1(1)=g_2(1)=f_1\circ g_1(1)=f_2\circ g_2(1). \end{cases}$$

因此 $f_1\circ g_1 \sim f_2\circ g_2$. □

上述引理说明我们可以定义路径的等价类之间的乘法如下

$$[f][g]:=[f\circ g]. \tag{8.2.2}$$

定义 8.2.3　一个路径 f 称为一个环路, 如果 $f(0)=f(1)=x$. 点 x 称为基点.

下一步, 我们要证明根据式 (8.2.2) 定义的等价类乘法, 使环路的等价类形成一个群. 以下的三个引理分别证明这个群的结合律、单位元和逆元.

引理 8.2.2　设 $\alpha(s)$、$\beta(s)$ 和 $\gamma(s)$ 为依次头尾相接的三个路径, 即 $\alpha(1)=\beta(0)$ 及 $\beta(1)=\gamma(0)$, 那么 $([\alpha][\beta])[\gamma]=[\alpha]([\beta][\gamma])$.

证明　我们只需证明 $(\alpha\circ\beta)\circ\gamma \simeq_{(\{0\},\{1\})} \alpha\circ(\beta\circ\gamma)$. 根据定义, 有

$$(\alpha\circ\beta)\circ\gamma(s)=\begin{cases}\alpha(4s), & 0\leqslant s\leqslant 1/4,\\ \beta(4s-1), & 1/4\leqslant s\leqslant 1/2,\\ \gamma(2s-1), & 1/2\leqslant s\leqslant 1,\end{cases}$$

且

$$\alpha\circ(\beta\circ\gamma)(s)=\begin{cases}\alpha(2s), & 0\leqslant s\leqslant 1/2,\\ \beta(4s-2), & 1/2\leqslant s\leqslant 3/4,\\ \gamma(4s-3), & 3/4\leqslant s\leqslant 1.\end{cases}$$

定义两路径的同伦为

$$H(s,t)=\begin{cases}\alpha(\frac{4s}{1+t}), & 4s-1\leqslant t\leqslant 1,\\ \beta(4s-t-1), & 4s-2\leqslant t\leqslant 4s-1,\\ \gamma(\frac{4s-t-2}{2-t}), & 0\leqslant t\leqslant 4s-2.\end{cases}$$

H 的构造是让按水平宽度线性缩放而得 (见图 8.2.3). 请读者自行检验 $H(s,t)$ 是连续的且固定两个端点 (对 $t=0$ 及 $t=1$). □

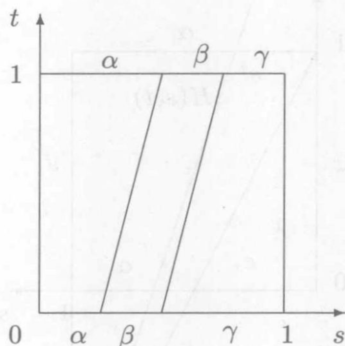


图 8.2.3　同伦 $(\alpha\circ\beta)\circ\gamma \simeq_{(\{0\},\{1\})} \alpha\circ(\beta\circ\gamma)$

为方便起见, 记 e_x 为基点为 x 的单点路径, 即 $e_x(t)=x,\ \forall t\in[0,1]$.

引理 8.2.3　设 $\alpha(s)$ 为一路径, $\alpha(0)=x$ 且 $\alpha(1)=y$, 那么

$$[e_x][\alpha]=[\alpha]=[\alpha][e_y].$$

证明　我们证明第一个等式, 第二个等式可类似地证明. 为此, 只要证 $e_x\circ\alpha\simeq_{(\{0\},\{1\})}\alpha$ 即可. □

构造一个同伦如下

$$H(s,t)=\begin{cases}x, & 0\leqslant t\leqslant 1-2s,\\ \alpha(\frac{2s+t-1}{t+1}), & 1-2s\leqslant t\leqslant 1.\end{cases}$$

那么

$$H(s,0)=\begin{cases}x, & s\leqslant 1/2,\\ \alpha(2s-1), & s\geqslant 1/2.\end{cases}$$

依定义, 这是乘积 $e_x\circ\alpha$. 同时, $H(s,1)=\alpha(s)$, 并且, $H(0,t)=x$; $H(1,t)=\alpha(1)=y$. 因此 $e_x\circ\alpha\sim\alpha$.

当同伦构造出来后这类问题的证明就很简单了. 因此关键是怎么构造同伦. 我们以上面的证明为例作一点解释. 参见图 8.2.4, 对于正方形, 在 $t=0$ 我们需要两段: 前一半是 e_x 而后一半是 $\alpha(s)$. 而在 $t=1$ 我们只需 α. 在左边, $s=0$, 它是 x; 而在右边 $s=1$, 我们需要 y. 建立 H 的一个方法是将正方形分为两部分: $t\leqslant 1-2s$ 和 $t\geqslant 1-2s$. 在左半边区域设 $H=x$, 在右边梯形内的任意一点 (s,t), 设 $H(s,t)=H(s^*,1)$, 这里 $s^*=\dfrac{2s+t-1}{t+1}$. 这样我们就得到了所要求的 H. 同伦映射只要求连续, 因此, 一般依线性伸缩的办法来构造.

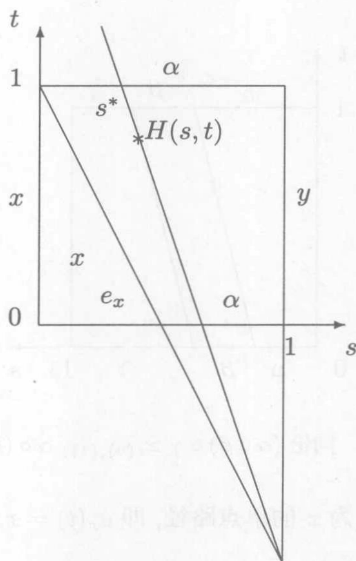


图 8.2.4 与恒等路径积的同伦

最后考虑逆. $\alpha(t)$ 的逆 $\alpha^{-1}(t)$ 可以简单地定义为 $\alpha^{-1}(t)=\alpha(1-t)$. 显然当 α 从 x 走到 y, α^{-1} 从 y 走到 x. 它们必须满足以下引理.

引理 8.2.4 设 α 为一路径, $\alpha(0)=x$ 且 $\alpha(1)=y$. 那么 $[\alpha][\alpha^{-1}]=[e_x]$ 且 $[\alpha^{-1}][\alpha]=[e_y]$.

证明 我们证 $\alpha\circ\alpha^{-1}\sim e_x$: 利用图 8.2.5, 设 $H(s,t)=H(s^*,0)$ $(s<t)$, 则得同伦

$$H(s,t)=\begin{cases}x, & 0\leqslant s\leqslant t,\\ \alpha\left(\frac{2(s-t)}{1-t}\right), & t<s\geqslant\frac{t+1}{2},\\ \alpha\left(\frac{2(1-s)}{1-t}\right), & \frac{t+1}{2}<s\leqslant 1.\end{cases}$$

同样, 我们可以证明 $\alpha^{-1}\circ\alpha\sim e_y$. □

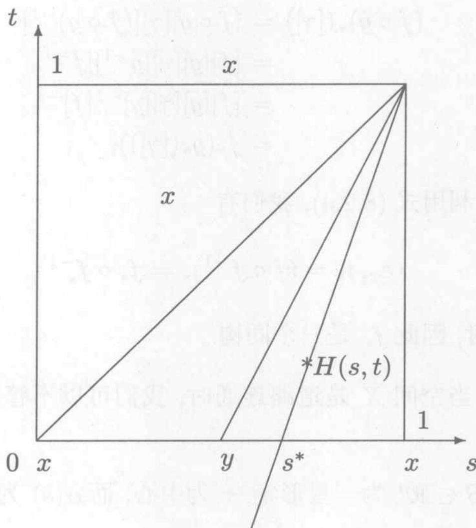


图 8.2.5 路径 α 及 α^{-1}

由引理 8.2.2~引理 8.2.4 可得到完整的群结构. 因此我们有以下定理.

定理 8.2.1 设 $x\in X$. 记以 x 为基点的所有环路的等价类为 $\Omega(X,x)$. 利用由式 (8.2.1) 和式 (8.2.2) 定义的乘法, 则 $\Omega(X,x)$ 为一个群, 它称为基于 x 的基本群, 记作 $\pi_1(X,x)$.

下面的定理指出当空间 X 是道路连通时, 基本群不依赖于基点.

定理 8.2.2 设 X 为一道路连通的空间, $x_1,x_2\in X$, 那么

$$\pi_1(X,x_1)\cong\pi_2(X,x_2).$$

证明 设 $f(s)$ 为一路径 $f(0)=x_1$ 且 $f(1)=x_2$, 而 $\alpha(s)$ 为一基点为 x_2 的环路. 那么 $f\circ\alpha\circ f^{-1}$ 是一基点为 x_1 的环路. 现在我们定义一个映射 $f_*:\pi_1(X,x_2)\to\pi_1(X,x_1)$ 如下

$$f_*:[\alpha]\mapsto[f][\alpha][f^{-1}]. \tag{8.2.3}$$

只要证明 f_* 是一个群同构即可. 因为

$$\begin{aligned} f_*([\alpha][\beta]) &= [f][\alpha][\beta][f] \\ &= [f][\alpha][f^{-1}][f][\beta][f^{-1}] \\ &= f_*([\alpha])f_*([\beta]), \end{aligned}$$

则 f_* 为一同态. 现在设 g 为第一个连接 x_2 到 x_3 的路径, 且 $[\gamma] \in \pi_1(X, x_3)$. 我们证明

$$(f \circ g)_*([\gamma]) = f_*(g_*([\gamma])). \tag{8.2.4}$$

事实上

$$\begin{aligned} (f \circ g)_*([\gamma]) &= [f \circ g][\gamma][(f \circ g)^{-1}] \\ &= [f][g][\gamma][g^{-1}][f^{-1}] \\ &= [f][g][\gamma][g]^{-1}[f]^{-1} \\ &= f_*(g_*([\gamma])), \end{aligned}$$

这就证明了式 (8.2.4). 利用式 (8.2.4), 我们有

$$(e_{x_1})_* = (f \circ f^{-1})_* = f_* \circ f_*^{-1}.$$

但是 $(e_{x_1})_*$ 是单位映射, 因此 f_* 是一个同构. □

根据以上的定理, 当空间 X 是道路连通时, 我们可以不管基点而将基本群 $\pi_1(X, x)$ 简单记作 $\pi_1(X)$.

例 8.2.2 (1) 设 $S \subset \mathbb{R}^n$ 为一星形集, x 为中心, 而 $\alpha(s)$ 为以 x 为基点的环路. 定义同伦

$$H(s, t) = t\alpha(s) + (1 - t)x.$$

显然 $\alpha \sim e_x$. 并且, 因为 S 是道路连通的, 基本群与基点无关. 因此

$$\pi_1(S) = \{e\},$$

这个群称为平凡群.

对一个道路连通的拓扑空间, 如果它的基本群是平凡群则称其为简单连通空间.

(2) 设 $X = S^1$. 直观地, 我们可以想象它的基本群为 $\pi_1(S^1) \cong Z$, 这里 Z 是整数的加法群. 实际上, 一个路径绕圆周 n 次对应 $n \in Z$. 当路径反向绕圆周走时, 则有 $n < 0$. 这里略去过细的讨论. □

例 8.2.3 设 X、Y 为两个拓扑空间, $f: X \to Y$ 为连续映射, 且 $f(x) = y$. 定义映射 $f_*: \pi_1(X, x) \to \pi_1(Y, y)$ 为

$$f_*([\alpha]) = [f \circ \alpha], \tag{8.2.5}$$

它是一个群同态.

首先, 我们证明式 (8.2.5) 的合理性. 设有 $\alpha \sim \beta$, 于是有一个同伦 $h(s,t)$ 使得

$$h(s,0)=\alpha(s); \quad h(s,1)=\beta(s),$$

那么

$$f\circ h(s,0)=f\circ\alpha(s); \quad f\circ h(s,1)=f\circ\beta(s).$$

这说明 $f\circ\alpha(s)\sim f\circ\beta(s)$. 因此 f_* 的定义是合理的. 其次

$$\begin{aligned} f_*([\alpha][\beta]) = f_*([\alpha\circ\beta]) &= [f\circ(\alpha\circ\beta)] \\ &= [(f\circ\alpha)\circ(f\circ\beta)] = [f\circ\alpha][f\circ\beta] \\ &= f_*[\alpha]f_*[\beta]. \end{aligned}$$

因此, f_* 是一个群同态. □

粗略地说, 乘积空间的基本群是因子空间的基本群的乘积.

命题 8.2.1 设 X、Y 为两个道路连通的拓扑空间, 那么

$$\pi_1(X\times Y)\cong\pi_1(X)\times\pi_1(Y). \tag{8.2.6}$$

证明 设 $x_0\in X$ 及 $y_0\in Y$, 而 $p:X\times Y\to X$ 及 $q:X\times Y\to Y$ 为自然投影. 设 $\alpha(s)=(x(s),y(s))$ 为乘积空间基于 (x_0,y_0) 的一个环路. 那么 $p_*:\pi_1(X\times Y)\to\pi_1(X)$ 是一个同态, 而且 $p_*([\alpha])=[x(s)]$. 同样, $q_*:\pi_1(X\times Y)\to\pi_1(Y)$ 也是一个同态, 而且 $q_*([\alpha])=[y(s)]$.

我们要证明: $(p_*\times q_*):\pi_1(X\times Y)\to\pi_1(X)\times\pi_1(Y)$ 是一个同构. 对每一对 $[x(s)]\times[y(s)]\in\pi_1(X)\times\pi_1(Y)$, 我们可以构造 $[x(s),y(s)]\in\pi_1(X\times Y)$, 使得

$$(p_*\times q_*)([x(s)\times y(s)])=[x(s)]\times[y(s)]\in\pi_1(X)\times\pi_1(Y),$$

因此 $p_*\times q_*$ 是映上的.

要证明它也是一对一的, 设 $\alpha_i=(x_i(s),y_i(s))$, $i=1,2$ 使得

$$(p_*\times q_*)([\alpha_1])=(p_*\times q_*)([\alpha_2]),$$

那么 $[x_1]=[x_2]$ 且 $[y_1]=[y_2]$, 即

$$x_1(s)\sim x_2(s), \quad y_1(s)\sim y_2(s).$$

设它们间的同伦映射分别为 $h_1(s,t)$ 及 $h_2(s,t)$, 那么我们可以构造

$$H(s,t)=(h_1(s,t),h_2(s,t)).$$

容易检验这是 α_1 与 α_2 间的一个同伦, 即 $[\alpha_1]=[\alpha_2]$. 因此 $p_*\times q_*$ 是一对一的. □

例 8.2.4　考虑一个轮胎, 记作 T^2. $T^2 \cong S^1 \times S^1$ (更一般地 $T^k \cong \underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_{k}$).

根据上述命题有

$$\pi_1(T^2) \cong \pi_1(S^1) \times \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^2.$$

□

下面, 我们将证明一个重要事实, 即基本群同伦不变. 我们需要一些准备.

引理 8.2.5　设 g、f 为 X 到 Y 的两个同伦的连续映射, $H(x,t)$ 为 g 到 f 的同伦. 对于 $x_0 \in X$, 定义一路径

$$\omega = H(x_0, s), \quad s \in I = [0,1],$$

那么图 8.2.6 是可交换的, 即 $\omega_* \circ f_* = g_*$.

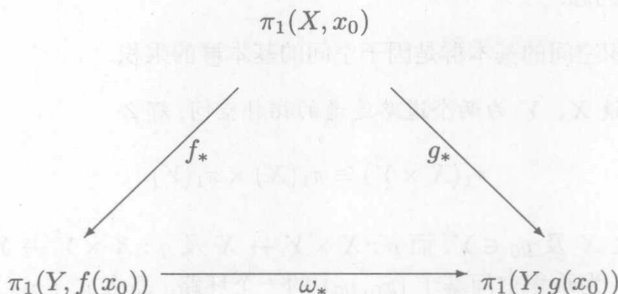


图 8.2.6　ω_* 同构

证明　注意 f_*、g_* 的定义不同于 ω_*, 它们的意义是不一样的. f_* 或 g_* 是作为空间之间的映射导出的不同空间的基本群的群同态 (见例 8.2.3), 而 ω_* 是路径导出的同一空间的基本群的群同构 (见定理 8.2.2 的证明). 图 8.2.7 是相应的示意图. $f_*(\alpha)$ 是 $f \circ \alpha$ 的等价类, 它是 Y 上以 $f(x_0)$ 为基点的一个环路. $\omega_*(f \circ \alpha) = \omega(f \circ \alpha)\omega^{-1}$ 是将环路 $f \circ \alpha$ 转化为 $g(x_0)$ 处的一个环路, 做法是先用 ω^{-1} 将轨线从 $g(x_0)$ 移到 $f(x_0)$, 然后沿 $f \circ \alpha$ 转一圈, 再沿 ω 回到 $g(x_0)$.

设 $[\alpha] \in \pi_1(X, x)$. 我们必须证明

$$g \circ \alpha \simeq_{(\{0\},\{1\})} \omega \circ (f \circ \alpha) \circ \omega^{-1}. \tag{8.2.7}$$

我们的目的是构造一个同伦使得图 8.2.9 成立. 那么怎样构造这个同伦呢? 我们定义

$$h_t(x) := H(x,t),$$

那么 $h_t(x) \circ \alpha$ 是 $h_t(x_0)$ 处的一个环路 (图 8.2.8). 同时, 显然有

$$h_0(x) \circ \alpha = f \circ \alpha; \quad h_1(x) \circ \alpha = g \circ \alpha.$$

令 $\omega_t := \omega|_{[0,t]}$, $t \leqslant 1$, 那么

$$\omega_t(h_t \circ \alpha)\omega_t^{-1}, \quad t \in [0,1] \tag{8.2.8}$$

就连续地将 $f \circ \alpha$ 变为 $\omega(g \circ \alpha)\omega^{-1}$.

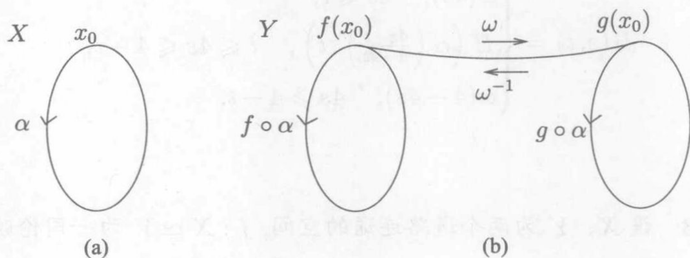


图 8.2.7　f_*, g_* 与 ω_*

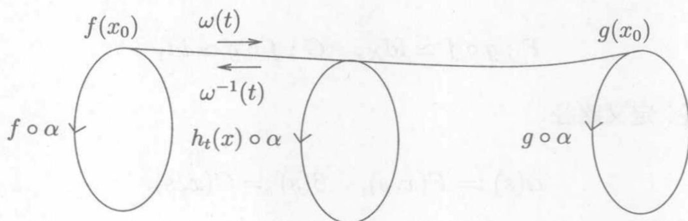


图 8.2.8　同伦的构造

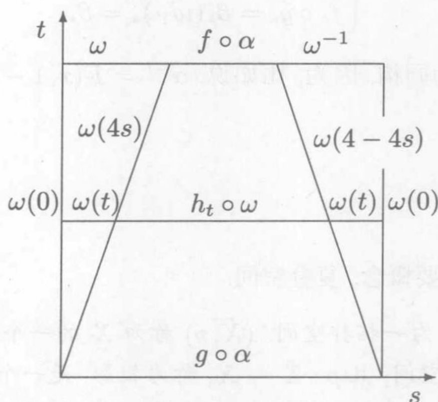


图 8.2.9　两个映射与路径的同伦

基于上述讨论, 针对图 8.2.9, 在两条边: $t = 4s$ 及 $t = 4(1-s)$ 上, 我们需要 $\omega(t)$. 那么容易看出在左右两个三角形区域我们可以分别用 $\omega(4s)$ 及 $\omega(4-4s)$, 在中间梯形区域, 我们只要将图 8.2.7 (a) 用如下变形即可

$$r = \frac{4s-t}{4-2t}.$$

因为这样对梯形左边 $s = t/4$ 故 $r = 0$; 右边 $s = 1 - t/4$ 故 $r = 1$. 因此, 图 8.2.9 中过 t 的水平线就代表了式 (8.2.8).

归纳起来, 我们就得到以下的同伦

$$\tilde{H}(s,t) = \begin{cases} \omega(4s), & 4s \leqslant t, \\ H\left(\alpha\left(\frac{4s-t}{4-2t}\right), t\right), & t \leqslant 4s \leqslant 4-t, \\ \omega(4-4s), & 4s \geqslant 4-t. \end{cases} \tag{8.2.9}$$

□

定理 8.2.3　设 X、Y 为两个道路连通的空间, $f: X \simeq Y$ 为一同伦映射, 那么

$$f_*: \pi_1(X) \cong \pi_1(Y).$$

证明　设 $x \in X$ 及 $y = f(x) \in Y$, 而 $g: Y \to X$ 为 f 的同伦. 记

$$F: g \circ f \simeq id_X, \quad G: f \circ g \simeq id_Y$$

为其相应的同伦. 定义路径

$$\alpha(s) := F(x,s), \quad \beta(s) := G(x,s).$$

利用引理 8.2.5, 可得

$$\begin{cases} g_* \circ f_* = \alpha_*(id_X)_* = \alpha_*, \\ f_* \circ g_* = \beta_*(id_Y)_* = \beta_*. \end{cases}$$

注意 α_* 及 β_* 均为同构, 因为, 比如说, $\alpha^{-1} = F(x, 1-s)$, 则 $\alpha_*\alpha_*^{-1} = (id)_*$. 因此 f_* 和 g_* 均为同构. □

8.3　复叠空间*

本节介绍另一个重要概念: 复叠空间.

定义 8.3.1　设 X 为一拓扑空间. $(\tilde{X}, p)$ 称为 X 的一个复叠空间, 如果

(1) $\tilde{X}$ 是一个拓扑空间, 且 $p: \tilde{X} \to X$, 称为投影, 是一个连续映上的映射;

(2) 对每一点 $x \in X$, 存在一个邻域 U, 称为一个基本邻域, 使得 $p^{-1}(U)$ 由不相交的开集族 $\{V_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ 构成, 而且对每一个 λ, $p: V_\lambda \to U$ 是一个同胚;

(3) Λ 的个数 (即 "势") $|\Lambda|$ 称为 $\tilde{X}$ 的重数.

命题 8.3.1　设 $(\tilde{X}, p)$ 为 X 的一个复叠空间, 且 $f: I \to X$ 是一条路径, 起点为 $f(0) = x_0$. 假定有一点 $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$, 那么存在唯一的道路 $\tilde{f}: I \to \tilde{X}$, 使得 $\tilde{f}(0) = \tilde{x}_0$ 且

$$p \circ \tilde{f} = f.$$

证明 如果 $f(I)$ 包含在一个基本邻域里, 结论显见. 否则, 令 $\{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ 为一个由基本邻域构成的 X 的覆盖, 那么 $\{f^{-1}(U_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda\}$ 是 I 的一个开覆盖. 设 n 足够大使得 $\frac{1}{n}$ 小于覆盖勒贝格数, 令 $I_i = [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}], i = 1, 2, \cdots, n$, 那么每一个 $f(I_i)$ 包含在一个基本邻域里. 由 $i = 1$ 开始, 容易看出每一个 $f(I_i)$ 具有唯一的提升, 它的起点即前一个路径的终点. □

从前面的证明可以看出, I 可以用任何有穷维赋范空间的紧集来代替. 因此立即可得到下面的命题.

命题 8.3.2 设 $(\tilde{X}, p)$ 为 X 的复叠空间, 并且 $f: I \times I \to X$ 为一路径同伦, $f(0,0) = x_0$, $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$. 那么存在唯一的路径同伦 $g: I \times I \to \tilde{X}$, $g(0,0) = \tilde{x}_0$, 使得 $pg = f$.

命题 8.3.3 设 $(\tilde{X}, p)$ 为 X 的复叠空间, $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$, 那么 $p_*: \pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to \pi(X, x_0)$ 是一个一对一的同态.

证明 回顾关于同态的例 8.2.3, 我们只要证明它是一对一的.

设 $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$ 为两个以 $\tilde{x}_0$ 为基点的环路, $p_*([\tilde{\alpha}]) = p_*([\tilde{\beta}])$, 且记 $\alpha = p \circ \tilde{\alpha}$ 及 $\beta = p \circ \tilde{\beta}$. 那么 $\alpha \sim \beta$, 假定其同伦映射为 $h(s,t)$, 即

$$h(s,0) = \alpha(s), \quad h(s,1) = \beta(s), \quad h(0,t) = x_0.$$

由命题 8.3.1, 存在唯一的 $\tilde{h}(s,t)$ 使得

$$\tilde{h}(0,0) = \tilde{x}_0, \quad p \circ \tilde{h} = h.$$

因为 $p \circ \tilde{h}(s,0) = \alpha$, 由唯一性, 有

$$\tilde{h}(s,0) = \tilde{\alpha}(s).$$

类似地

$$\tilde{h}(s,1) = \tilde{\beta}(s).$$

于是可得

$$\tilde{\alpha}(s) \sim \tilde{\beta}(s),$$

即

$$[\tilde{\alpha}(s)] = [\tilde{\beta}(s)].$$

□

直观地说, 复叠空间将原空间扩大但简化了其拓扑结构, 这是上述命题的意义所在. 下面的定理指出提升的路径在不同基点形成同样的群.

定理 8.3.1 设 $(\tilde{X},p)$ 为 X 的复叠空间, 则

$$\left\{p_*\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0)\,\middle|\,\tilde{x}_0\in p^{-1}(x_0)\right\}$$

是 $\pi_1(X,x_0)$ 的一族共轭群.

证明 设 $p(\tilde{x}_1)=p(\tilde{x}_2)=x_0$, γ 为连接 $\tilde{x}_1$ 到 $\tilde{x}_2$ 的一个路径, 那么

$$p_*([\gamma])=[p\circ\gamma]\in\pi_1(X,x_0).$$

定义一个同构 $u:\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_1)\to\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_2)$ 如下

$$u([\alpha])=[\gamma]^{-1}[\alpha][\gamma]$$

及一个同构 $v:\pi_1(X,x_0)\to\pi_1(X,x_0)$ 如下

$$v([\beta])=(p_*[\gamma])^{-1}[\beta](p_*[\gamma]).$$

容易证明图 8.3.1 是可交换的, 即

$$p_*\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_2)=[p\circ\gamma]^{-1}[p_*\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_1)][p\circ\gamma].$$

□

$$\begin{array}{ccc}\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_1) & \xrightarrow{p_*} & \pi_1(X,x_0)\\ \downarrow u & & \downarrow v\\ \pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_2) & \xrightarrow{p_*} & \pi_1(X,x_0)\end{array}$$

图 8.3.1 道路同伦

最后我们给出一个复叠空间的存在性定理 (其证明参考文献 [94]). 我们需要一个新的概念: 一个拓扑空间 X 称为半局部单连通的, 如果每一点 $x\in X$ 都有一个简单连通的邻域.

定理 8.3.2 设 X 为一拓扑空间. 满足①道路连通; ②局部连通; ③半局部单连通. 那么它有一个复叠空间, 称为泛复叠空间 $(\tilde{X},p)$, 满足

(1) 如果 $(\tilde{X}_1,p_1)$ 及 $(\tilde{X}_2,p_2)$ 为两个泛复叠空间, 那么 $\tilde{X}_1$ 与 $\tilde{X}_2$ 同胚, 而且同胚映射 f 使得图 8.3.2 (a) 和 (b) 可交换.

(2) 如果 $(\tilde{X},p)$ 是 X 的泛复叠空间, 而 (Y,q) 是一个复叠空间, 那么存在一个映射 $\pi:\tilde{X}\to Y$, 使得 $(\tilde{X},\pi)$ 是 Y 的一个复叠空间, 并且图 8.3.3 可交换.

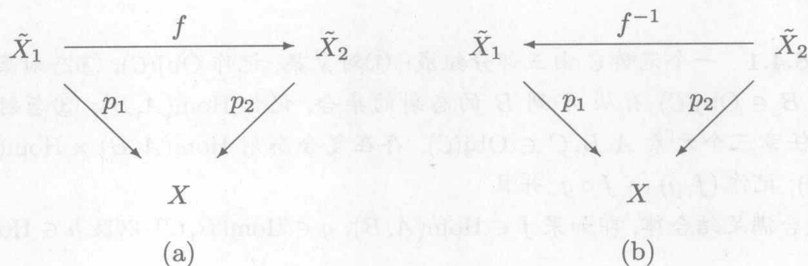


图 8.3.2 泛复叠空间

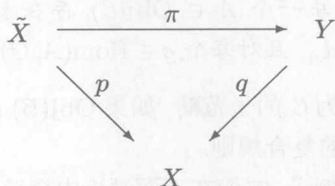


图 8.3.3 复叠空间与泛复叠空间

例 8.3.1 设 $p:\mathbb{R}\to S^1$ 定义为 $p:t\mapsto(\cos(2\pi t),\sin(2\pi t))$, 如图 8.3.4 所示. 选任一点 $x_0\in S^1$, 例如 $x_0=(1,0)$. 考虑邻域 $U=\overset{\frown}{Px_0Q}$, 它是右半圆周. 这是一个基本邻域, 因为 $p^{-1}(U)=\left\{V_k=(k-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})\,\middle|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$. 现在其限制 $p:V_k\to U$ 是一个同胚. 因此 p 是一个投影. 因此可得结论: $(\mathbb{R},p)$ 是 S^1 的一个复叠空间, 重数是 $\aleph_0$ (即可数).

因为 $\pi(\mathbb{R})=\{0\}$ 且 $\pi(S^1)\cong\mathbb{Z}$, 导出的同态 p_* 是 $p_*\pi(\mathbb{R})=\{0\}<\mathbb{Z}$. □

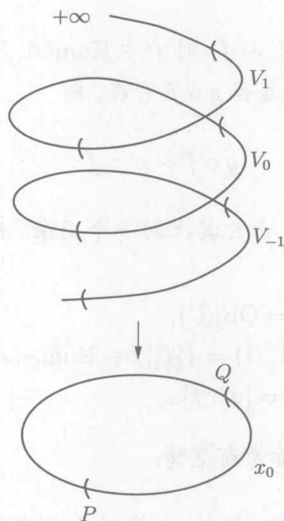


图 8.3.4 $\mathbb{R}$ 是 S^1 的复叠空间

8.4　范畴与函子*

定义 8.4.1　一个范畴 $\mathcal{C}$ 由三部分组成: ①对象集, 记作 $\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$; ②态射集, 对每个有序对 $A,B\in\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ 有从 A 到 B 的态射的集合, 记作 $\mathrm{Hom}(A,B)$; ③态射复合, 对对象集的任意三个元素 $A,B,C\in\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, 存在复合态射 $\mathrm{Hom}(A,B)\times\mathrm{Hom}(B,C)\to\mathrm{Hom}(A,C)$, 记作 $(f,g)\mapsto f\circ g$, 并且

(1) 复合满足结合律, 即如果 $f\in\mathrm{Hom}(A,B)$, $g\in\mathrm{Hom}(B,C)$ 以及 $h\in\mathrm{Hom}(C,D)$, 则

$$h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f.$$

(2) 存在恒等态射, 即对每一个 $A\in\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ 存在 $id_A\in\mathrm{Hom}(A,A)$, 使对每个 $f\in\mathrm{Hom}(B,A)$ 成立 $f=f\circ id_A$, 且对每个 $g\in\mathrm{Hom}(A,C)$ 成立 $g=id_A\circ g$.

如果 $\mathcal{C}$ 是一个范畴, $\mathcal{B}$ 称为 $\mathcal{C}$ 的子范畴, 如果 $\mathrm{Obj}(\mathcal{B})\subset\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ 并且 $\mathcal{B}$ 具有与原范畴 $\mathcal{C}$ 相同的态射 Hom 及态射的复合规则.

我们给出一些重要的实际例子, 它们在下面讨论中会经常碰到.

例 8.4.1　(1) 范畴 $\mathcal{C}=\mathbf{Top}$. 这里 $\mathrm{Obj}(\mathbf{Top})$ 是所有的拓扑空间; $\mathrm{Hom}(A,B)$ 是从拓扑空间 A 到拓扑空间 B 的连续映射集合; 复合规则为普通映射的复合.

(2) 范畴 $\mathcal{C}=\mathbf{Gp}$. 这里 $\mathrm{Obj}(\mathbf{Gp})$ 是所有的群; $\mathrm{Hom}(A,B)$ 是从群 A 到群 B 的同态映射; 复合规则为普通映射的复合.

(3) 范畴 $\mathcal{C}=\mathbf{Ab}$. 这里 $\mathrm{Obj}(\mathbf{Ab})$ 是所有的阿贝尔群集合; $\mathrm{Hom}(A,B)$ 是从群 A 到群 B 的同态映射; 复合规则为普通映射的复合. 那么, $\mathbf{Ab}$ 是 $\mathbf{Gp}$ 的子范畴. □

定义 8.4.2　范畴 $\mathcal{C}$ 的一个同余是 $\mathcal{C}$ 上所有态射 $\cup_{(A,B)}\mathrm{Hom}(A,B)$ 上的一个等价关系 $\sim$, 满足

(1) 如果 $f\in\mathrm{Hom}(A,B)$ 且 $f'\sim f$, 则 $f'\in\mathrm{Hom}(A,B)$;

(2) 如果 $f\sim f'$, $g\sim g'$, 并且复合 $g\circ f$ 存在, 则

$$g\circ f\sim g'\circ f'.$$

定理 8.4.1　设 $\mathcal{C}$ 为一范畴, $\sim$ 为其上的一个同余. 用 $[f]$ 表示态射 f 的等价类. 定义 $\mathcal{S}$ 如下

$$\begin{aligned}&\mathrm{Obj}(\mathcal{S})=\mathrm{Obj}(\mathcal{C}),\\&\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(A,B)=\{[f]|f\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)\},\\&[g]\circ[f]=[g\circ f],\end{aligned}$$

于是 $\mathcal{S}$ 也是一个范畴, 这个范畴称为商范畴.

证明　由同余定义第一条可知, 等价 $\sim$ 将 $\mathcal{C}$ 上的态射 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$ 作一个分割, 即等价类不相交. 故等价类是定义好的, 即, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(A,B)$ 是定义好的集合. 再由定义的第二条可知, $\mathcal{S}$ 上的态射复合也是定义好的, 并且 $[id_A]$ 是 A 上的恒等态射. □

例 8.4.2 考虑线性系统

$$\Sigma: \quad \dot{x} = Ax + Bu, \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m. \tag{8.4.1}$$

(1) 设 $\mathcal{L}$ 定义如下: 对象集 $\mathrm{Obj}(\mathcal{L}) = \{\Sigma\}$ 只含单个系统的所有反馈等价形式; 态射集 $H(\Sigma, \Sigma)$ 为所有的反馈等价变换, 它由 (T, K, J) 组成, 这里, $T \in GL(n, \mathbb{R})$ 是线性坐标变换, $J \in GL(m, \mathbb{R})$ 为输入变换, $K \in M_{m\times n}$ 为反馈. 态射为

$$(T, K, J)(A, B) = (T^{-1}AT + T^{-1}BKT, T^{-1}BJ);$$

复合规则为

$$(T_1, K_1, J_1) \circ (T_2, K_2, J_2) = (T_1T_2, K_1 + J_1K_2T_1^{-1}, J_1J_2).$$

从而 $\mathcal{L}$ 为一个范畴.

(2) 设 $\mathcal{C}$ 与 $\mathcal{L}$ 对象集相同, 态射集 $H_c(\Sigma, \Sigma) \subset H(\Sigma, \Sigma)$ 为保持能控子空间 V 形式不变的反馈等价变换 (即 $TV \subset V$, 它保持系统能控标准型不变). 显见, $\mathcal{C}$ 是 $\mathcal{L}$ 的子范畴. □

范畴间的映射称为函子, 它满足一定的保结构特征, 严格定义如下.

定义 8.4.3 设 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{S}$ 为两个范畴. 一个函子 $T: \mathcal{C} \to \mathcal{S}$ 为一个映射, 满足

(1) $A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, 则 $TA \in \mathrm{Obj}(\mathcal{S})$;

(2) $f \in \mathrm{Hom}(A, B)$, 则 $Tf \in \mathrm{Hom}(TA, TB)$;

(3) 如果 f, g 为 $\mathcal{C}$ 上的态射, 且 $g \circ f$ 有定义, 那么

$$T(g \circ f) = (Tg) \circ (Tf);$$

(4) $T(id_A) = id_{TA}, \forall A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$.

例 8.4.3 (1) 设 $\mathcal{C}$ 为一范畴, 恒等函子 $J: \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ 定义为

$$JA = A, \text{ 且 } Jf = f, \quad \forall f \in \mathrm{Hom}(A, B), \quad \forall A, B \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C}).$$

(2) 设 M 为一给定拓扑空间, 那么一个函子 $T_M: \mathbf{Top} \to \mathbf{Top}$ 可定义如下: $T_M(X) = M \times X$, 并且如果 $f: X \to Y$ 为一连续映射, 则定义 $T_M(f): M \times X \to M \times Y$ 为 $(m, x) \mapsto (m, f(x))$. 显然它是乘积空间上的连续映射. □

8.5 单纯形与单纯复形

单纯形是构成几何形体的最小构件, 它如同建筑物的砖块, 研究它们的组合方式, 就可以了解几何形体的特征.

定义 8.5.1 设 $A \in \mathbb{R}^n$ 为一个集合. (1) A 称为一个凸集, 如果对 A 中任意两点 $x, y \in A$, 连接两点的线段也属于 A, 记作 $\overline{xy} \subset A$. (2) A 称为一个仿射集, 如果对 A 中任意两点 $x, y \in A$ $(x \neq y)$, 连接两点的直线也属于 A, 记作 $L(x, y) \subset A$.

设 $\{X_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的一组凸集 (仿射集), 则其交集 $\cap_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ 也是凸集 (相应地, 仿射集). 这使下面的定义有意义 (即取交集可得到最小).

定义 8.5.2 对任一集合 $X \subset \mathbb{R}^n$, 包含 X 的最小凸集 (仿射集) 称为由 X 张成的凸集 (相应地, 仿射集), 记作 $\mathrm{conv}\{X\}$ (相应地, $\mathrm{aff}\{X\}$). 由 X 张成的凸集也称 X 的凸包.

下面考虑有限集的情况.

定义 8.5.3 设点 $p_0, p_1, \cdots, p_m \in \mathbb{R}^n$. 点 $x \in \mathbb{R}^n$ 称为 $\{p_i \mid i = 0, 1, \cdots, m\}$ 的一个仿射组合, 如果它能表示成

$$x = \sum_{i=0}^{m} t_i p_i, \quad 其中 \quad \sum_{i=0}^{m} t_i = 1.$$

如果 x 是 $\{p_i \mid i = 0, 1, \cdots, m\}$ 的仿射组合, 并且组合系数 $t_i \geqslant 0$, $\forall i$, 则称 x 为 $\{p_i \mid i = 0, 1, \cdots, m\}$ 的一个凸组合.

设 x 为 $\{p_0, p_1, \cdots, p_m\}$ 的仿射组合, 即

$$x = \sum_{i=0}^{m} t_i p_i = \sum_{i=0}^{m} t_i (p_i - p_0) + p_0.$$

则

$$x - p_0 = \sum_{i=1}^{m} t_i (p_i - p_0).$$

因此 x 就在通过 $\{p_i\}$ 的超平面上.

下面证明仿射组合 (凸组合) 与仿射集 (相应地, 凸集) 的关系.

命题 8.5.1 给定 $\{p_i \mid i = 0, 1, \cdots, m\} \subset \mathbb{R}^n$, 由 $\{p_i\}$ 张成的凸集 $\mathrm{conv}\{p_0, p_1, \cdots, p_m\}$ (仿射集 $\mathrm{aff}\{p_0, p_1, \cdots, p_m\}$) 等于 $p_0, p_1, \cdots, p_m$ 的凸组合集 (相应地, 仿射组合集).

证明 我们证凸集的情况, 仿射集证明类似. 记 S 为凸组合集, 先证 $\mathrm{conv}\{p_0, p_1, \cdots, p_m\} \subset S$. 为此, 只要证 S 凸且包含 $\{p_i\}$ 即可. 取 $t_i = 1$, $t_j = 0, j \neq i$, 即得 $p_i \in S$. 设 $\alpha = \sum\limits_{i=0}^{m} a_i p_i \in S$, $\beta = \sum\limits_{i=0}^{m} b_i p_i \in S$. 则

$$t\alpha + (1-t)\beta = \sum_{i=0}^{m} [t a_i + (1-t) b_i] p_i, \quad t \in [0, 1].$$

显然, 它是 $\{p_i\}$ 的一个凸组合, 即 $t\alpha + (1-t)\beta \in S$, 故 S 凸.

下面证明 $S \subset \mathrm{conv}\{p_0, p_1, \cdots, p_m\}$. 设 C 为包含 $\{p_i\}$ 的任一凸集, 我们只要证明 $S \subset C$ 即可. 设

$$x = \sum_{i=0}^{m} t_i p_i,$$

我们对 x 的长度作归纳法. 设 $x = t_0 p_0$, 则 $t_0 = 1$, 即 $x = p_0 \in C$. 设 x 长度为 k 时 $x \in S$, 记 $x = \sum\limits_{i=0}^{k} t_i p_i$. 如果 $t_0 = 0$, 则 x 长度变为 k, 平凡; 若 $t_0 = 1$, 则 x 长度变为 1, 平凡. 故设 $0 < t_0 < 1$. 记

$$q = \frac{t_1}{1-t_0} p_1 + \frac{t_2}{1-t_0} p_2 + \cdots + \frac{t_k}{1-t_0} p_k.$$

此为长度为 k 的凸组合, 故 $q \in C$. 于是 $x = t_0 p_0 + (1-t_0) q \in C$, 故 $x \in C$, 即 $S \subset C$. 取 $C = \operatorname{conv}\{p_0, p_1, \cdots, p_m\}$, 即得结论. □

定义 8.5.4　一个有序点集 $\{p_0, p_1, \cdots, p_m\} \subset \mathbb{R}^n$ 称为仿射独立的, 如果 $\{p_1 - p_0, p_2 - p_0, \cdots, p_m - p_0\}$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中线性独立.

定理 8.5.1　设点集 $\{p_0, p_1, \cdots, p_m\} \subset \mathbb{R}^n$, 则以下三命题等价:

(1) $\{p_0, p_1, \cdots, p_m\}$ 仿射独立;

(2) 如果 $\sum\limits_{i=0}^{m} c_i p_i = 0$ 且 $\sum\limits_{i=0}^{m} c_i = 0$, 那么 $c_i = 0, \forall i$;

(3) 每一个 $x \in \operatorname{aff}\{p_0, p_1, \cdots, p_m\}$ 具有唯一的仿射组合表达

$$x = \sum_{i=0}^{m} t_i p_i, \quad \text{且} \quad \sum_{i=0}^{m} t_i = 1.$$

证明　(1) ⇒ (2). 设 $\sum\limits_{i=0}^{m} c_i = 0$ 且 $\sum\limits_{i=0}^{m} c_i p_i = 0$, 则

$$0 = \sum_{i=0}^{m} c_i p_i = \sum_{i=0}^{m} c_i (p_i - p_0) = \sum_{i=1}^{m} c_i (p_i - p_0).$$

因此 $c_i = 0, i = 1, \cdots, m$. 再由 $\sum\limits_{i=0}^{m} c_i = 0$ 即得 $c_0 = 0$.

(2) ⇒ (3). 利用命题 8.5.1, 存在表达式

$$x = \sum_{i=0}^{m} t_i p_i, \quad \text{这里} \quad \sum_{i=0}^{m} t_i = 1. \tag{8.5.1}$$

假如还有

$$x = \sum_{i=0}^{m} e_i p_i, \quad \text{这里} \quad \sum_{i=0}^{m} e_i = 1,$$

那么

$$0 = \sum_{i=0}^{m} (t_i - e_i) p_i.$$

由于 $\sum\limits_{i=0}^{m} (t_i - e_i) = 0$, $t_i - e_i = 0, \forall i$.

(3) ⇒ (1). 假定表达式唯一. 如果 $\{p_i - p_0 \mid i = 1, \cdots, m\}$ 线性相关, 那么我们有

$$0 = \sum_{i=1}^{m} r_i (p_i - p_0),$$

这里 r_i 不全为零. 譬如, $r_j \neq 0$, 不失一般性, 设 $r_j = 1$, 那么

$$p_j = 1 \times p_j,$$

同时

$$p_j = -\sum_{i \neq j} r_i p_i + \left(1 + \sum_{i \neq j} r_i\right) p_0.$$

因此, $p_j \in \mathrm{aff}(p_0, p_1, \cdots, p_m)$ 具有两个形同式 (8.5.1) 的表达式, 矛盾. □

作为定理 8.5.1 的一个直接应用, 我们有下面的推论.

推论 8.5.1 点集 $\{p_0, p_1, \cdots, p_m\}$ 的仿射独立性与点的排列顺序无关.

从前面的讨论可知, 如果 $A \subset \mathbb{R}^n$ 是仿射独立点集 $\{p_0, p_1, \cdots, p_m\}$ 所张成的仿射集, 那么 A 是一个超平面

$$A = V + v_0,$$

这里, V 是由 $\{p_1 - p_0, \cdots, p_m - p_0\}$ 张成的子空间, 而 $v_0 = p_0$.

定义 8.5.5 一个点集 $\{a_1, \cdots, a_k\} \subset \mathbb{R}^n$ 称为处于一般位置, 如果它的任一 $n+1$ 子集都是仿射独立集.

例 8.5.1 (1) 在 $\mathbb{R}^1$ 中, 任何 k 个点 $\{a_1, \cdots, a_k\}$ 都处于一般位置.

(2) 在 $\mathbb{R}^2$ 中, k 个点 $\{a_1, \cdots, a_k\}$ 处于一般位置, 当且仅当没有三个点是共线的.

(3) 在 $\mathbb{R}^3$ 中, k 个点 $\{a_1, \cdots, a_k\}$ 处于一般位置, 当且仅当没有四个点是共面的.

(4) 在 $\mathbb{R}^n$ 中, 对任一 $k > 0$, 总可以找到 k 个点, 使它们处于一般位置.

我们证明最后一条. 取 k 个互不相等实数 $r_1, \cdots, r_k$. 设 $p_i = (r_i, r_i^2, \cdots, r_i^n)^{\mathrm{T}}$, 要证明它们处于一般位置, 构造范德蒙 (Vandermonde) 行列式

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ r_{i_1} & r_{i_2} & \cdots & r_{i_{n+1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{i_1}^n & r_{i_2}^n & \cdots & r_{i_{n+1}}^n \end{bmatrix},$$

熟知 $\det(V) = \prod_{(j>k)} (r_{i_j} - r_{i_k}) \neq 0$. 从第 2 列开始, 将每一列减去第 1 列即得

$$\det[p_{i_2} - p_{i_1}, p_{i_3} - p_{i_1}, \cdots, p_{i_{n+1}} - p_{i_1}] = \det(V) \neq 0,$$

即 $p_{i_1}, p_{i_2}, \cdots, p_{i_{n+1}}$ 仿射独立. □

定义 8.5.6 设 $\{p_0, p_1, \cdots, p_m\} \subset \mathbb{R}^n$ 为一个仿射独立集, 其仿射张成集为 $A = \mathrm{aff}(p_0, p_1, \cdots, p_m)$, 那么 A 的每一点 $x \in A$ 可唯一地表示为

$$x = \sum_{i=0}^{m} t_i p_i, \quad 这里 \quad \sum_{i=0}^{m} t_i = 1,$$

系数 $(t_0, t_1, \cdots, t_m)^{\mathrm{T}}$ 称为 x (相对于有序点集 $\{p_0, p_1, \cdots, p_m\}$) 的重心坐标.

显然, 重心坐标只与该点与 $\{p_0, p_1, \cdots, p_m\}$ 的相对位置有关, 而与 $\mathbb{R}^n$ 自身的坐标选择无关.

定义 8.5.7 设 $\{p_0, p_1, \cdots, p_m\} \subset \mathbb{R}^n$ 为一个仿射独立集, 其凸包 $\mathrm{conv}\{p_0, p_1, \cdots, p_m\}$ 称为以 $p_0, p_1, \cdots, p_m$ 为顶点的 m 单纯形 (简称单形).

m 单纯形 $\mathrm{conv}\{p_0, p_1, \cdots, p_m\}$ 简记作 $[p_0, p_1, \cdots, p_m]$.

由定理 8.5.1 可知, 在一个 m 单纯形 $[p_0, p_1, \cdots, p_m]$ 中, 每一个点 x 有唯一表达式

$$x = \sum_{i=0}^{m} t_i p_i, \quad 这里 \ t_i \geqslant 0 \ 且 \sum_{i=0}^{m} t_i = 1.$$

设 $\{p_0, p_1, \cdots, p_m\} \subset \mathbb{R}^n$ 仿射独立, 那么单纯形 $[p_0, p_1, \cdots, p_m]$ 的重心为

$$B_c = \frac{1}{m+1} \sum_{i=0}^{m} p_i.$$

例 8.5.2 (1) $[p_0]$ 是一个 0 单形, 它的重心就是它自己.

(2) 1 单形 $[p_0, p_1]$ 是一个线段, 它的重心是 $(p_0 + p_1)/2$.

(3) 2 单形 $[p_0, p_1, p_2]$ 是一个三角形, 它的三条边 $[p_0, p_1]$, $[p_1, p_2]$ 和 $[p_0, p_2]$ 是三个 1 单形.

(4) 设 $e_0, e_1, \cdots, e_n$ 为 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的单位坐标轴向量, 即

$$(e_i)_j = \begin{cases} 0 & j \neq i+1, \\ 1 & j = i+1, \qquad i = 0, 1, \cdots, n, \end{cases}$$

那么

$$\Delta^n := [e_0, e_1, \cdots, e_n]$$

称为标准 n 单形. 图 8.5.1 中三角形 $\triangle ABC$ 是标准 2 单形. □

定义 8.5.8 设 $[p_0, p_1, \cdots, p_m]$ 为一 m 单形, 那么它的 p_i 所对的 ($m-1$ 维) 面是

$$[p_0, \cdots, \hat{p}_i, \cdots, p_m] = \sum_{j \neq i} t_j p_j, \quad t_j \geqslant 0, \quad \sum_{j \neq i} t_j = 1.$$

$[p_0, p_1, \cdots, p_m]$ 的一个 k 维面 ($k < m$) 是由 $[p_0, p_1, \cdots, p_m]$ 的 $k+1$ 个顶点张成的 k 单形.

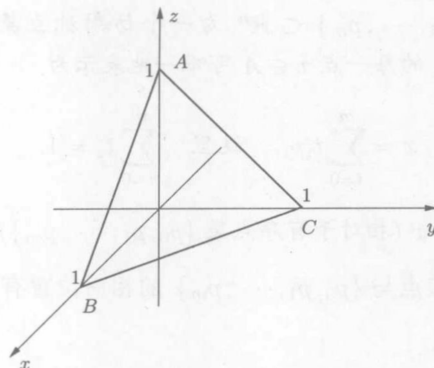


图 8.5.1 标准 2 单形

下面这个定理在单纯形重心重分时要用到.

定理 8.5.2 设 $S=[p_0,p_1,\cdots,p_n]$ 为一单形, 那么

(1) 如果 $u,v\in S$, 那么 $\|u-v\|\leqslant \sup_i\|u-p_i\|$;

(2) $d(S)=\sup_{i,j}\|p_i-p_j\|$;

(3) 如果 b 是 S 的重心, 那么 $\|b-p_i\|\leqslant \frac{n}{n+1}d(S)$.

证明 (1) $v=\sum\limits_i t_ip_i$, 这里 $t_i\geqslant 0$ 且 $\sum\limits_i t_i=1$.

$$\begin{aligned}\|u-v\|&=\|u-\sum_i t_ip_i\|=\|\sum_i t_i(u-p_i)\|\\&\leqslant \sum_i t_i\|u-p_i\|\leqslant \sum_i t_i\sup_i\|u-p_i\|\\&=\sup_i\|u-p_i\|.\end{aligned}$$

(2) 由 (1) 有

$$\|u-v\|\leqslant \sup_i\|u-p_i\|\leqslant \sup_i\sup_j\|p_j-p_i\|.$$

(3) 因为 $b=\frac{1}{n+1}\sum\limits_i p_i$, 则

$$\begin{aligned}\|b-p_i\|&=\left\|\sum_{j=0}^n\left(\frac{1}{n+1}p_j-p_i\right)\right\|=\left\|\sum_{j=0}^n\frac{1}{n+1}(p_j-p_i)\right\|\\&\leqslant \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^n(p_j-p_i)\\&=\frac{1}{n+1}\sum_{j\neq i}(p_j-p_i)\\&\leqslant \frac{n}{n+1}\sup_{i,j}\|p_i-p_j\|=\frac{n}{n+1}d(S).\end{aligned}$$

□

定义 8.5.9 设 $\{p_0, p_1, \cdots, p_m\} \subset \mathbb{R}^n$ 为一仿射独立点集, $A = \text{aff}\{p_0, p_1, \cdots, p_m\}$ 为其张成的仿射集 (或单纯形 $A = [p_0, p_1, \cdots, p_m]$). 一个映射 $T : A \to \mathbb{R}^k$ 称为仿射映射, 如果

$$T\left(\sum_{i=0}^{m} t_i p_i\right) = \sum_{i=0}^{m} t_i T(p_i).$$

下面讨论由单纯形组成的几何形体, 称为单纯复形.

定义 8.5.10 (1) 两个单纯形 A 和 B 称为恰当共存的, 如果它们的交 $A \cap B$ 或为空集, 或为 A 和 B 的一个面.

(2) 一个单纯复形 K, 由有限个单形 $A_1, \cdots, A_k$ 组成, 它满足①如果 $A_i \in K$, 那么 A_i 的所有面也属于 K; ② K 中任何两个单形 A_i 和 A_j 都是恰当共存的.

例 8.5.3 图 8.5.2 (a) 中单形 $\triangle ABC$ 与单形线段 CD 是恰当共存的, 因此构成一个单纯复形; (b) 中单形 $\triangle ABC$ 与单形线段 ED 不是恰当共存的, 因此不构成一个单纯复形. □

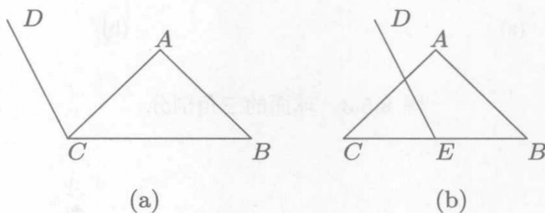


图 8.5.2 单纯复形

我们感兴趣的是多面体, 因此希望将它转化为一个单纯复形. 直观地说, 将多面体的面划分成许多三角形, 使之成为单纯复形, 这个过程称为三角剖分. "三角剖分" 是一个经典的名词, 它有两个问题: (1) 对球面, 轮胎面等如何分? (2) 对高维形体如何分? 因此, 需要对三角剖分作进一步严格化.

设 K 为单纯复形, 它的承载空间, 记作 $|K|$, 是其组成单纯形的并

$$|K| = \bigcup_{S \in K} S,$$

带上它们所在 $\mathbb{R}^n$ 空间的继承拓扑.

定义 8.5.11 (1) 一个拓扑空间 X 称为一个多面体, 如果存在一个单纯复形 K 和一个同胚映射 $h : |K| \to X$; (K, h) 称为 X 的一个三角剖分.

(2) 一个单纯复形的维数是它所含单纯形的最高维数, 一个多面体的维数是它的三角剖分的单纯复形维数.

例 8.5.4 (1) 球面: 将球面划出四个球面三角形, 将每个球面三角形映到四面体的四个面, 不难看出, 球面与四面体同胚 (图 8.5.3). 因此, 四面体就是球面的一个三角剖分.

(2) 空心椭圆 (图 8.5.4): 在椭圆中挖去一个圆. 用曲边三角形将它剖分后, 再拉直, 即得.

(3) 轮胎面 (T^2): 直接在轮胎面上剖分它是比较困难的, 因此, 可考虑在它的展开图上进行. 图 8.5.5 是它的三角剖分. 注意, 同一字母标的是同一个点. (实际上, 这是最少的三角剖分.) □

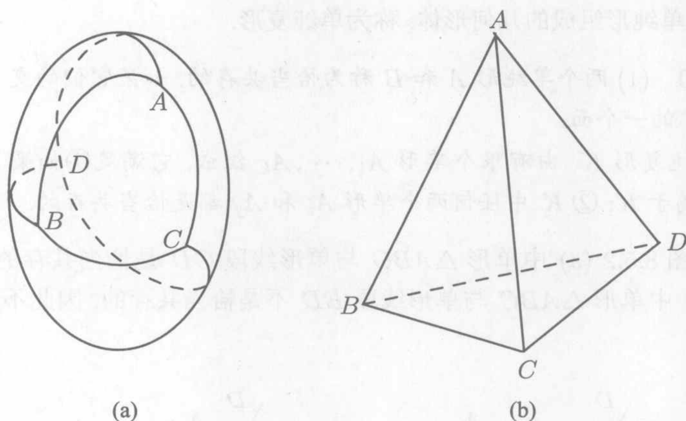


图 8.5.3　球面的三角剖分

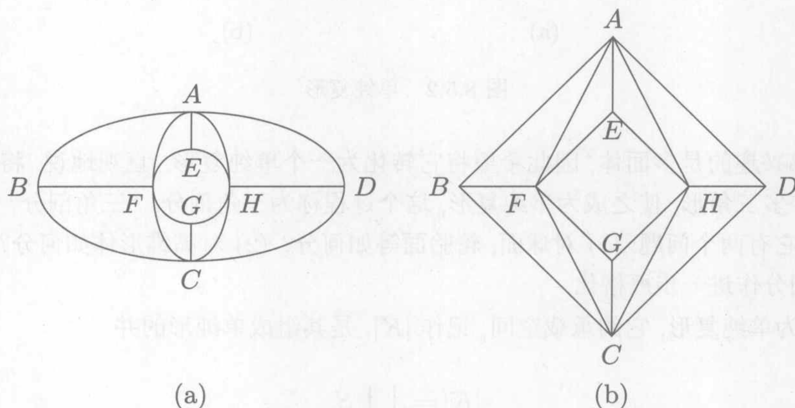


图 8.5.4　空心椭圆的三角剖分

如何考虑单纯复形的代数结构呢? 我们不妨将单纯复形看作其所包含的单纯形之和. 为表示一个单纯形的 "方向", 类似于线段的方向, 我们定义

$$[p_0, \cdots, p_i, \cdots, p_j, \cdots, p_m] = -[p_0, \cdots, p_j, \cdots, p_i, \cdots, p_m]. \tag{8.5.2}$$

如果单纯复形 K 是由有限个单形 $A_1, \cdots, A_k$ 构成, 那么在 K 上形式地定义一个集合

$$G = \{z_1 A_1 + \cdots + z_k A_k \,|\, z_1, \cdots, z_k \in \mathbb{Z}\}.$$

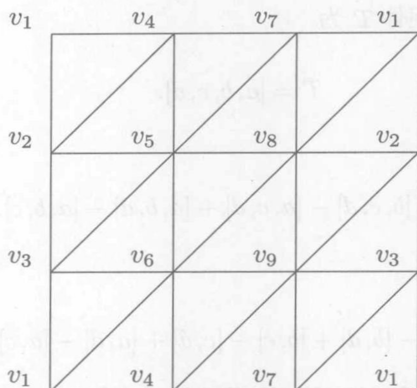


图 8.5.5　轮胎面的三角剖分

按自然的方法定义加法

$$(z_1A_1+\cdots+z_kA_k)+(z'_1A_1+\cdots+z'_kA_k)=(z_1+z'_1)A_1+\cdots+(z_k+z'_k)A_k,$$

那么显然在这个加法下 G 成为一个阿贝尔群.

下面, 我们考虑单纯形的边界.

定义 8.5.12　给定单纯形 $A=[p_0,p_1,\cdots,p_m]$. 定义边界算子 ∂ 如下

$$\partial A=\sum_{i=0}^{m}(-1)^i[p_0,\cdots,\hat{p}_i,\cdots,p_m]. \tag{8.5.3}$$

规定 ∂ 为一线性算子, 则可自然地将它扩充定义到 G 上.

从下面的例子可以看出边界算子的意义.

例 8.5.5　(1) 考虑图 8.5.6 (a), 折线 L 由三截线段组成

$$L=[a,b]+[b,c]+[c,d],$$

这里表示该点的空间坐标, 那么

$$\partial L=(b-a)+(c-b)+(d-c)=d-a.$$

显然, 它是折线 L 的两个端点.

(2) 考虑图 8.5.6 (b), 四边形边界 Q 由四截线段组成

$$Q=[a,b]+[b,c]+[c,d]+[d,a].$$

则其边界为

$$\partial Q=(b-a)+(c-b)+(d-c)+(a-d)=0.$$

因此环路没有边界.

(3) 考虑图 8.5.6 (c), 四面体 T 为

$$T = [a, b, c, d].$$

则其边界为

$$\partial T = [b, c, d] - [a, c, d] + [a, b, d] - [a, b, c].$$

边界的边界为

$$\begin{aligned}\partial^2 T = &[c, d] - [b, d] + [b, c] - [c, d] + [a, d] - [a, c] \\ &+ [b, d] - [a, d] + [a, b] - [b, c] + [a, c] - [a, b] = 0.\end{aligned}$$

□

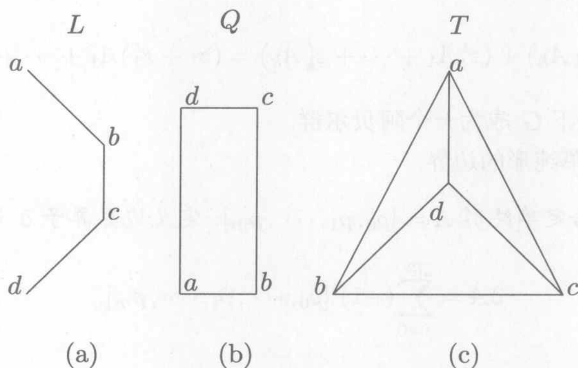


图 8.5.6 边界

8.6 同调群*

先介绍一个概念, 称为自由阿贝尔群.

定义 8.6.1 (1) 设 B 为阿贝尔 (加法) 群 F 的一个子集. B 称为独立的, 如果 $\sum_{b\in B} m_b b = 0$ 可推出 $m_b = 0, \forall b \in B$.

(2) F 称为以 B 为基底的自由阿贝尔群, 如果① B 是独立的; ② $F = \sum_{b\in B} \langle b \rangle$.

注意, 如果 B 独立, 则显然对每一 $b \in B$, $\langle b \rangle$ 为无限循环群.

注意, 作为代数结构, 求和只允许有限和. 因此 F 中一个元 $x \in F$ 可表示为

$$x = \sum_{b\in B} m_b b, \quad m_b \in \mathbb{Z}, \quad \text{除有限个外 } m_b = 0.$$

定理 8.6.1　(1) 设 F 为以 B 为基底的自由阿贝尔群. 如果 G 是一个阿贝尔群, 且 $\phi: B \to G$ 为一群同态, 则存在唯一的群同态, $\bar{\phi}: F \to G$ 使得 $\bar{\phi}(b) = \phi(b), \forall b \in B$ (见图 8.6.1).

(2) 每一个阿贝尔群 G 都同构于一个自由阿贝尔群 F 的商群 F/R.

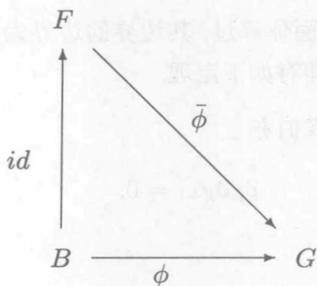


图 8.6.1　同态的延拓

证明　(1) 每一个 $x \in F$ 可表示为 $x = \sum m_b b$, 因此, 可定义 $\bar{\phi}(x) = \sum m_b \phi(b)$. x 的上述表达形式的唯一性保证了 $\bar{\phi}$ 是定义好的同态. 最后, 如果两个同态在生成基上相等, 则处处相等. 因此延拓是唯一的.

(2) 对每个 $x \in G$, 构造一个无限循环群 $Z_x = \langle b_x \rangle$, 这里 b_x 只当作一个形式符号使用. 构造一个自由阿贝尔群 $F = \sum\limits_{x \in G} Z_x$, 它以 $B = \{b_x \mid x \in G\}$ 为基底. 定义映射 $\phi: B \to G$ 为 $\phi(b_x) = x$. 由于 ϕ 是映上的, $\bar{\phi}$ 显然也是映上的. 根据群同态第一定理, 有 $G \cong F/R$, 这里 $R = \ker(\bar{\phi})$. □

注　由 ϕ 构造 $\bar{\phi}$ 称为线性延拓. $\bar{\phi}$ 通常仍记作 ϕ.

定义 8.6.2　如果 F 是一个以 B 为基的自由阿贝尔群, 那么 F 的阶定义为 B 的势, 即

$$\mathrm{rank}(F) = |B|.$$

下面我们可以开始讨论同调群了.

设 K 为一多面体, 而它所包含的 n 维单形所生成的自由阿贝尔群记作 S_n. 注意 S_n 可能为 $\{0\}$.

我们感兴趣的是多面体 K 有多少个 "洞". 基本群可以刻画二维面上的洞. 但如果我们考虑三维空间的球面 S^2, 熟知, 它是简单连通的, 即它的基本群是平凡群: $\pi_1(S_2) = \{e\}$. 但 S_2 显然包着一个三维的 "洞", 可见基本群刻画不了三维的洞. 下面, 我们定义多面体 K 的 n 阶同调群. 大致地说, K 的 n 阶同调群 $H_n(K)$ 可以用来刻画多面体 K 中的 $n+1$ 维的洞.

为刻画洞, 就必须将 "环路" 找出来. 利用边界算子的定义, 即下述定义.

定义 8.6.3 (1) 多面体 K 中的 n 环路, 记作 $Z_n(K)$, 是 n 维边界算子的核 $\ker(\partial_n)$, 即

$$\ker(\partial_n) = \{A \in S_n \mid \partial_k(A) = 0\};$$

(2) K 中的 n 维边界群, 记作 $B_n(K)$, $n+1$ 维边界算子的像 $\mathrm{im}(\partial_{k+1})$, 即

$$\mathrm{im}(\partial_{k+1}) = \{A \mid A = \partial_{k+1}(B),\ B \in S_{k+1}\}.$$

在例 8.5.5 中, 我们曾经对四面体算过, 其边界的边界为 $\{0\}$. 不难计算, 这对一般单形都对[102]. 将它写成一般形式, 即有如下定理.

定理 8.6.2 对任意 $k \geqslant 0$, 我们有

$$\partial_k \partial_{k+1} = 0. \tag{8.6.1}$$

由上述定理可得下面的推论.

推论 8.6.1

$$B_k(K) < Z_k(K) < S_k(K). \tag{8.6.2}$$

实际上, 因为它们都是阿贝尔群, 故 $B_k(K) \lhd Z_k(K) \lhd S_k(K)$.

为了分别 $Z_k(K)$ 和 $B_k(K)$, 我们考虑轮胎面 T^2 上的三个圆盘 (见图 8.6.2). 盘 C_1 和 C_3 的三角剖分见图 8.6.3. 可以看出 $C_1 \in Z_1(K)$ 而 $C_3 \in B_1(K)$. C_1 是一个真正的洞, 而 C_3 不是. 再看图 8.6.4. 显然 C_1 和 C_2 是等价的圈, 即它们的差 $C_1 - C_3 \in B_1(K)$. 这个事实鼓励我们去定义如下的同调群.

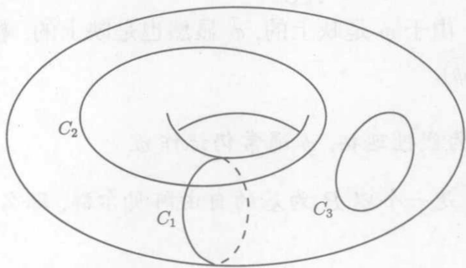


图 8.6.2　T^2 上的三个圆盘

定义 8.6.4 给定一个多面体 K. 它的 n 阶同调群定义为

$$H_n(K) = \frac{Z_n(K)}{B_n(K)} = \frac{\ker(\partial_n)}{\mathrm{im}(\partial_{n+1})}, \quad n = 0, 1, 2, \cdots. \tag{8.6.3}$$

对 $n \geqslant 0$, $\mathrm{rank}(H_n(K))$ 称为 K 的第 n 个 Betti 数.

实际上, 同调群可以看作拓扑空间范畴 **Top** 到阿贝尔群范畴 **Ab** 的一个函子.

同调群有许多良好的性质, 由于篇幅所限, 以下列出几个有用的定理, 证明可见文献 [102].

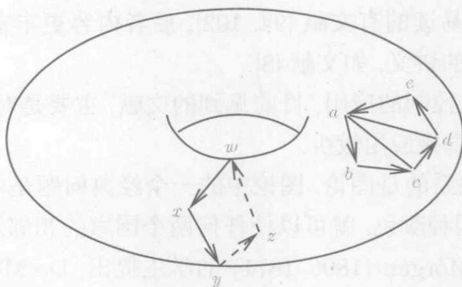


图 8.6.3 C_1 和 C_3 上的三角剖分

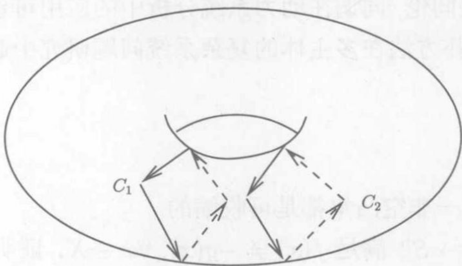


图 8.6.4 等价圆圈

定理 8.6.3 设拓扑空间 X 与 Y 同伦, 那么它们的同调群相同, 即 $H_k(X) \cong H_k(Y)$, $k = 0, 1, 2, \cdots$.

定理 8.6.4 设 $X = \cup_{\lambda \in \varLambda} X_\lambda$, 这里, 每个 X_λ 为 X 的一个道路连通分支, 那么

$$H_k(X) \cong \sum_{\lambda \in \varLambda} H_k(X_\lambda), \quad k = 0, 1, 2, \cdots.$$

定理 8.6.5 设 X 为一道路连通的拓扑空间, $\pi_1(X)$ 为其基本群, $\pi_1(X)$ 的交换子群为 $\pi_1(X)'$. 那么

$$\pi_1(X)/\pi_1(X)' \cong H_1(X).$$

8.7 注释与参考

代数拓扑是拓扑学的一个重要组成部分, 它是用近世代数的方法研究拓扑, 或者说, 研究拓扑变换下的代数不变量. 代数拓扑的奠基人是法国数学家庞加莱 (Poincaré 1852–1912), 他基于对天体力学和运动方程的深入研究, 提出了代数拓扑的思想. 现在, 代数拓扑也是一个十分重要的近代数学分支, 它不仅对微分几何、代数几何、微分动力系统、对策论等数学分支有重大影响, 而且也在理论物理, 甚至原子核结构等研究中得到大量应用.

我国数学家吴文俊先生也是一位杰出的代数拓扑学家, 还有著名华裔数学家教授陈省身先生, 他们所分别提出的吴示性类、陈示性类都是基本的拓扑不变量.

这方面的参考书, 较易读的有文献 [94, 102], 后者内容更丰富一点, 并且是用奇异同调的讲法. 国内也有较好的讲义, 如文献 [8].

代数拓扑对经典系统控制的应用, 目前见到的文献, 主要是对线性系统一般理论的研究. 在非线性系统方面的直接应用较少.

与代数拓扑有密切联系的是图论. 图论中的一个经典问题是四色问题, 即任何一张地图, 按国家着色, 只要用四种颜色, 就可以使任何两个国家的相邻边界两侧着不同颜色. 这个问题于 1852 年由 De Morgan (1806–1871) 的学生提出, De Morgan 百思不得其解, 于是将它公之于众. 后由美国伊利诺伊大学两位教授 1972–1976 年用计算机经四年计算证明了这一结论. 据说这是第一个由计算机首先证明出来的数学定理.

关于图的拓扑结构及同伦, 同调在动力系统分析中的应用可参见文献 [82].

目前, 图论与代数拓扑方法在多主体的复杂系统问题研究中起着关键作用.

8.8 习题

8.1 证明 $\mathbb{R}^n$ 中的任一非空凸集都是可收缩的.

8.2 设映射 $f, g: X \to S^n$ 满足 $f(x) \neq -g(x)$, $\forall x \in X$. 证明 $f \simeq g$.

8.3 证明 Hausdorff 空间的收缩核一定是闭集.

8.4 证明例 8.5.1 中的 (1), (2), (3).

8.5 设 $f: S^1 \to S^1$ 没有不动点 (即 $f(x) \neq x$, $\forall x \in S^1$), 定义 $f_*: \pi_1(S_1, t) \to \pi_1(S_1, f(t))$ 为 $[\sigma] \mapsto [f \circ \sigma]$, (这里, t 是 S^1 上一个固定点.) 证明 f_* 是基本群同构.

8.6 求以下图形的基本群.

(1) 球面 S^2;

(2) $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$;

(3) 柱面 $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

8.7 证明: 球面 S^k, $k \geqslant 2$ 是简单连通的, 这里

$$S^k = \left\{ x \in \mathbb{R}^{k+1} \,\middle|\, \sum_{i=1}^{k+1} x_i^2 = 1 \right\}.$$

8.8 设下述系统可控

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu, \quad x \in \mathbb{R}^2, \\ u = Kx, \end{cases}$$

讨论镇定系统的 K 集合的基本群.

8.9 计算

$$H_i(S^2), \quad i = 1, 2, 3, \cdots.$$



第 9 章 流形上的几何学

本章介绍微分几何的一些基本概念: 包括微分流形、向量场、李群与李代数等. 微分流形是对一般高维空间的刻画. 这些已经是控制理论研究的基本工具. 为了工程应用的方便, 我们将特别强调微分流形的可计算性.

9.1 微分流形

微分流形是微分几何研究的对象, 它是一个带有微分结构的拓扑空间.

定义 9.1.1 设 $(M,\mathcal{T})$ 为一个第二可数的、T_2 (Hausdorff) 的拓扑空间. M 称为一个 n 维拓扑流形, 如果存在一个子集族 $\mathbf{A}=\{A_\lambda\,|\,\lambda\in\Lambda\}\subset\mathcal{T}$, 使得

(1) $\cup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\supset M$;

(2) 对任何 $U\in\mathbf{A}$ 存在一个同胚 $\phi:U\to\phi(U)\subset\mathbb{R}^n$, 称为坐标卡, 记作 (U,ϕ), 这里 $\phi(U)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的开集.

如果还有以下条件:

(3) 对两个坐标卡: (U,ϕ) 和 (V,ψ), 如果 $U\cap V$ 非空, 那么 $\psi\circ\phi^{-1}:\phi(U\cap V)\to\psi(U\cap V)$ 及 $\phi\circ\psi^{-1}:\psi(U\cap V)\to\phi(U\cap V)$ 两者均为 C^r (C^∞, C^ω) 映射. 这样的两个坐标称为相容坐标卡.

(4) 如果一个坐标卡 W 与 $\mathbf{A}$ 中所有坐标卡均相容, 则 $W\in\mathbf{A}$.

那么 $(M,\mathcal{T})$ 称为一个 C^r (相应地, 称为 C^∞, 解析) 微分流形 (见图 9.1.1).

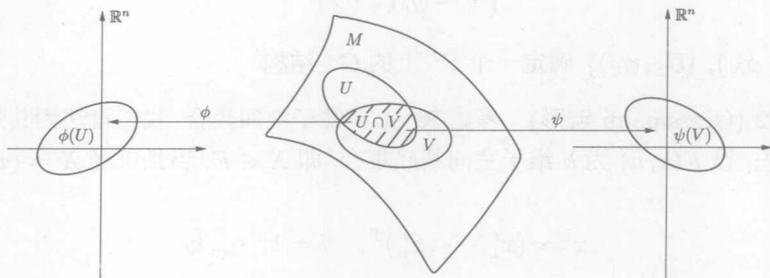


图 9.1.1 微分流形

注　事实上, (1)~(3) 已足够确定一个微分流形. 条件 (4) 是为了某些叙述和使用上的方便.

下面给出几个简单例子.

例 9.1.1　(1) $\mathbb{R}^n$ 的任何一个非空开子集均为一个 n 维流形.

(2) $\mathbb{R}^2$ 中的图 "8", 用极坐标可定义为

$$F = \{(r, \theta) \mid r = |\sin(\theta)|,\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}.$$

这不是一个流形, 因为在原点 $r = 0$ 附近它不能同胚于 $\mathbb{R}^1$ 的任一开集.

(3) S^2 是一个 2 维解析流形. 为证明这一点可取 6 个坐标卡为 (U_{x+}, π_{x+}), (U_{x-}, π_{x-}), (U_{y+}, π_{y+}), (U_{y-}, π_{y-}), (U_{z+}, π_{z+}), (U_{z-}, π_{z-}), 这里

$$U_{x+} = \{(x, y, z) \in S^2 \mid x > 0\},$$

$$\pi_{x+} = \begin{cases} Y = y, \\ Z = z. \end{cases}$$

那么 $\pi_{x+}(U_{x+})$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的一个开圆盘, 显见 π_{x+} 是一个同胚, 并且 π 和 π^{-1} 均解析.

其他 5 个坐标卡可类此定义.

参考例 6.1.5, 另一组坐标卡可定义为

$$U_N = S^2 \backslash \{N\}, \quad U_S = S^2 \backslash \{S\}.$$

然后定义 $\phi_N : U_N \to \mathbb{R}^2$ 为

$$\begin{cases} X = x/(1-z), \\ Y = y/(1-z), \end{cases}$$

及 $\phi_S : U_S \to \mathbb{R}^2$ 为

$$\begin{cases} X = x/(1+z), \\ Y = y/(1+z). \end{cases}$$

因此, $\{(U_N, \phi_N), (U_S, \phi_S)\}$ 确定一个 S^2 上的 C^ω 结构. □

例 9.1.2 (Grassmann 流形)　考虑 $\mathbb{R}^n$ 上 k 维子空间集合. 我们设法为其加上一个解析结构. 首先, 设 $F(k, n)$ 为 k 维子空间基底集合, 即 $X \in F$, 当且仅当 $X = (x^1, \cdots, x^k)$, 这里

$$x^i = (x_1^i, \cdots, x_n^i)^{\mathrm{T}}, \quad i = 1, \cdots, k$$

且 $x^1, \cdots, x^k$ 线性无关. 为方便起见, 我们将每个 X 等同于一个 $n \times k$ 列满秩矩阵.

显见如果取 x_j^i, $i = 1, \cdots, k$; $j = 1, \cdots, n$, 为坐标, 则 $F(k, n)$ 可以看作 $\mathbb{R}^{n \times k}$ 的一个开集.

设 $X, Y \in F(k,n)$, 则 X 与 Y 生成同一个子空间, 当且仅当存在一个 $A \in GL(k,\mathbb{R})$ 使得 $X = YA$. 在 $F(k,n)$ 上定义一个等价关系如下

$$X \sim Y \quad \Leftrightarrow \quad X \in YGL(k,\mathbb{R}).$$

于是我们可以定义商空间

$$G(k,n) = F(k,n)/\sim .$$

于是 $G(k,n)$ 是一个定义好的拓扑空间. 我们在 $G(k,n)$ 上建立一个微分结构如下: 设 $X \in F(k,n)$, 则它有一个 $k \times k$ 非奇异子矩阵, 例如这个非奇异子矩阵由它的前 k 行构成. 那么

$$X \sim \begin{pmatrix} I_k \\ \begin{bmatrix} x_{k+1}^1 & \cdots & x_{k+1}^k \\ \vdots & & \vdots \\ x_n^1 & \cdots & x_n^k \end{bmatrix} \end{pmatrix}. \tag{9.1.1}$$

现在在 $G(k,n)$ 上定义一个坐标卡为等价类 $[X]$, 这里 X 的前 k 行线性无关. 对每个等价类中取一个形如式 (9.1.1) 的代表元. 注意在这个坐标卡中每一个等价类 $[X]$ 有唯一表示, 因此我们可以选择

$$\phi([X]) = \left(x_{k+1}^1, x_{k+2}^1, \cdots, x_{n-1}^k, x_n^k\right)$$

作为它的局部坐标. 这样总共有

$$N = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

个坐标卡 U^i, 它对应于等价类 $[X]$ 集合, 每个集合有特定的 k 个线性无关行. 最后, 我们还要证明这个结构是解析的: 设 $[X] \in U_i \cap U_j$. 那么在 U_i 中 X 的某 k 个特定行形成 ϕ_i, 即 $\tilde{\phi}_i = XA_i^{-1}$ 且 $\tilde{\phi}_i$ 的 k 个特别指定行形成 ϕ_i 的坐标, 而在 U_j 中 X 的特别指定行形成 ϕ_j, 即 $\tilde{\phi}_j = XA_j^{-1}$ 且 $\tilde{\phi}_j$ 的某 k 个特定指定行形成 ϕ_j. 于是 $\phi_i \to \phi_j$ 的坐标变换由以下的传递映射确定

$$\tilde{\phi}_j = \tilde{\phi}_i A_i A_j^{-1},$$

而这个映射是解析的. 由以上的讨论可知 Grassmann 流形的维数是 $\dim(G(k,n)) = k(n-k)$. □

例 9.1.3 (射影空间) 作为 Grassmann 流形的特例, 考虑 $\mathbb{R}^n$ 上 1 维子空间集合, 这个空间称为射影空间, 记作 $P(n-1,\mathbb{R})$. 射影空间有另一个定义方法, 考虑 $n-1$ 维球, $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n$ 上的每个 1 维子空间即过原点的一条直线. 于是, 它与 S^{n-1} 交于两个点. 将 S^{n-1} 的两个对径点等同于一个点, 就得到一个商拓扑空间. 在这个商空间每一点, 取一个小于半球的邻域, 容易看出, 可用原空间的微分卡作商空间的微分卡, 因此, 这个商拓扑空间的微分结构可直接用 S^{n-1} 上的微分结构 (见习题 9.1). 于是, 商空间也是一个 $n-1$ 维流形. 可以证明, 这个商流形就是 $P(n-1,\mathbb{R})$. □

定义 9.1.2 设 M、N 为两个 C^r 流形, 其维数分别为 m、n. $F: M \to N$ 称为一个 C^r 映射, 如果对每一点 $x \in M$ 和 $y = F(x) \in N$ 存在 x 的局部坐标卡 (U, ϕ) 和 y 的局部坐标卡 (V, ψ), 使得

$$\tilde{F} = \psi \circ F \circ \phi^{-1}$$

是 C^r 的. 并且, F 在 x 点的秩定义为 $\tilde{F}$ 在 $\phi(x)$ 的秩.

注意到如果 $F: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ 可以表示为

$$y_i = y_i(x_1, \cdots, x_m), \quad i = 1, \cdots, n,$$

那么 F 在 x 点的秩为

$$\operatorname{rank}(F)|_x = \operatorname{rank}\left(\begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_m} \end{bmatrix}\right)\Bigg|_x. \tag{9.1.2}$$

以后, 多数情况下, 如果不发生混淆我们就将 $\tilde{F}$ 等同于 F.

定义 9.1.3 设 $N = \mathbb{R}$, 那么一个从 M 到 $N = \mathbb{R}$ 的 C^r (C^∞, C^ω) 映射称为一个 C^r 函数 (相应地 C^∞ 函数, 或解析函数), 记作 $C^r(M)$ (相应地 $C^\infty(M)$, 或 $C^\omega(M)$) 为 M 上的 C^r (C^∞, 解析) 函数集合.

定义 9.1.4 设 M、N 为两个微分流形, $\pi: M \to N$ 为一个同胚. 如果 π 及 π^{-1} 均为 C^r (C^∞, C^ω), 那么 M、N 称为 C^r (相应地 C^∞ 或 C^ω) 微分同胚, π 称为一个 C^r (相应地 C^∞ 或 C^ω) 微分同胚映射.

设 $x \in M$. 如果存在一个邻域 $U \ni x$ 及邻域 $V \ni y = \pi(x)$ 使得 $\pi: U \to V$ 为一微分同胚, 则 M 和 N 称为在 x 点局部微分同胚, 而 π 则称为局部微分同胚映射.

例 9.1.4 考虑一个开圆盘

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < r\},$$

和一个椭圆盘

$$E = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < r^2\right\},$$

它们是 C^ω 微分同胚的. 一个微分同胚映射 $F: D \to E$, 可定义如下

$$F_1(x, y) = \left(\frac{a}{r}\right)x, \quad F_2(x, y) = \left(\frac{b}{r}\right)y.$$

同一个映射也可当作边界到边界的映射, 即 $F: \partial D \to \partial E$. 于是可知圆周与椭圆周也是解析微分同胚的.

$\mathbb{R}$ 不可能与 S^1 微分同胚, 因为微分同胚是一个同胚, 但 $\mathbb{R}$ 与 S^1 不可能同胚. 这很容易看出. 例如: S_1 是紧空间而 $\mathbb{R}$ 不是; 又如, 它们有不同的基本群 (S^1 的基本群是

$\pi_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$, 而 $\mathbb{R}$ 的基本群是 $\pi_1(\mathbb{R}) \simeq \{e\}$). 它们可以局部微分同胚, 事实上, $\mathbb{R}$ 是 S^1 的复叠空间. □

定义 9.1.5 设 M、N 为两个微分流形, $\dim(M) = m \geqslant n = \dim(N)$ 且 $F: N \to M$ 是一个一对一的光滑映射. 那么 $F: N \to \tilde{N} = F(N)$ 给出 N 和 $\tilde{N}$ 之间的一个一一对应.

(1) 当 $\tilde{N}$ 带有 N 的拓扑时它称为 M 的一个浸入子流形;

(2) 如果 $\tilde{N}$ 是一个浸入子流形, 并且当 $\tilde{N}$ 带有作为 M 的子空间的继承拓扑, $F: N \to \tilde{N}$ 是一个同胚, 则 $\tilde{N}$ 称为嵌入子流形;

(3) 如果 $N \subset M$ 且对每一点 $p \in N$ 存在一个局部坐标卡 (U, ϕ), 使得

$$\begin{cases} \phi(p) = 0, \\ \phi(U) = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, |x_i| < \varepsilon\}, \\ \phi(N \cap U) = \{x \in \phi(U) \,|\, x_{n+1} = \cdots = x_m = 0\}, \end{cases} \tag{9.1.3}$$

那么 N 称为 M 的一个正规子流形. 坐标系 (9.1.3) 称为 N 的平整坐标.

例 9.1.5 (1) 考虑一个映射 $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ 定义为

$$F(t) = \left(2\cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right), \sin\left(2\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\right)\right).$$

F 的像是一个 “8” 字, F 是浸入, 因为 $\mathrm{rank}(F) = 1$. 但 F 不是一对一的. 事实上, 当 t 走过 2π, $F(t)$ 走出一个 “8” 字. 因此其像不是一个浸入子流形 (图 9.1.2 (a)).

(2) 设 $g(t): \mathbb{R} \to (-\pi, \pi)$ 定义为 $g(t) = 2\arctan(t)$, 定义 $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ 为

$$F(t) = \left(2\cos\left(g(t) + \frac{\pi}{2}\right), \sin\left(2\left(g(t) + \frac{\pi}{2}\right)\right)\right).$$

现在 $F(t)$ 只画一个 “8” 字 (图 9.1.2 (b)), 这回它是一对一的. 因此 $F(\mathbb{R})$ 是一个浸入子流形.

但 $F(\mathbb{R})$ 不是一个嵌入子流形, 如果我们给 $F(\mathbb{R})$ 以 $\mathbb{R}^2$ 的子空间拓扑, 那么当 $t = n \to \infty$, $F(n) \to F(0) = 0$. 显然 F^{-1} 不连续.

(3) S^2 作为 $\mathbb{R}^3$ 的子空间是一个嵌入子流形. 要证明这一点只要找一个平整坐标卡即可. 显然普通坐标框架不行. 对每一点 $p \in S^2$, 至少有 p 的一个坐标, 例如坐标 $z_p \neq 0$. 设 $p_z > 0$, 由连续性, 存在 p 的一个邻域 $U \ni p$, 使得 $z_x \neq 0$, $\forall x \in U$. 定义一个映射 $\phi: U \to \mathbb{R}^3$ 如下

$$\begin{cases} X = x, \\ Y = y, \\ Z = z - \sqrt{1 - x^2 - y^2}. \end{cases}$$

容易检验 ϕ 的 Jacobi 矩阵在 p 点非奇异, 因此它是个局部微分同胚. 因此当 U 足够小时 $\phi: U \to \phi(U) \subset \mathbb{R}^3$ 是一个微分同胚. 于是考虑 (U, ϕ) 作为一个局部坐标卡, 我们有

$$S^2 \cap U = \{p \in U \,|\, Z(p) = 0\}.$$

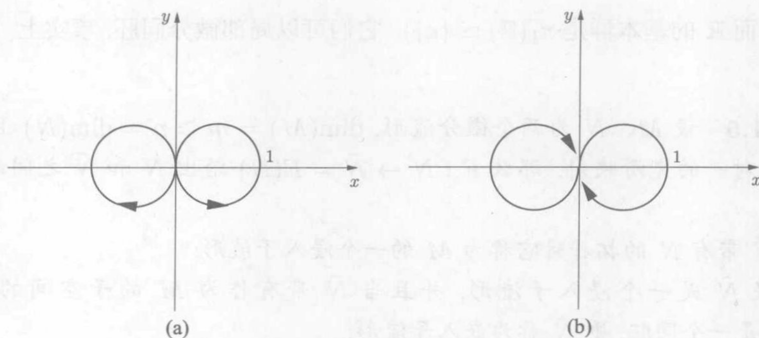


图 9.1.2　浸入、嵌入子流形

□

浸入子流形与嵌入子流形的根本区别在于子空间拓扑. 浸入子流形将自己的拓扑带入原空间, 嵌入子流形则不然, 它用原空间的继承拓扑 (即子空间拓扑) 作为自己的拓扑.

不难发现, 浸入子流形局部地看是一个嵌入子流形, 而嵌入子流形则是正规子流形.

定理 9.1.1　设 N、M 为维数分别为 n、m 的两个光滑流形. 一个光滑映射 $F: N\to M$ 具有定常维数, $\mathrm{rank}(F)=k$, 那么对每一点 $q\in F(N)$, $F^{-1}(q)$ 是一个 $n-k$ 维闭正规子流形.

证明　因为 F 的秩为 k, 设 $p\in N$ 及 $q=F(p)\in M$, 在 p 点我们假定 Jacobi 矩阵 J_F 的左上 $k\times k$ 子矩阵非奇异, 那么我们可改变 $p\in N$ 附近的局部坐标为

$$\begin{cases}X^1=F^1(x),\\ X^2=x^2,\quad \dim(X^1)=k,\,\dim(X^2)=n-k.\end{cases}$$

这是一个局部坐标变换, 因为变换的 Jacobi 矩阵局部非奇异. 在这个新坐标架下 F 变为

$$\begin{cases}F^1=X^1,\\ F^2=F^2(X^1).\end{cases}\tag{9.1.4}$$

注意到 F^2 只依赖于 X^1, 否则它就会与 F 的秩的假定矛盾. 现在在 $q=F(p)$ 附近我们将局部坐标改为

$$\begin{cases}Y^1=y^1,\\ Y^2=y^2-F^2(X^1(y_1,y_2)),\quad \dim(X^1)=k,\,\dim(X^2)=n-k.\end{cases}\tag{9.1.5}$$

这里 $X^1=X^1(y_1,y_2)$ 的存在由隐函数存在定理保证. 现在可以看到式 (9.1.4) 说明在 $F(N)$ 像上 F^2 只依赖于 $X^1=y_1$. 因此

$$\frac{\partial F^2}{\partial y_2}=o(\|y\|),$$

它表示式 (9.1.5) 是一个局部坐标变换. 利用两边的局部坐标, 我们可把 F 表示为

$$F_i(X_1, \cdots, X_n) = \begin{cases} X_i, & i \leqslant k, \\ 0, & i > k. \end{cases} \tag{9.1.6}$$

现在, 在 q 和 $p \in F^{-1}(q)$ 邻域的新坐标基下我们有

$$F^{-1}(q) \cap U = \{X \in U \mid X_1 = \cdots = X_k = 0\}.$$

因此 $F^{-1}(q)$ 是一个 $n-k$ 维正规子流形. □

实际上表达式 (9.1.6) 本身也很有用. 关于这种平整坐标的详细构造方法读者可参考文献 [107].

例 9.1.6 设 $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ 定义为

$$F(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}.$$

因为 $J_F = (2x, 2y, 2z)$, 对每一点 $p \in F^{-1}(1)$, 秩 $\mathrm{rank}(J_F) = 1$, 因为 x, y, z 在 p 点不可能同时为零. 因此椭球 $F^{-1}(1)$ 是一个 $\mathbb{R}^3$ 的正规子流形, 其维数为 $3 - 1 = 2$. □

在结束本节之前, 我们介绍一点分类问题. 流形的分类是一个有趣的问题. 例如, 我们问, 在三维空间 $\mathbb{R}^3$ 中有多少二维紧流形? 先看看在三维空间怎样构造二维紧流形. 球面显然是一个. 我们还可以对球面加工. 即在球面上开两个口, 然后加上一个手柄. 于是可以得到球面加上一些手柄, 如图 9.1.3 所示. 那么, 还能有其他形式吗? 下面的定理说明只有这些.

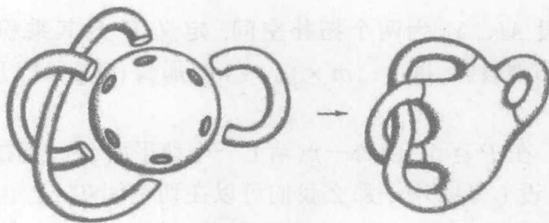


图 9.1.3 $\mathbb{R}^3$ 中的二维紧流形

定理 9.1.2 [52] 一个二维可定向紧流形 (在同胚意义下) 只能是一个球加上若干小柄.

一个二维紧流形的小柄个数称为其亏格 (genus). 因此, 一个二维可定向紧流形的拓扑结构由其亏格唯一确定. 这里加了 “可定向”, 如果不加 “可定向”, 那么, 还可以在球面上开一个口, 然后粘上一个 Möbius 带. 注意, Möbius 带的边界是个圆. 实际上, 一个球面开一个口, 粘一个 Möbius 带就成了 Clein 瓶了. 它不能定向, 也不可能在 $\mathbb{R}^3$ 上实现. 因

此, 一个二维紧流形只能是一个球加上若干小柄, 再加若干 Möbius 带. 而在三维空间中的 (或可定向) 二维紧流形只能是一个球加上若干小柄.

如果要求简单连通, 即基本群为平凡群, 即每条闭轨可收缩, 于是就不可能有手柄了. 于是有如下推论.

推论 9.1.1 [52] 简单连通二维紧流形是球面.

那么, 这个结论对 $n=3$ 对不对? 这就是著名的庞加莱猜想, 由庞加莱在 1904 年提出. 实际上, 这个结论对 $n \geqslant 3$ 都对.

9.2 纤维丛

纤维丛是微分几何的一个基本结构, 切丛是它的特例.

定义 9.2.1 一个纤维丛包括三个拓扑空间 B、M 和 Y, 分别称为全空间、基空间和丛空间, 以及一个映射 $p: B \to M$ 称为投影, 满足

(1) $p: B \to M$ 为满映射;

(2) 记 $Y_x := p^{-1}(x)$, $x \in M$, 那么 Y_x 与 Y 同胚, Y_x 称为 x 上的丛;

(3) 对每一点 $x \in M$, 存在一个坐标邻域 $x \in U \subset M$ 和一个同胚 $h: U \times Y \to p^{-1}(U)$, 使得

$$p \circ h(z, y) = z, \quad \forall z \in U,\ y \in Y,$$

$(p^{-1}(U), p)$ 称为一个丛邻域.

定义 9.2.2 一个截面是一个连续映射 $f: M \to B$, 满足 $p \circ f(x) = x$.

通常把一个纤维丛记作 (B, p, M), 这时 Y 被看作一个内部结构.

例 9.2.1 (1) 设 M、Y 为两个拓扑空间, 定义 B 为其乘积空间, $B = M \times Y$, $p: M \times Y \to M$ 为自然投影, 即 $p: (m \times y) \mapsto m$. 那么 (B, p, M) 形成一个纤维丛, 这个纤维丛称为乘积丛.

(2) 设 $M = S^2$. 在 $P \in M$ 的每一点粘上一个切平面 $\mathbb{R}^2$. 现在在每一点 $P \in M$ 的邻域 $P \in U \subset M$, 设 U 足够小, 那么我们可以在切空间 T_q 上定义一个连续的坐标轴 $(X_q,\ Y_q)$, 使 $t \in T_q$ 可表示为 (x_t, y_t), 它们分别为 t 在 X_q 和 Y_q 上的投影. 现在, 我们可以定义一个映射 $\phi: U \times \mathbb{R}^2 \to U \times \{(p,t) \mid p \in U, t \in T_p\}$ 如下: $\phi:\ (u,(x,y)) \mapsto (u,t)$ 这里 $t \in T_u$ 且 $t_x = x$, $t_y = y$. 这就构成了一个纤维丛 (图 9.2.1), 在这个丛中, 全空间为 $B = \{(u,t) \mid u \in S^2, t \in T_u\}$, 基空间为 $M = S^2$, 从空间为 $Y = \mathbb{R}^2$. 于是

$$B = \{(X,t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mid X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = 1,\ t_1X_1 + t_2X_2 + t_3X_3 = 0\}.$$

而且, 如果我们使用 $\mathbb{R}^3$ 上的坐标, 记 $P_i = (X^i, t^i) \in B$, $i = 1, 2$, 及 $X^i = (x_1^i, x_2^i, x_3^i)$, $t^i = (t_1^i, t_2^i, t_3^i)$, 那么 B 上的拓扑是由距离

$$d(P_1, P_2) = d(X^1, X^2) + d(t^1, t^2)$$

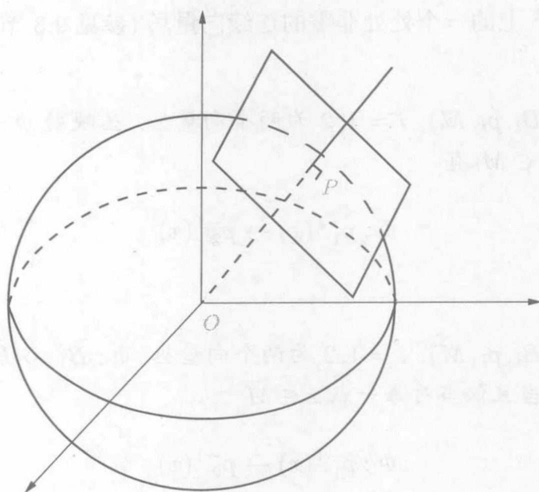


图 9.2.1　S^2 上的纤维丛

导出的. □

定义 9.2.3　设两个纤维丛 (B_i, p_i, M) 具有相同的基空间. 一个连续映射 $\Phi : B_1 \to B_2$ 称为丛映射, 如果 $p_1 = p_2 \circ \Phi$, 即图 9.2.2 可交换; 一个丛映射称为丛同构, 如果它是一个同构映射, 而且 Φ^{-1} 也是丛映射.

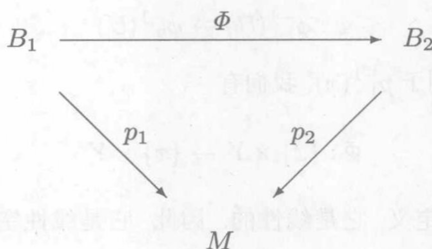


图 9.2.2　丛映射

定义 9.2.4　一个纤维丛 (B, p, M) 称为 k 维向量丛, 如果它的丛空间是 $Y = \mathbb{R}^k$, 并且同胚 $h : U \times Y \to p^{-1}(U)$ 限制到每一个点 $x \in U$, 得到

$$h_x : \{x\} \times Y \to p^{-1}(x),$$

这是一个向量空间同构, 即 $h_x \in GL(k, \mathbb{R})$.

一个向量丛称为平凡丛, 如果 $B \simeq M \times Y = M \times \mathbb{R}^n$.

例 9.2.2　考虑例 9.2.1 中的 (2). S^2 上的切丛显然是向量丛, 但它不是一个平凡丛. 要证明这一点, 假定 $B \simeq S^2 \times \mathbb{R}^2$. 令 $F : B \to S^2 \times \mathbb{R}^2$ 为其同胚. 任选 $0 \neq Y \in \mathbb{R}^2$, 那

么 $F^{-1}(S^2\times Y)$ 是 S^2 上的一个处处非零的连续向量场 (参见 9.3 节). 熟知, 这是不可能的[52]. □

定义 9.2.5 设 (B_i,p_i,M), $i=1,2$ 为两个向量丛. 丛映射 $\Phi:B_1\to B_2$ 称为向量丛映射, 如果对每个 $x\in M$ 有

$$\Phi:p_1^{-1}(x)\to p_2^{-1}(x)$$

是线性映射.

定理 9.2.1 设 (B_i,p_i,M), $i=1,2$ 为两个向量丛, $\Phi:B_1\to B_2$ 为向量丛映射. 那么, Φ 是一个丛同构, 当且仅当对每一点 $x\in M$

$$\Phi:p_1^{-1}(x)\to p_2^{-1}(x)$$

是一个向量空间同构, 即

$$\Phi|_{p_1^{-1}(x)}\in GL(k,\mathbb{R}).$$

证明 (必要性) 设 $x\in U_1\cap U_2$, 这里

$$\phi_i:U_i\times Y\to p_i^{-1}(U_i),\quad i=1,2$$

是相应的同胚映射. 记 $U=U_1\cap U_2$. 因为 $\Phi:B_1\to B_2$ 是一个同胚映射, 再由图的可交换性可知

$$\Phi:\phi_1^{-1}(U)\to\phi_2^{-1}(U)$$

是一个同胚映射. 将它限制于 $p_1^{-1}(x)$, 我们有

$$\Phi:\{x\}\times Y\to\{x\}\times Y$$

是双向一对一映射. 根据定义, 它是线性的. 因此, 它是线性空间的同构, 即 $\Phi|_{p_1^{-1}(x)}\in GL(k,\mathbb{R})$.

(充分性) 我们通过构造它的逆 Φ^{-1} 来证明这一点. 对每一点 $x\in M$ 由于 $\Phi|_{p_1^{-1}(x)}$ 是线性同构, 设 $\Psi|_{p_2^{-1}(x)}$ 为 $\Phi|_{p_1^{-1}(x)}$ 的逆. 这样, 我们点点构造了 Φ 的逆为 $\Psi|_{p_2^{-1}(x)}\in GL(k,\mathbb{R})$. 因此, 只要证明 Ψ 连续就够了.

利用前面的记号, 在 U 上我们有

$$\phi_2^{-1}\Phi\phi_1:(x,y)\mapsto(x,f_x(y))$$

这里, $f_x(y)\in GL(k,\mathbb{R})$ 对 x 连续. 但是, $\phi_1^{-1}\Psi\phi_2(x,y)$ 是 $\phi_2^{-1}\Phi\phi_1(x,y)$ 点点意义下的逆, 因此, 它可以表示为

$$\phi_1^{-1}\Psi\phi_2:(x,y)\mapsto(x,f_x^{-1}(y)),$$

这里 $f_x^{-1}(y)$ 是 $f_x(y)$ 的矩阵逆. 于是显然 $\phi_1^{-1}\Psi\phi_2$ 是连续的, 从而 Ψ 也是连续的. □

定义 9.2.6 设 $\pi: V \to B$ 为一向量丛. 一个子集 $W \subset V$ 称为一个子丛, 如果对每一点 $b \in B$, 存在一个邻域 $b \in U$, 以及 V 的一个丛邻域 $(\pi^{-1}(U), \psi)$, 使得

(1) ψ 定义于 $U \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^{k-l}$;

(2) ψ 可局部表示为

$$U \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^{k-l} \ni (x, u, v) \mapsto x \in U;$$

(3)

$$\psi(\pi^{-1}(U) \cap W) = U \times \mathbb{R}^l \times \{0\}.$$

在控制问题中引入纤维丛, 特别是向量丛, 主要用于研究流形和它的切空间. 因此, 拓扑空间均可用 C^r 流形代替, 而映射也可只考虑 C^r 映射.

9.3 流形上的向量场

设 M 为一 n 维光滑流形, $x \in M$. 记 $C^r(M, x)$ 为 x 点附近 C^r 函数集合, 即定义在 x 某个邻域的函数的集合. 设 $0 \in (a, b) \subset \mathbb{R}$, 且 $\theta: (a, b) \to M$ 为一光滑映射使得 $\theta(t)$, $t \in (a, b)$ 为 M 上的一条曲线, 且 $\theta(0) = x$.

对任一 $h \in C^r(M, x)$ 定义映射 $\theta_*(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}): C^r(M, x) \to \mathbb{R}$ 为

$$\theta_* \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \right) h = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (h \circ \theta) \bigg|_{t=0}. \tag{9.3.1}$$

直观地说, 这个映射将 $\mathbb{R}$ 上的一个导数算子变为 M 上的一个导数算子. 为了进一步分析, 我们将它表示在一个坐标卡下. 在一个关于 x 的坐标卡中我们将 θ 表示为分量形式

$$\theta(t) = (\theta_1(t), \cdots, \theta_n(t))^{\mathrm{T}}.$$

同时 h 可表示为 $h = h(x_1, \cdots, x_n)$, 那么式 (9.3.1) 可通过链式法则表示为

$$\theta_* \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \right) h = \sum_{i=1}^n \frac{\mathrm{d}\theta_i}{\mathrm{d}t} \bigg|_{t=0} \frac{\partial h}{\partial x_i}. \tag{9.3.2}$$

不难验证, 在局部坐标下算子 $\theta_*(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t})$ 可表示为

$$\theta_* \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \right) = \sum_{i=1}^n \frac{\mathrm{d}\theta_i}{\mathrm{d}t} \bigg|_{t=0} \frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{9.3.3}$$

显见式 (9.3.2) 是 $\mathbb{R}$ 线性的, 即当 $a, b \in \mathbb{R}$ 时,

$$(a\theta_1 + b\theta_2)_* \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \right) h = a(\theta_1)_* \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \right) h + b(\theta_2)_* \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \right) h.$$

因此, 在一个局部坐标系中所有经过 $x \in M$ 的曲线形成一个向量空间, 它以 $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right\}$ 为基底. 它可以看作作用在 $C^r(M, x)$ 上的方向导数空间.

定义 9.3.1 对一个给定点 $x \in M$, 作用在 $C^r(M,x)$ 上的方向导数空间称为 M 在 x 处的切空间, 记作 $T_x(M)$.

这里有几点需要说明. 首先, 对给定的坐标卡 (U,ϕ) 我们将 $p \in U$ 与 $\phi(p) = (x_1^p, \cdots, x_n^p) \in \mathbb{R}^n$ 等同. 例如, 当我们说 $\theta(t) = (\theta_1(t), \cdots, \theta_n(t))$, 实际上它应该是 $\phi \circ (\theta(t))$, 因为只有在 $\phi(U) \subset \mathbb{R}^n$ 坐标才有意义. 当不会发生混淆时这个等同很方便, 以后我们经常这样, 它称为局部坐标表示. 同样, $h = h(x_1, \cdots, x_n)$ 是 $h \circ \phi^{-1}$ 的局部坐标表示.

因为切空间是在局部坐标系下定义的, 要使它有意义我们必须证明它独立于局部坐标架的选择, 即同一个 θ 在不同坐标架下起相同的作用. 证明不难, 我们留给读者.

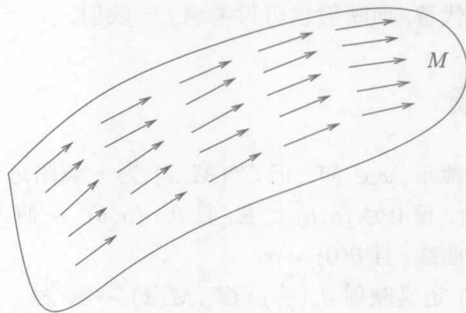


图 9.3.1 切向量

在一个给定的坐标卡下, 一个切向量 $X_p \in T_p(M)$ (见图 9.3.1) 可以表示为

$$X_p = \sum_{i=1}^{m} v_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

如同在线性代数中一样, 基底可以省略, 因此 X_p 可以简单地写成一个向量

$$X_p = (v_1, \cdots, v_n)^{\mathrm{T}}.$$

这就是说, 对任一 $h \in C^r(M,p)$, X 对它的作用为

$$X_p(h) = \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial}{\partial x_i}(h).$$

定义 9.3.2 设 M、N 为两个光滑流形, 且 $F: M \to N$ 为一光滑映射. 对一点 $p \in M$ 及 $F(p) \in N$, 我们定义一个映射 $F_*: T_p(M) \to T_{F(p)}(N)$ 如下

$$F_*(X_p)h = X_p(h \circ F), \quad X_p \in T_p(M),\ h \in C^r(N, F(p)). \tag{9.3.4}$$

下面, 我们给出 $F_*(X_p)$ 的一个局部坐标表示, 它在应用上非常重要.

设 x 和 y 分别为 $p \in M$ 和 $F(p) \in N$ 附近的局部坐标, X_p, $F_*(X_p)$ 分别表示为

$$X_p = a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + a_m \frac{\partial}{\partial x_m},$$

$$F_*(X_p) = b_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + \cdots + b_n \frac{\partial}{\partial y_n},$$

并且 $F: M \to N$, 即 $x \mapsto y$, 表示为

$$y_i = f_i(x_1, \cdots, x_m), \quad i = 1, \cdots, n.$$

那么式 (9.3.4) 可表示成

$$\begin{aligned} F_*(X_p)h = X_p(h \circ F) &= \sum_{i=1}^{m} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}(h \circ F) \\ &= \sum_{i=1}^{m} a_i \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_j} h \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f_j}{\partial x_i} a_i \right) \frac{\partial}{\partial y_j} h \bigg|_{F(p)} := \sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial}{\partial y_j} h(y) \bigg|_{F(p)}, \end{aligned}$$

即

$$b_j = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f_j}{\partial x_i} a_i, \quad j = 1, \cdots, n.$$

将它写成矩阵形式

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m} \end{pmatrix}_p \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}, \tag{9.3.5}$$

或缩写成

$$F_*(X_p) = J_F(p) X_p.$$

因为 X_p 本质上是一个方向导数, 它具有导数的特征. 例如, 由定义容易推知, 如果 $f, g \in C^r(M, p)$ 且 $a, b \in \mathbb{R}$, 则

$$\begin{cases} X_p(af + bg) = aX_p(f) + bX_p(g), \\ X_p(fg) = X_p(f)g + fX_p(g). \end{cases} \tag{9.3.6}$$

事实上, $T_p(M)$ 是所有 $C^r(M, p) \to \mathbb{R}$ 满足式 (9.3.6) 映射的集合. 细节见文献 [52].

现在我们可以将 M 上通过不同点的切空间放到一起, 即得

$$T(M) = \bigcup_{x \in M} \{(x, T_x(M))\}.$$

在 M 上的每一个坐标卡 (U, ϕ) 中我们可以定义一个映射 $\Psi: \phi(U) \times \mathbb{R}^n \to T(M)$ 为

$$(x_1, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}} \times (a_1, \cdots, a_n)^{\mathrm{T}} \mapsto \left(q, \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right),$$

这里 $(x_1, \cdots, x_n) = \phi(q)$.

现在 Ψ 是 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 的一个开集到 $T(M)$ 的微分同胚, 因此我们可将 $(\Psi(\phi(U) \times \mathbb{R}^n), \Psi^{-1})$ 看作 $T(M)$ 的一个坐标卡. 容易验证如下的事实:

(1) 所有这样的坐标卡形成 $T(M)$ 的一个开覆盖.

(2) 如果 M 是一个 C^r 流形, 那么这些坐标卡也是 C^r 相容的.

因此如果 M 是一个 n 维 C^r 流形, 那么根据以上的结构, $T(M)$ 是一个 $2n$ 维 C^r 流形.

设 $p: T(M) \to M$ 为一自然投影: $(p, T_p) \mapsto p$, 那么 $(T(M), p, M)$ 成为一个向量丛, 它称为 M 的切丛.

在多数情况下, 我们只简单地使用 $T(M)$ 的另一种表达, 它不直接包含第一个分量, 而是隐含它, 即

$$T(M) = \bigcup_{x \in M} T_x(M).$$

除非要强调丛结构, 我们总采用这个简单形式.

定义 9.3.3 M 上的一个向量场 X 是一个映射 $X: M \to T(M)$, 它对每一点 $q \in M$ 指定 $T_q(M)$ 上的一个向量. 在局部坐标下 X 可表示为

$$X = \sum_{i=1}^{n} a_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

X 称为 C^r 向量场, 如果所有的 $a_i(x)$, $i = 1, \cdots, n$ 均为 C^r 函数.

M 上光滑向量场的集合记作 $V^r(M)$, 这里 r 可以是任何非负整数, 或 ∞, 或 ω, 后者表示解析. 当光滑度不重要时, 它可以简单记作 $V(M)$.

回顾前面的讨论, 当 M 和 N 为两个光滑流形, $F: M \to N$ 为一光滑映射, F 可以将 M 上的切向量映为 N 上的切向量. 准确地说, 设 $q \in M$ 及 $F(q) \in N$, $X_q \in T_q(M)$, 那么切向量 $F_*(X_q) \in T_{F(q)}(N)$, 它由式 (9.3.4) 所定义, 在局部坐标下它可用式 (9.3.5) 计算.

现在很自然要问: F 能将 M 上的一个向量场映为 N 上的一个向量场吗? 一般地说不能. 请看以下的例子.

例 9.3.1 考虑一个 $\mathbb{R}$ 上的向量场 $X = (t^2+1)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$. 设 $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ 定义为

$$F: t \mapsto \left(\sin\frac{\pi}{2}t, \cos\frac{\pi}{2}t\right).$$

选择任一 t, 譬如 $t = 1$, 那么 $F_*: T_1(\mathbb{R}) \to T_{(1,0)}(\mathbb{R}^2)$ 将 $X|_{t=1} = 2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ 映为

$$F_*(X_{t=1}) = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}F_1}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}F_2}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix}\Bigg|_{t=1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in T_{(1,0)}(\mathbb{R}^2).$$

对任一 t 我们可以这样定义 F_*. 但显然 $\{F_*(X_t) \,|\, t \in \mathbb{R}\}$ 不是 $\mathbb{R}^2$ 上的向量场, 因为它不是处处有定义. □

一般地说, 如果 $F: M \to N$ 是一个微分同胚且 $X \in V(M)$, 那么 $F_*(X)$ 是 N 上的一个向量场, 而且

$$F_*(X) = J_F X(\circ F^{-1}). \tag{9.3.7}$$

式 (9.3.7) 是式 (9.3.5) 的一个推广.

例 9.3.2 设 $T \in GL(n, \mathbb{R})$, $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 定义为 $y = Tx$, 且

$$X = (v_1(x), \cdots, v_n(x))^{\mathrm{T}}.$$

那么

$$F_*(X) = J_F X|_{y=Tx} = TX(T^{-1}y).$$

下面给一个特殊例子. 设 $X = (\sin(x_1 + x_2), \exp(x_1))^{\mathrm{T}}$ 且 $y = Tx$, 这里

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

那么

$$\begin{aligned} F_*(X) &= \left. \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin(x_1 + x_2) \\ \mathrm{e}^{x_1} \end{pmatrix} \right|_{y=Tx} \\ &= \left. \begin{pmatrix} \sin(x_1 + x_2) \\ \mathrm{e}^{x_1} + \sin(x_1 + x_2) \end{pmatrix} \right|_{x=T^{-1}y} = \begin{pmatrix} \sin y_2 \\ \mathrm{e}^{y_1} + \sin y_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

定义 9.3.4 设 $\theta: I \to M$ 为 M 上的一条曲线, 这里 I 为一区间, $0 \in I \subset \mathbb{R}$. 如果存在一个向量场 $X \in V(M)$, $x_0 \in M$, 使得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\theta(t) = X_{\theta(t)}, \quad \theta(0) = x_0$$

则 $\theta(t)$ 称为 X 的积分曲线, 且其初值为 $\theta(0) = x_0$.

作为一个常微分方程的解, $\theta(t)$ 具有以下性质:

(1) $\theta(t) \circ \theta(s) = \theta(t + s)$;

(2) $\theta(-t) \circ \theta(t) = \theta(0) = id$, 这里 id 是恒等映射.

因此 $\theta(t)$ 相对于 t 形成一个群 (假定 $\theta(t)$ 总有定义). 这个群称为由 X 生成的单参数群.

为表示积分曲线对向量场的依赖, 上述单参数群通常记作 $\mathrm{e}_t^X(x_0)$. 当用这个记号时, 我们总假定 t 属于最大的区间 $0 \in I \subset \mathbb{R}$, 使在这个区间上积分曲线有定义.

定义 9.3.5 一个向量场 $X \in V(M)$ 称为完备的, 如果它完全可积, 即对任一 $x_0 \in M$ 积分曲线对所有的 $t \in (-\infty, \infty)$ 有定义.

如果一个 $\mathbb{R}^n$ 上的向量场 X 满足 Lipschitz 条件, 即存在一个 $N>0$ 使得

$$\|X(x)-X(y)\| \leqslant N\|x-y\|,$$

则它是完备的. 在流形中, 如果在每一个坐标卡中 Lipschitz 条件均成立, 则 X 是完备的.

引理 9.3.1 设 $\mathrm{e}_t^X(x_0)$ 为 X 的积分曲线. 如果存在 x_0 的一个邻域 $U \ni x_0$ 使得 $\mathrm{e}_t^X(x_0)$ 在 $U\times I$ 上有定义. 那么对任何 $t_0\in I$ 存在一个邻域 $U_0\ni x_0$ 使得 $\mathrm{e}_{t_0}^X: U_0\to \mathrm{e}_{t_0}^X(U_0)$ 是一个微分同胚.

证明 我们从 $t=0$ 出发. 因为 e_0^X 是一个恒等映射, 故存在一个开邻域 $I_0\ni t$ 使得 e_t^X 在 x_0 的 Jacobi 矩阵非奇异, 即存在一个邻域 $U_{x_0}\ni x_0$ 及 $I_0\ni 0$ 使得对每个 $t\in I_0$, $\mathrm{e}_t^X: U_{x_0}\to \mathrm{e}_t^X(U_{x_0})$ 是一个微分同胚.

同样地, 对每个 $t\in I$ 存在 $U_{x_t}\ni \mathrm{e}_t^X(x_0)$ 和一个开邻域 $I_t\ni t$ 使得 $\mathrm{e}_t^X: U_{x_t}\to \mathrm{e}_t^X(U_{x_t})$ 是一个微分同胚. 现在对任何 $T\in I$, $\{I_t\,|\,0\leqslant t\leqslant T\}$ 形成一个 $[0,T]$ 的开覆盖. 因此有一个有限子覆盖 $\{I_{t_i}\,|\,i=1,\cdots,k\}$. 现在选

$$U_0=\bigcap_{i=1}^{k}\mathrm{e}_{-t_1}^X\cdots \mathrm{e}_{-t_{i-1}}^X(U_{x_{t_i}}),$$

于是不难看出 $\mathrm{e}_T^X: U_0\to \mathrm{e}_T^X(U_0)$ 是一个微分同胚. 因为 $T\in I$ 是任选的, 结论获证. □

上面的引理给出这样一个图像: 对任何 $x_0\in M$ 存在一个邻域 $U_0\ni x_0$ 和一个区间 $I_0\ni 0$, 使得 U_0 沿时间轴以微分同胚的形式移动. 它看上去像一流动的管, 因此积分曲线族称为 X 的流.

命题 9.3.1 设 X 为一完备向量场, 那么对任一固定的 $t\in\mathbb{R}$, $\mathrm{e}_t^X: M\to M$, 定义为: $x\mapsto \mathrm{e}_t^X(x)$, 是一个微分同胚.

证明 我们已经证明过对任一向量场 X 只要对某个 t, e_t^X 有定义, 则它是一个局部微分同胚. 现在 e_t^X 对任何 $x\in M$ 及任何 $t\in\mathbb{R}$ 均有意义, 故我们只要证明映射是一对一且映上即可. 映上是显然的, 因为对任一 $y\in M$, $\mathrm{e}_t^X\left(\mathrm{e}_{-t}^X(y)\right)=y$. 而一对一则是由于常微分方程解的唯一性. □

命题 9.3.2 设 $F: M\to N$ 为一微分同胚, $X\in V(M)$, $\mathrm{e}_t^X(x_0)$ 是 X 的积分曲线且初值 $x(0)=x_0$, 那么 $F_*(X)$ 的积分曲线为 X 的积分曲线的像. 准确地说

$$\mathrm{e}_t^{F_*(X)}(F(x_0))=F\circ \mathrm{e}_t^X(x_0). \tag{9.3.8}$$

证明 我们对每一个坐标卡证明即可, 换言之, 在局部坐标形式下证明即可. 利用链式法则我们有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F\circ \mathrm{e}_t^X(x_0)=J_F\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathrm{e}_t^X(x_0)]=J_FX(\circ F^{-1})=F_*(X),$$

其初值为 $\mathrm{e}_0^{F_*(X)}(F(x_0))=F(x_0)$. □

下面讨论向量场的李代数.

注意到一个切向量 X_p 是 $C^r(M,p)$ 上的一个算子, 如果 $X \in V(M)$ 且 $f \in C^r(M)$, 则对任一 $p \in M$, $X_p \in T_p(M)$ 且 $f \in C^r(M,p)$. 因此我们可以自然地定义 X 对 f 的作用如下

$$[X(f)]_p := X_p(f).$$

显然 $X(f)$ 是处处有定义的. 而且, 如果我们将上式关系表示在一个坐标系下, 即

$$X = \sum_{i=1}^{n} v_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}; \quad f = f(x_1, \cdots, x_n),$$

则其作用变为

$$X(f) = \sum_{i=1}^{n} v_i(x)\frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

显然 $X(f) \in C^{r-1}(M)$. 因此一个向量场 X 可以看作一个映射 $X : C^r(M) \to C^{r-1}(M)$. 特别是, 如果 $r = \infty$ 或 $r = \omega$, 它变为 C^∞ (或 C^ω) 到自身的一个映射.

下面我们给 $V(M)$ 一个代数结构. 首先, 给出李代数的概念.

定义 9.3.6 $\mathbb{R}$ 上的一个向量空间 V 连同乘法, 记作 $[X,Y]$, $X,Y \in V$, 称为一个李代数, 如果对任何 $X,Y,Z \in V$ 有

(1) $[(aX_1 + bX_2), Y] = a[X_1,Y] + b[X_2,Y]$;

(2) $[X,Y] = -[Y,X]$;

(3) (Jacobi 恒等式) $[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$,

这里的乘法 $[X,Y]$ 通常称为李括号.

现在考虑向量场集合 $V(M)$. 定义李括号如下

$$[X,Y] = XY - YX, \tag{9.3.9}$$

即对每一点 $p \in M$ 及 $h \in C_p^r(M)$, 有

$$[X,Y]_p(h) = X(Y(h))|_p - Y(X(h))|_p.$$

首先要证明这个定义是合理的, 即 $[X,Y]_p \in T_p(M)$. 换言之, 我们必须证明 $[X,Y]$ 满足式 (9.3.6). 这是容易验证的, 我们留给读者.

命题 9.3.3 设 $X, Y \in V(M)$, 且在局部坐标下

$$X = (a_1(x), \cdots, a_n(x))^{\mathrm{T}}, \quad Y = (b_1(x), \cdots, b_n(x))^{\mathrm{T}},$$

那么

$$[X,Y] = \frac{\partial Y}{\partial x}X - \frac{\partial X}{\partial x}Y, \tag{9.3.10}$$

这里 $\frac{\partial Y}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial X}{\partial x}$ 分别为 X 和 Y 的 Jacobi 矩阵, 例如

$$\frac{\partial Y}{\partial x}=\begin{pmatrix}\frac{\partial b_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial b_1}{\partial x_n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial b_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial b_n}{\partial x_n}\end{pmatrix}.$$

证明 记

$$[X,Y]=\sum_{i=1}^{n}c_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{9.3.11}$$

选择 $h=x_j$, 那么式 (9.3.11) 变为 $[X,Y](h)=c_j(x)$. 另一方面, 根据定义

$$\begin{aligned}[X,Y](h) &= X(Y(h))-Y(X(h))\\ &= \sum_{i=1}^{n}a_i(x)\tfrac{\partial}{\partial x_i}(b_j(x))-\sum_{i=1}^{n}b_i(x)\tfrac{\partial}{\partial x_i}(a_j(x)),\end{aligned}$$

因此

$$c_j(x)=\sum_{i=1}^{n}a_i(x)\frac{\partial b_j(x)}{\partial x_i}-\sum_{i=1}^{n}b_i(x)\frac{\partial a_j(x)}{\partial x_i},\quad j=1,\cdots,n. \tag{9.3.12}$$

显见式 (9.3.10) 是式 (9.3.12) 的矩阵形式. □

为理解两个向量场的李括号的几何意义, 我们考虑如图 9.3.2 所示的图形. 设 $X,Y\in V(M)$. 考虑复合的积分曲线

$$\mathrm{e}_{-t}^{Y}\mathrm{e}_{-t}^{X}\mathrm{e}_{t}^{Y}\mathrm{e}_{t}^{X}(x_0).$$

它的物理意义是: 一个粒子从 x_0 出发, 沿 X 方向走. t 时间后, 它从 X 方向转到 Y 方向, 沿 Y 方向再走时间 t. 然后沿 X 相反方向走同样时间. 最后, 沿 Y 相反方向走同样时间. 如果 X 和 Y 为定常向量, 这个粒子显然会回到原来的出发点 x_0; 但如果它们不是定常的, 那么终点 x_e 就可能不是初始点 x_0. 粒子最后的位移方向是什么? 粗略地说, 从 x_0 到 x_e 的方向就是李括号 $[X,Y]|_{x_0}$ 的方向. 准确地说

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^2}\left(\mathrm{e}_{-t}^{Y}\mathrm{e}_{-t}^{X}\mathrm{e}_{t}^{Y}\mathrm{e}_{t}^{X}(x_0)-x_0\right)=[X,Y]_{x_0}. \tag{9.3.13}$$

利用 Taylor 展开式

$$\mathrm{e}_t^X(x)=x+X(x)t+0(|t|^2),$$

不难证明式 (9.3.13). 我们将证明的细节留给读者, 因为非线性系统几何理论的创始人 Brockett [54] 曾说过: 要理解李括号的意义, 你至少在一生中要把上面的证明做一次.

命题 9.3.4 $V(M)$ 带上上述定义的李括号是一个李代数.

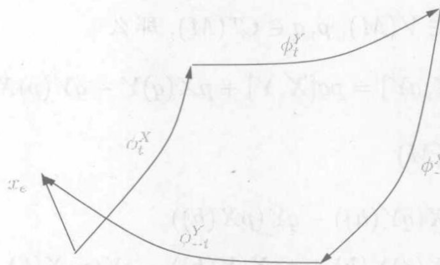


图 9.3.2 向量场李括号的几何意义

证明 李代数定义 9.3.6 中的 (1) 和 (2) 可由定义式 (9.3.9) 或计算式 (9.3.11) 得到. 我们证明 Jacobi 恒等式: 设 $h \in C^r(M)$, 那么

$$
\begin{aligned}
&([X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]])(h)\\
&=X(YZ(h)-ZY(h))-(YZ-ZY)X(h)+Y(ZX(h)-XZ(h))\\
&\quad-(ZX-XZ)Y(h)+Z(XY(h)-YX(h))-(XY-YX)Z(h)\\
&=0,\quad \forall h\in C^r(M).
\end{aligned}
$$

□

例 9.3.3 考虑一个控制系统

$$
\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{9.3.14}
$$

这里 $f(x)$ 和 $g(x)$ 可看作 $\mathbb{R}^n$ 上的向量场. 那么由 $f(x)$ 和 $g(x)$ 生成的 $V(\mathbb{R}^n)$ 的李子代数记作

$$
\mathcal{C} = \{f(x), g(x)\}_{LA},
$$

它称为能控性李代数[79].

如果 $f(x) = Ax$, $g(x) = b$, 这里 A 是一个 $n \times n$ 矩阵, $b \in \mathbb{R}^n$, 那么系统退化为线性系统. 简单计算可得

$$
\begin{aligned}
&[f,g] = -Ab\\
&[f,[f,g]] = A^2 b\\
&\vdots\\
&[f,\cdots,[f,g]\cdots] = (-1)^k A^k b.
\end{aligned}
$$

注意, 若以上的多重李括号包括多于一个的 b, 则其结果必为零向量. 所以要得到非零向量, b 只能出现一次. 于是能控性李代数变为

$$
\mathcal{C} = \operatorname{span}\{b, Ab, \cdots, A^{n-1}b\}.
$$

由线性系统理论可知[116], 线性系统能控, 当且仅当 $\operatorname{rank}(\mathcal{C}) = n$. □

命题 9.3.5 设 $X,Y\in V(M)$, $p,q\in C^r(M)$, 那么

$$[pX,qY]=pq[X,Y]+pX(q)Y-qY(p)X. \tag{9.3.15}$$

证明 对任一 $h\in C^r(M)$

$$\begin{aligned}[pX,qY]h &= pX(qY(h))-qY(pX(h))\\ &= pX(q)Y(h)+pqX(Y(h))-qY(p)X(h)-qpY(X(h))\\ &= pq[X,Y](h)-pX(q)Y(h)-qY(p)X(h)\\ &= (pq[X,Y]-pX(q)Y-qY(p)X)(h),\end{aligned}$$

因为 h 是任意的, 结论显见. □

9.4 李导数

对一个给定流形 M 及 $x\in M$, 在点 $x\in M$ 的切空间 $T_x(M)$ 是一个有穷维向量空间. 由线性代数知道, 它有一个对偶空间, 记作 $T_x^*(M)$. 然后我们定义 M 的余切空间.

定义 9.4.1 (1) 流形 M 的余切空间定义为

$$T^*(M)=\bigcup_{x\in M}T_x^*(M).$$

(2) 一个余向量场 ϕ 是一个规则, 它在每一点 $x\in M$ 指定一个余切向量 $\phi(x)\in T_x^*(M)$.

例 9.4.1 (1) 在 $\mathbb{R}^3$ 上考虑两个光滑函数

$$h(x)=\cos(x_1)+\sin(x_2),\quad w(x)=-\sin(x_2)+\cos(x_3).$$

那么 $h(x)$ 的微分是

$$\mathrm{d}h(x)=\sum_{i=1}^3\frac{\partial h(x)}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i=-\sin(x_1)\mathrm{d}x_1+\cos(x_2)\mathrm{d}x_2.$$

我们很自然地可将 $\{\mathrm{d}x_i\,|\,i=1,2,3\}$ 看作一个基底, 那么 $\mathrm{d}h(x)$ 可以简单地表示成一个行向量 $\mathrm{d}h(x)=(-\sin(x_1),\cos(x_2),0)$. 点点看, $\mathrm{d}h(x)$ 是 $T_x^*(\mathbb{R}^3)$ 中的余向量. 因此我们说 $\mathrm{d}h\in T^*(\mathbb{R}^3)$. 同样我们有

$$\mathrm{d}w(x)=\sum_{i=1}^3\frac{\partial w(x)}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i=-\cos(x_2)\mathrm{d}x_2-\sin(x_3)\mathrm{d}x_3.$$

(2) 利用它们我们可定义一个余分布 Ω 如下

$$\Omega=\mathrm{span}\{\mathrm{d}h,\mathrm{d}w\},$$

准确地说

$$\Omega(x) = \mathrm{span}\{\mathrm{d}h(x), \mathrm{d}w(x)\}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^3.$$

□

由上述例子的启发, 我们一般地选 $\{\mathrm{d}x_i,\ i = 1, \cdots, n\}$ 为 $T^*(M)$ 在一个坐标卡下的基底. 现在如果有一个向量场 $X(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$ 和一个余向量 $\mathrm{d}h(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial h(x)}{\partial x_i} \mathrm{d}x_i$, 那么它们的内积为

$$\langle \mathrm{d}h(x), X(x) \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i(x) \frac{\partial h(x)}{\partial x_i},$$

它就是 X 对 $h(x)$ 的作用. 如果将 X 单位化, 它也是 h 在 X 方向的方向导数.

一个余向量场也称 1-形式. 利用 $\{\mathrm{d}x_i,\ i = 1, \cdots, n\}$ 作为 $T^*(M)$ 在一个坐标卡下的基底, 则一个余向量场可表示为 $\phi(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i(x) \mathrm{d}x_i$.

定义 9.4.2 一个 1-形式 $\phi(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i(x) \mathrm{d}x_i$ 称为闭 1-形式, 如果它满足

$$\frac{\partial \phi_i(x)}{\partial x_j} = \frac{\partial \phi_j(x)}{\partial x_i}, \quad i \neq j. \tag{9.4.1}$$

$\phi(x)$ 称为恰当 1-形式, 如果存在一个光滑函数 $h(x)$ 使得 $\phi(x) = \mathrm{d}h(x)$.

定理 9.4.1 (Poincaré 引理[43]) 一个闭 1-形式局部地说也是一个恰当 1-形式. 如果 M 是一个简单连通的拓扑空间, 一个闭 1-形式全局地说也是一个恰当 1-形式.

定义 9.4.3 设 $F: M \to N$ 为一微分同胚.

(1) 对于一个函数 $f(x) \in C^r(N)$, F 的一个导出映射 $F^*: C^r(N) \to C^r(M)$ 定义为

$$F^*(f) = f \circ F \in C^r(M).$$

(2) 对于一个向量场 $X \in V^r(M)$, F 的一个导出映射 $F_*: V^r(M) \to V^r(N)$ 定义为

$$F_*(X)(h) = X(h \circ F), \quad \forall h \in C^r(N).$$

(3) 对于一个余向量场 $\phi \in V^{*r}(N)$, F 的一个导出映射 $F^*: V^{*r}(N) \to V^{*r}(M)$ 定义为

$$\langle F^*(\phi), X \rangle = \langle \phi, F_*(X) \rangle, \quad \forall X \in V^r(M).$$

如果 F 是一个局部微分同胚, 那么上述映射也是局部定义的.

定义 9.4.4 设 $X \in V(M)$, $f \in C^r(M)$. 那么 f 对 X 的李导数, 记作 $L_X(f)$, 定义为

$$L_X(f) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left[(\mathrm{e}_t^X)^* f(x) - f(x) \right]. \tag{9.4.2}$$

命题 9.4.1 在局部坐标下李导数 (9.4.2) 可表示为

$$L_X(f) = \langle \mathrm{d}f, X\rangle = \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial f}{\partial x_i}. \tag{9.4.3}$$

证明 由定义: $(\mathrm{e}_t^X)^* f(x) = f(\mathrm{e}_t^X(x))$, 它对 t 的 Taylor 展式为

$$f(\mathrm{e}_t^X(x)) = f(x) + t\mathrm{d}f\cdot X(x) + O(t^2),$$

将它代入式 (9.4.2) 即得式 (9.4.3). □

定义 9.4.5 设 X, $Y \in V(M)$. Y 对 X 的李导数, 记作 $\mathrm{ad}_X(Y)$, 定义为

$$\mathrm{ad}_X(Y) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[(\mathrm{e}_{-t}^X)_* Y(\mathrm{e}_t^X(x)) - Y(x)\right]. \tag{9.4.4}$$

命题 9.4.2 在局部坐标下李导数 (9.4.4) 可表示为

$$\mathrm{ad}_X(Y) = J_Y X - J_X Y = [X, Y], \tag{9.4.5}$$

这里 J_Y、J_X 分别为 Y 和 X 的 Jacobi 矩阵.

证明 利用 Taylor 展式, 我们有

$$\mathrm{e}_t^X(x) = x + (tX) + O(t^2), \tag{9.4.6}$$

$$Y(\mathrm{e}_t^X(x)) = Y(x) + J_Y(tX) + O(t^2). \tag{9.4.7}$$

利用式 (9.4.6), e_{-t}^X 的 Jacobi 矩阵

$$J_{\mathrm{e}_{-t}^X} = I - tJ_X + O(t^2). \tag{9.4.8}$$

由式 (9.4.6)~式 (9.4.8) 可得

$$\begin{aligned}(\mathrm{e}_{-t}^X)_* Y(\mathrm{e}_t^X(x)) &= (I - tJ_X + O(t^2))(Y(x) + J_Y(tX) + O(t^2))\\ &= Y(x) + t(J_Y X - J_X Y) + O(t^2).\end{aligned} \tag{9.4.9}$$

代入式 (9.4.4) 即得式 (9.4.5). □

定义 9.4.6 设 $X \in V(M)$ 及 $\omega \in V^*(M)$. ω 关于 X 的李导数, 记作 $L_X(\omega)$, 定义为

$$L_X(\omega) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[(\mathrm{e}_t^X)^*\omega(\mathrm{e}_t^X(x)) - \omega(x)\right]. \tag{9.4.10}$$

命题 9.4.3 在局部坐标下李导数 (9.4.10) 可以表示为

$$L_X(\omega) = (J_\omega X)^{\mathrm{T}} + \omega J_X. \tag{9.4.11}$$

证明 类似于命题 9.4.1 和命题 9.4.2 的证明, 我们利用 Taylor 展式可得

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{e}_t^X)^*\omega(\mathrm{e}_t^X(x)) &= (\omega(x)+t(J_\omega X)^{\mathrm{T}}+O(t^2))(I+tJ_x+O(t^2))\\
&= \omega(x)+t(J_\omega X)^{\mathrm{T}}+t\omega(x)J_X+O(t^2),
\end{aligned}
$$

这里转置是由于通常作为约定将余向量场表示为列向量. 将上式代入式 (9.4.10), 即为式 (9.4.11). □

李导数 $\mathrm{ad}_X Y$ 的几何意义是向量场 Y 沿 X 的积分曲线的变化量. 图 9.4.1 给出一个描述. 对于函数 h 或余向量场 ω, 相应的李导数 $L_X(f)$ 及 $L_X(\omega)$ 具有类似的几何意义.

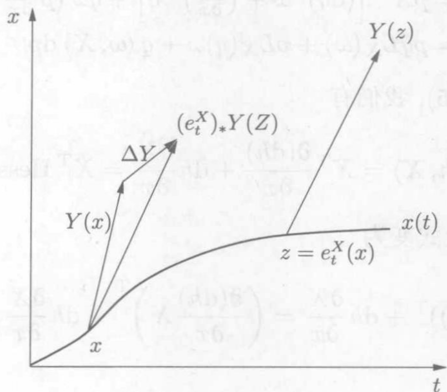


图 9.4.1 李导数 $\mathrm{ad}_X Y$

下面是一些有用的公式.

命题 9.4.4 设 $p,\ q,\ h\in C^r(M)$, $X,\ Y\in V^r(M)$, $\omega\in V^{*r}(M)$. 那么

(1) (Leibniz 公式)

$$
L_X\langle\omega,Y\rangle=\langle L_X\omega,Y\rangle+\langle\omega,L_XY\rangle; \tag{9.4.12}
$$

(2)

$$
L_{pX}(q\omega)=pqL_X(\omega)+pL_X(q)\omega+q\langle\omega,X\rangle\,\mathrm{d}h; \tag{9.4.13}
$$

(3) 如果 $\omega=\mathrm{d}h$, 则

$$
L_X(\omega)=d\langle\omega,X\rangle. \tag{9.4.14}
$$

证明 (1) 首先我们证明另一个公式, 它本身也是有用的.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\langle\omega,X\rangle &= \mathrm{d}\sum_{i=1}^n\omega_iX_i=\sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^n\tfrac{\partial\omega_i}{\partial x_j}\right)x_i+\sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^n\tfrac{\partial X_i}{\partial x_j}\right)\omega_i\\
&= X^{\mathrm{T}}\tfrac{\partial\omega}{\partial x}+\omega\tfrac{\partial X}{\partial x}.
\end{aligned} \tag{9.4.15}
$$

将它用于式 (9.4.12), 于是

$$\text{左端} = \langle \mathrm{d}\langle \omega, Y\rangle, X\rangle = \left(Y^{\mathrm{T}}\tfrac{\partial \omega}{\partial x} + \omega\tfrac{\partial Y}{\partial x}\right)X = Y^{\mathrm{T}}\tfrac{\partial \omega}{\partial x}X + \omega\tfrac{\partial Y}{\partial x}X,$$

$$\text{右端} = \left(X^{\mathrm{T}}\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)^{\mathrm{T}} + \omega\frac{\partial X}{\partial x}\right)Y + \omega\frac{\partial Y}{\partial x}X - \omega\frac{\partial X}{\partial x}Y.$$

因此, 等式成立.

(2)

$$\begin{aligned}L_{pX}(q\omega) &= pX^{\mathrm{T}}\left(\tfrac{\partial(q\omega)}{\partial x}\right)^{\mathrm{T}} + q\omega\tfrac{\partial pX}{\partial x}\\ &= pX^{\mathrm{T}}\left[(\mathrm{d}q)^{\mathrm{T}}\omega + \left(\tfrac{\partial\omega}{\partial x}\right)^{\mathrm{T}}q\right] + q\omega\left(p\tfrac{\partial X}{\partial x} + X\mathrm{d}p\right)\\ &= pqL_X(\omega) + pL_X(q)\omega + q\langle\omega, X\rangle\,\mathrm{d}p.\end{aligned}$$

(3) 再次利用式 (9.4.15), 我们有

$$\mathrm{d}\langle\omega, X\rangle = \mathrm{d}\langle \mathrm{d}h, X\rangle = X^{\mathrm{T}}\frac{\partial(\mathrm{d}h)}{\partial x} + \mathrm{d}h\frac{\partial X}{\partial x} = X^{\mathrm{T}}\,\mathrm{Hess}(h) + \mathrm{d}h\frac{\partial X}{\partial x}.$$

因为 Hess(h) 是对称的, 上式变为

$$X^{\mathrm{T}}(\mathrm{Hess}(h))^{\mathrm{T}} + \mathrm{d}h\frac{\partial X}{\partial x} = \left(\frac{\partial(\mathrm{d}h)}{\partial x}X\right)^{\mathrm{T}} + \mathrm{d}h\frac{\partial X}{\partial x} = L_X\mathrm{d}h.$$

□

9.5 分布的积分

首先我们定义分布和余分布, 它们最本质的特征是, 在流形的每一点, 它们分别为切空间和余切空间的子空间.

定义 9.5.1 (1) 一个分布 Δ 是一个规则, 它在每一点 $x \in M$ 指定一个子空间 $\Delta(x) \subset T_x(M)$. 称 Δ 具有定常维数 r, 如果 $\dim(\Delta(x)) = r, \forall x \in M$.

(2) 如果存在一组 C^r 向量场 $\{X_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$, 使得在每一点 $x \in M$ 有 $\Delta(x) = \mathrm{span}\{X_\lambda(x) \mid \lambda \in \Lambda\}$, 则称分布 Δ 由向量场 $\{X_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ 张成. 由 C^r 向量场张成的分布称 C^r 分布.

(3) 一个余分布 Ω 是一个规则, 它在每一点 $x \in M$ 指定一个子空间 $\Omega(x) \subset T_x^*(M)$. 称 Ω 具有定常维数 r, 如果 $\dim(\Omega(x)) = r, \forall x \in M$.

(4) 如果存在一组 C^r 余向量场 $\{\omega_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$, 使得在每一点 $x \in M$ 有 $\Omega(x) = \mathrm{span}\{\omega_\lambda(x) \mid \lambda \in \Lambda\}$, 则称分布 Ω 由余向量场 $\{\omega_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ 张成. 由 C^r 余向量场张成的分布称 C^r 余分布.

定义 9.5.2 (1) 一个分布 Δ 称为对合的, 如果对其中的任意两个向量 $X, Y \in D$, 其李括号

$$[X, Y] \in \Delta, \quad \forall X, Y \in \Delta. \tag{9.5.1}$$

(2) 一个子流形 S 称为给定分布 Δ 的积分流形, 如果对于每一点 $x \in S$ 它的切空间都是 $\Delta(x)$, 即

$$T_x(S) = \Delta(x), \quad \forall x \in S.$$

如果一个分布 $\Delta(x)$ 有积分流形, 则它称为可积的.

在非线性系统的分析与控制设计中, 应用微分几何方法的一个基本工具是 Frobenius 定理. 为表述这个定理我们需要一些准备.

引理 9.5.1 设 $X \in V^1(M)$ 是一个 C^1 向量场, $F: M \to M$ 是一个微分同胚. 那么 X 是 F 不变的 (即 $F_*(X(p)) = X(F(p))$), 当且仅当

$$F(\mathrm{e}_t^X(x)) = \mathrm{e}_t^X(F(p)). \tag{9.5.2}$$

证明 (必要性) 设 X 是 F 不变的. 利用链式法则, 我们有

$$\begin{aligned} \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(F \circ \mathrm{e}_t^X(p)\right) &= J_F \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}_t^X(p) = J_F X\left(\mathrm{e}_t^X(p)\right) \\ &= F_*\left(X\left(\mathrm{e}_t^X(p)\right)\right) = X\left(\mathrm{e}_t^X(p)\right). \end{aligned} \tag{9.5.3}$$

但 $X(\mathrm{e}_t^X(p))$ 的积分曲线是 $\mathrm{e}_t^X(p)$, 故微分方程解的唯一性保证了式 (9.5.2).

(充分性) 设式 (9.5.3) 成立. 两边同时微分得 $F_*\left(X\left(\mathrm{e}_t^X(p)\right)\right) = X\left(\mathrm{e}_t^X(F(p))\right)$, 再令 $t = 0$, 得 $F_*(X(p)) = X(F(p))$. □

引理 9.5.2 设 X 及 Y 为 M 上两个 C^1 向量场. $[X, Y] = 0$, 当且仅当对任意一点 $p \in M$ 存在一个 $\delta_p > 0$ 使得

$$\mathrm{e}_t^X \circ \mathrm{e}_s^Y(p) = \mathrm{e}_s^Y \circ \mathrm{e}_t^X(p), \quad |s|, |t| < \delta_p. \tag{9.5.4}$$

证明 (充分性) 式 (9.5.4) 保证了 Y 是 e_t^X 不变的且 X 是 e_t^Y 不变的. 因此存在 p 的一个邻域 V, 使得对每一点 $q \in V$, 有

$$[X, Y]_q = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\left((\mathrm{e}_{-t}^X)_*\left(Y(\mathrm{e}_t^X(q)) - Y(q)\right)\right) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(Y(q) - Y(q)) = 0.$$

(必要性) 设 $[X, Y] = 0$. 记 $q' = \mathrm{e}_t^X(q)$ 且令

$$\theta_q(t) = \left(\mathrm{e}_{-t}^X\right)_* Y\left(\mathrm{e}_t^X(q)\right),$$

则

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_q(t) &= \lim_{\triangle t \to 0} \tfrac{1}{\triangle t}\left[\left(\mathrm{e}_{-t+\triangle t}^X(q)\right)_*\left(Y\left(\mathrm{e}_{\triangle t}^X(q')\right)\right) - \left(\mathrm{e}_{-t}^X\right)_*(Y(q'))\right] \\ &= \left(\mathrm{e}_{-t}^X\right)_*\left(\lim_{\triangle t \to 0} \tfrac{1}{\triangle t}\left(\mathrm{e}_{-\triangle t}^X\right)_*\left(Y\left(\mathrm{e}_{\triangle t}^X(q')\right) - Y(q')\right)\right) \\ &= \left(\mathrm{e}_{-t}^X\right)_*\left([X, Y]_{q'}\right) = 0. \end{aligned}$$

从而 $\theta_q(t)$ 对 $t < \delta$ 及 $q \in V$ 是定常的, 因此 Y 是 e_t^X 不变的. 由引理 9.5.1 即得式 (9.5.4). □

定理 9.5.1 (Frobenius 定理) 一个分布 Δ 是可积的, 当且仅当它是对合的且有定常维数.

证明 (必要性) 设 Δ 在 p 点邻域可积, 那么存在 Δ 的一个积分流形 S, 通过 p 使得 $T_p(S) = \Delta(p)$. 因为 S 是一个子流形, 存在局部坐标系 (U, x) 使 $p \in U$ 且

$$S = \{x \in U \mid x_{k+1} = \cdots = x_n = 0\},$$

于是可知

$$\Delta = \mathrm{span}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_k}\right\}.$$

结论显见.

(充分性) 设 Δ 的维数为 $\dim(\Delta) = k$. 对一给定点 $p \in M$, 存在 p 的一个邻域 V, 及 V 上的一组基 $X_1, \cdots, X_k$ 使得

$$\Delta(q) = \mathrm{span}\{X_1(q), \cdots, X_k(q)\}, \quad q \in V.$$

不失一般性我们可假定矩阵

$$[X_1(q) \ \cdots \ X_k(q)]$$

的顶部 $k \times k$ 子块, 记作 $Q(q)$, 是非奇异的. 然后定义

$$Y(q) = (Q(q))^{-1}(X_1(q), \cdots, X_k(q)) := (Y_1(q), \cdots, Y_k(q)) = \begin{pmatrix} I_k \\ * \end{pmatrix},$$

因为 Δ 是对合的, 所以

$$[Y_i, Y_j] = \sum_{s=1}^{k} c_s(q) Y_s. \tag{9.5.5}$$

利用式 (9.5.4), 我们有

$$[Y_i, Y_j] = \begin{pmatrix} 0 \\ * \end{pmatrix}. \tag{9.5.6}$$

将式 (9.5.5) 与式 (9.5.6) 比较, 可知

$$[Y_i, Y_j] = 0, \quad 0 \leqslant i, j \leqslant k.$$

即 $\{Y_1, \cdots, Y_k\}$ 为 Δ 的一组可交换基. 我们再选择 $Y_{k+1}, \cdots, Y_n$ 使得 $Y_1(q), \cdots, Y_n(q)$ 为 $T_q(M)$ 的一组基, $q \in V$. 于是我们可以找一个小 $\delta > 0$, 并定义映射

$$\Phi(y_1, \cdots, y_n) = \mathrm{e}_{y_1}^{Y_1} \cdots \mathrm{e}_{y_n}^{Y_n}(p), \quad |y_i| < \delta, \ i = 1, \cdots, n. \tag{9.5.7}$$

因为 Jacobi 矩阵 $J_\Phi(0) = I_n$ 非奇异, 故 Φ 定义了一个从 $0 \in \mathbb{R}^n$ 的邻域到 $p \in M$ 的邻域的一个微分同胚. 由定义

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_1} = Y_1\left(\mathrm{e}_{y_1}^{Y_1} \cdots \mathrm{e}_{y_n}^{Y_n}(p)\right). \tag{9.5.8}$$

因为 $\mathrm{e}_{Y_i}^{y_i}$ 和 $\mathrm{e}_{Y_j}^{y_j}$ 是可交换的, 交换式 (9.5.7) 右边的 $\mathrm{e}_{Y_1}^{y_1}$ 与 $\mathrm{e}_{Y_i}^{y_i}$ 可得

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_i} = Y_i\left(\mathrm{e}_{y_1}^{Y_1} \cdots \mathrm{e}_{y_n}^{Y_n}(p)\right), \quad i = 1, \cdots, k. \tag{9.5.9}$$

因此

$$S = \{y \in V \mid y_{k+1} = 0, \cdots, y_n = 0\}$$

是 Δ 的一个积分流形. □

注 (1) 上述定理是一个局部结果. 实际上, Frobenius 定理还说明如果分布是对合且有定常维数的, 则通过每一点 $x \in M$ 存在最大的积分子流形[52].

(2) 如果流形与分布均是解析的, 那么无需定常维数的假定微分流形也存在[79].

在本节的余下部分中, 函数、向量场、余向量场均假定为解析的.

命题 9.5.1 设 $X, Y \in V^\omega(M)$, $h \in C^\omega(M)$, $\omega \in V^*(M)$, 那么

(1)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} h\left(\mathrm{e}_t^X(x)\right) = L_X h\left(\mathrm{e}_t^X(x)\right); \tag{9.5.10}$$

(2) (解析函数的李展式)

$$h\left(\mathrm{e}_t^X(x)\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} L_X^k h(x); \tag{9.5.11}$$

(3) (向量场的李展式)

$$\left(\mathrm{e}_{-t}^X\right)_* Y\left(\mathrm{e}_t^X(x)\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \mathrm{ad}_X^k Y(x); \tag{9.5.12}$$

(4) (1-形式的李展式)

$$(\mathrm{e}_t^X)^* \omega(\mathrm{e}_t^X(x)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} L_X^k \omega(x). \tag{9.5.13}$$

李展式 (9.5.11)~(9.5.13) 也被统称为 Campbell-Baker-Hausdorff 公式.

证明 (1) 利用链式法则, 我们有

$$\text{左端} = \mathrm{d}h \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}_t^X(x)\right) = \mathrm{d}h X\left(\mathrm{e}_t^X(x)\right) = L_X h\left(\mathrm{e}_t^X(x)\right).$$

(2) 反复应用式 (9.5.10), 可以得到

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}h\left(\mathrm{e}_t^X(x)\right)|_{t=0}=L_X^k h\left(\mathrm{e}_t^X(x)\right),\quad k\geqslant 0. \tag{9.5.14}$$

现在式 (9.5.11) 通过对 t 的 Taylor 展式即可得到.

(3) 首先求其对 t 的导数

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}_{-t}^X\right)_* Y\left(\mathrm{e}_t^X(x)\right)\\
&=\lim_{\triangle t\to 0}\frac{1}{\triangle t}\left[\left(\mathrm{e}_{-t-\triangle t}^X\right)_* Y\left(\mathrm{e}_{t+\triangle t}^X(x)\right)-\left(\mathrm{e}_t^X\right)_* Y(x)\right]\\
&=\lim_{\triangle t\to 0}\frac{1}{\triangle t}\left[\left(\mathrm{e}_{\triangle t}^X\right)_*\left(\mathrm{e}_t^X\right)_* Y\left(\mathrm{e}_{-\triangle t}^X(x)\right)-\left(\mathrm{e}_t^X\right)*Y(x)\right]\\
&=\left(\mathrm{e}_t^X\right)_*\lim_{\triangle t\to 0}\left[\left(\mathrm{e}_{\triangle t}^X\right)_* Y\left(\mathrm{e}_{-\triangle t}^X(x)\right)-Y(x)\right]\\
&=\left(\mathrm{e}_t^X\right)_*\mathrm{ad}_X Y.
\end{aligned}$$

于是可递归得到

$$\begin{aligned}
\tfrac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}(\mathrm{e}_t^X)_* Y(x)|_{t=0}&=(\mathrm{e}_t^X)_*\mathrm{ad}_X^{k-1}Y(x)|_{t=0}\\
&=\mathrm{ad}_X^k Y(x),\quad k\geqslant 0.
\end{aligned} \tag{9.5.15}$$

再由 Taylor 展式可得式 (9.5.12).

(4) 式 (9.5.13) 的证明本质上是一样的: 先求导

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}_t^X\right)^*\omega\left(\mathrm{e}_t^X(x)\right)=\left(\mathrm{e}_t^X\right)^* L_X\omega\left(\mathrm{e}_t^X(x)\right),$$

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}\left(\mathrm{e}_t^X\right)^*\omega\left(\mathrm{e}_t^X(x)\right)=\left(\mathrm{e}_t^X\right)^* L_X^k\omega\left(\mathrm{e}_t^X(x)\right).$$

因此

$$\left.\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}\left(\mathrm{e}_t^X\right)^*\omega\left(\mathrm{e}_t^X(x)\right)\right|_{t=0}=L_X^k\omega(x).$$

再由 Taylor 展式即得式 (9.5.13). □

推论 9.5.1

$$\mathrm{e}_t^X(x)=x+tX(x)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^{k+1}}{(k+1)!}L_X^k(X(x)). \tag{9.5.16}$$

证明 对坐标函数 x_i 使用式 (9.5.11), 即得

$$x_i\left(\mathrm{e}_t^X(x)\right)=x_i+tL_X(x_i)+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{t^k}{k!}L_X^k(x_i).$$

注意 $L_X(x_i)=X_i$, 这是 X 的第 i 个分量. 将 $L_X^k(x_i)$, $k\geqslant 2$ 用 $L^{k-1}(X_i)$ 代替且将 n 个分量放在一起, 即得式 (9.5.16). □

设 H 为 $V(M)$ 的一个由一组向量场在 $\mathbb{R}$ 上生成的子空间. 一条曲线 $\sigma(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$ 称为 H 的积分曲线, 如果

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sigma(t) \in H_{\sigma(t)},\ 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

设 $p \in M$. H 由 p 出发的可达集, 记作 $\mathbb{R}(H,p)$, 是这样的点 $x \in M$ 的集合: 存在一条曲线 σ 使得 $\sigma(0) = p$ 且 $\sigma(1) = x$.

下面的定理是非线性系统能控性研究的基石.

定理 9.5.2 (Chow 定理)　设 H 由完备向量场生成, $\mathcal{H}$ 为由 H 生成的李代数, M 是道路连通的. 如果 $\mathcal{H} = V(M)$ (在分布意义下), 则 $\mathbb{R}(H,p) = M$.

证明　如果 $[H,H] \subset H$, 结论显见. 否则至少存在一对向量场 $X, Y \in H$, 使得对某个 t, $(\mathrm{e}_t^Y)_* X \notin H$. 将 $(\mathrm{e}_t^Y)_* X$ 加入 H 以得到一个新的向量空间 H_1. 将 H 由 H_1 代替, 或者 $[H_1,H_1] \subset H_1$, 或者我们可以构造 H_2. 我们强调以下三个事实:

事实 1: $H_k \subset \mathcal{H}$. 这由李展式 (9.5.12) 可知.

事实 2: 对每一点 $x \in M$ 存在一个有限 $k < n$ 使得 $H_k|_x = V_x(M)$. 它是显然的因为 $\dim V_x(M) = n$, 而每一次我们至少将 H_k 维数增加 1.

事实 3: 如果 X, Y 是完备的, 那么 $(\mathrm{e}_t^X)_* Y$ 也是完备的. 因此, e_t^X 是一个全局微分同胚 $(\forall t)$, 因此

$$\mathrm{e}_t^X \mathrm{e}_s^Y(x) = \mathrm{e}_s^{\left[(\mathrm{e}_t^X)_* Y\right]}\left(e\mathrm{e}_t^X(x)\right). \tag{9.5.17}$$

现在因为 M 是道路连通的, 存在一个路径 $\sigma(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. 使得 $\sigma(0) = p$ 及 $\sigma(1) = x$. 根据事实 2, 对每一个 t 存在 n 个向量场 $X_1, \cdots, X_n \in H_k$ 使得 $\dim H_k(\sigma(t)) = n$. 因此

$$\prod_{i=1}^{n} \mathrm{e}_{t_i}^{X_i}(\sigma(t))$$

是一个从 $0 \in \mathbb{R}^n$ 的邻域到 $\sigma(t)$ 的邻域的一个局部微分同胚. 再者, 由式 (9.5.9) 这个微分同胚可由 H 中向量场的积分曲线实现. 换言之, $\mathbb{R}(H,\sigma(t))$ 包含 $\sigma(t)$ 的一个邻域. 而 $\sigma(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, 是一个紧集, 它可由有限多个 $\mathbb{R}(H,\sigma(t_i))$, $i = 1, \cdots, m < \infty$, 覆盖. 因此可知 $x \in \mathbb{R}(H,p)$. □

9.6　李群与李代数

定义 9.6.1　一个集合 G 称为李群, 如果

(1) G 是一个群;

(2) G 是一个解析的微分流形;

(3) 乘法映射 $\otimes$: $G \times G \to G$ 是解析的; 逆映射 $G \to G$: $g \mapsto g^{-1}$, 也是解析的.

设 M_n 为 $n\times n$ 矩阵集合, 记

$$V(A)=(A_1,\cdots,A_n)^{\mathrm{T}},\quad A\in M_n,$$

这里 A_i 是 A 的第 i 行. 那么 V 是双向一一映射. 通过 V 到 V^{-1} 我们可将 M_n 等同于 $\mathbb{R}^{n\times n}$. 以后我们将赋 M_n 予 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 上的普通拓扑.

例 9.6.1 考虑 $GL(n,\mathbb{R})\subset M_n$. 它是 M_n 上的一个开集, 因此它是一个 $n\times n$ 解析流形.

我们已经知道在矩阵乘法下它是一个群. 将矩阵的元作为它的坐标, 显然乘法 $A\times B\to AB$ 及逆 $A\to A^{-1}$ 是解析的.

因此 $GL(n,\mathbb{R})$ 是一个李群. 实际上, 它是一个非常重要的李群, 称为一般线性群. □

定义 9.6.2 *给定一个李群 G. 一个子集 $S\subset G$ 称为李子群, 如果*

(1) S 为 G 的一个子群;

(2) S 为 G 的正规子流形;

(3) 在子群结构与子流形结构下, S 是一个李群.

注 *在有些参考书中, 李子群 $H\subset G$ 是一个嵌入子流形. 因此, H 可能不是 G 的闭子流形. 除非特殊说明, 我们只考虑闭子李群以避免不必要的复杂.*

定理 9.6.1 *设 $H\subset G$ 为李群 G 的子群, 同时它又是一个正规子流形. 那么*

(1) H 本身是一个李群;

(2) H 是 G 的闭子群.

证明 (1) 设 $g_i\in H$, $i=1,2,3$, $g_1g_2=g_3$, 且 (U_i,ϕ_i) 分别为 g_i 邻域的平整坐标, $i=1,2,3$. 令 $\dim(G)=m$ 及 $\dim(H)=n$, 那么在平整坐标下记 $g_1=(x_1,\cdots,x_n,0,\cdots .0)$, $g_2=(y_1,\cdots,y_n,0,\cdots,0)$, $g_3=(z_1,\cdots,z_n,0,\cdots,0)$. 于是乘积 $U_1\times U_2\to U_3$ (如需要, 可缩小 U_1 和 U_2) 可表示为

$$z_i=z_i(x_1,\cdots,x_m,y_1,\cdots,y_m),\ i=1,\cdots,m.$$

将它限制到 H 上, 我们有

$$z_i=z_i(x_1,\cdots,x_n,0,\cdots,0,y_1,\cdots,y_n,0,\cdots,0),\ i=1,\cdots,n,$$

它显然是解析的.

由类似的讨论可知 $g\mapsto g^{-1}$ 也是解析的. 因此 H 是一个李群.

(2) 设 $h_i\in H$ 且 $i\to\infty$ 时 $h_i\to h_0$, (U,x) 是 h_0 邻域的一个平整坐标. 那么存在 $N>0$ 使当 $i>N$ 时 $h_i\in U$. 记 $h_i=(x_1^i,\cdots,x_n^i,0,\cdots,0)$. 因为 $h_i\to h_0$, $x_j^i\to x_0^i$, $i\to\infty$, $j=1,\cdots,m$, 显见 $h_j^0=0$, $j=n+1,\cdots,m$, 即 $h_0\in H$. 因此 H 是闭集. □

事实上, 上述 (2) 的逆也对, 即: 李群的闭子群是一个李子群[113].

定理 9.6.2　设 $F: G_1 \to G_2$ 为一个李群同态, 则 F 秩为定常值, 而且其核 $K = \ker(F)$ 是 G_1 的一个李子群, 其余维数 $\operatorname{codim}(K) = \operatorname{rank}(F)$.

证明　由定理 9.1.1, 如果 F 的秩是定常的, 那么 $K = F^{-1}(e)$ 是一个 G_1 的闭子流形, 其余维数为 $\operatorname{rank}(F)$, 因此它是一个李子群. 因此我们只要证明 F 的秩是定常值.

设 $a \in G_1$ 且 $b = F(a) \in G_2$, 那么

$$F(x) = F(a)F(a^{-1}x) = bF(a^{-1}x) := L_bF(a^{-1}x),$$

这里 L_b 是 b 的左乘算子. 显然 L_b 是解析的, 而且它的逆 $(L_b)^{-1} = L_{b^{-1}}$ 也是解析的. 因此它是一个微分同胚, 于是我们有

$$\operatorname{rank}(F(x)) = \operatorname{rank}(F(a^{-1}x)).$$

由于 $a \in G_1$ 是任意的, $\operatorname{rank}(F)$ 处处相等. □

例 9.6.2　(1) 特殊线性群: 令

$$SL(n,\mathbb{R}) = \{A \in GL(n,\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}.$$

$SL(n,\mathbb{R})$ 称为特殊线性群, 它是 $GL(n,\mathbb{R})$ 的一个李子群.

(2) 正交群: 令

$$O(n,\mathbb{R}) = \{A \in GL(n,\mathbb{R}) \mid A^{\mathrm{T}}A = I\}.$$

$O(n,\mathbb{R})$ 称为正交群, 它是 $GL(n,\mathbb{R})$ 的一个李子群.

(3) U 群: 设

$$U(n,\mathbb{C}) = \{A \in GL(n,\mathbb{C}) \mid \bar{A}^{\mathrm{T}}A = I\}.$$

$U(n,\mathbb{R})$ 称为一个 U 群, 它也是 $GL(n,\mathbb{C})$ 的一个李子群.

(4) 辛群: 记

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

定义

$$Sp(2n,\mathbb{R}) = \{A \in GL(2n,\mathbb{R}) \mid A^{\mathrm{T}}JA = J\}.$$

$Sp(2n,\mathbb{R})$ 称为辛群, 它是 $GL(2n,\mathbb{R})$ 的一个李子群.

证明都是类似的, 我们详细讨论 $SL(n,\mathbb{R})$. 考虑 $F: GL(n,\mathbb{R}) \to (\mathbb{R}^+, \times)$, 定义为 $A \to F(A) = \det(A)$. 显然 F 是一个李群同态.

对任一 $A = (a_{ij}) \in GL(n,\mathbb{R})$, 记 A^{ij} 为 a_{ij} 的余子式. 因为

$$F(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} a_{1k} \det(A^{1k}) \neq 0,$$

故至少有一个 k, 使得 $\det(A^{1k}) \neq 0$. 因此

$$\frac{\partial F}{\partial a_{1k}} = (-1)^{k-1} \det(A^{1k}) \neq 0,$$

这说明 $\mathrm{rank}(F) = 1$. 由定理 9.6.2 可知 $SL(n,\mathbb{R}) = \ker(F)$ 是 $GL(n,G)$ 的李子群, 维数为 n^2-1. □

对一个微分流形 M, 在李括号 $[\cdot,\cdot]$ 下, $V(M)$ 成为一个李代数. 因此将 $V(M)$ 看作一个李代数是方便的.

为讨论李群的李代数, 先对李代数作一些进一步的讨论. 前面我们讨论的李代数都是对向量场定义的, 但回忆定义 9.3.6, 其实, 李代数是很广泛的一类代数结构, 我们先看几个例子.

例 9.6.3 (1) 记 $gl(n,\mathbb{R})$ 为 $n \times n$ 矩阵集合. 定义一个乘法

$$[A,B] = AB - BA, \quad A, B \in gl(n,\mathbb{R}). \tag{9.6.1}$$

于是 $gl(n,\mathbb{R})$ 就变成一个李代数, 称为一般线性代数.

(2) 在 $\mathbb{R}^3$ 中定义向量的叉积. 对于 $X = x_1\mathbf{I} + x_2\mathbf{J} + x_3\mathbf{K}$, $Y = y_1\mathbf{I} + y_2\mathbf{J} + y_3\mathbf{K}$, 叉积定义为

$$X \times Y = \det \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{J} & \mathbf{K} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}.$$

于是以叉积作为乘法的 $\mathbb{R}^3$ 就是一个李代数.

(3) 带有普通李括号形式的光滑向量场集合 $V(M)$ 是一个李代数. 利用定义, 不难证明以上结论, 检验留给读者. □

定义 9.6.3 设 $\mathcal{L}$ 为一李代数. $\mathcal{L}$ 的一个子空间 $\mathcal{V} \subset \mathcal{L}$ 称为 $\mathcal{L}$ 的李子代数, 如果它对于同一个乘法 $[\cdot,\cdot]$ 也构成一个李代数.

定义 9.6.4 设 $\mathcal{L}_1$ 和 $\mathcal{L}_2$ 为两个李代数. 一个线性映射 $\phi: \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ 称为李代数同态, 如果

$$\phi([X,Y]) = [\phi(X), \phi(Y)], \quad X, Y \in \mathcal{L}_1.$$

一个一对一且映上的李代数同态称为李代数同构.

例 9.6.4 (1) 考虑在 $\mathbb{R}^n$ 上的光滑向量场所构成的李代数 $V(\mathbb{R}^n)$, 以及它的子集线性向量场

$$V_L(\mathbb{R}^n) = \{Ax \mid A \in gl(n,\mathbb{R})\} \subset V(\mathbb{R}^n).$$

容易看出 $V_L(\mathbb{R}^n)$ 是 $V(\mathbb{R}^n)$ 的一个李子代数.

(2) 定义映射 $\phi: gl(n,\mathbb{R}) \to V_L(\mathbb{R}^n)$ 为 $A \mapsto -Ax$. 不难检验, 这是一个李代数同构. □

下面考虑李群的李代数.

给定一个李群 G, 令 $a \in G$. 由前面讨论已知左乘 (或左平移) $L_a : G \to G$ 是一个微分同胚. 令 $X \in V(G)$, X 称为一个左不变向量场, 如果

$$(L_a)_* X = X, \quad \forall a \in G.$$

类似地, 我们可以定义右不变向量场而得到相应的结果.

我们将 G 上的左不变向量场集合记作 $g(G)$, 或简记为 g, 即

$$g = \{X \in V(G) \mid (L_a)_* X = X, \forall a \in G\}.$$

g 是 $V(M)$ 的一个李子代数. 事实上, 设 $X, Y \in g$ 及 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $a \in G$. 那么

(1) $(L_a)_*(\alpha X + \beta Y) = \alpha(L_a)_* X + \beta(L_a)_* Y = \alpha X + \beta Y$;

(2) $(L_a)_*[X, Y] = [(L_a)_* X, (L_a)_* Y] = [X, Y]$.

定义 9.6.5 给定一个李群 G. 其左不变向量场集合 $g = g(G)$ 称为李群 G 的李代数.

命题 9.6.1 设 $X \in g$. 定义一个映射 $\Psi : g \to T_e(G)$ 为 $X \mapsto X_e$, 那么 Ψ 是一个线性同构.

证明 线性性是平凡的, 我们只要证明它是双向一对一的. 设 $X \neq Y$, 那么在至少一个点 $x \in G$ 处, $X(x) \neq Y(x)$. 于是

$$(L_{x^{-1}})_* X_x \neq (L_{x^{-1}})_* Y_x,$$

即 $X_e \neq Y_e$. 因此 Ψ 是一对一的.

要证明这个映射是映上的, 设 $X_e \in T_e(G)$, 我们定义一个向量场 $X(x) = (L_x)_* X_e$. 因为 L_x 是解析映射, $X(x)$ 显然是一个向量场. 要证明 $X_e \in g$, 我们只要证明它是左不变的即可: 对任一 $b \in G$, 有

$$(L_b)_* X_x = (L_b)_*((L_a)_* X_e) = (L_{bx})_* X_e = X_{bx},$$

结论获证. □

上述定理还说明 $\dim(g(G)) = \dim(G)$.

由连续不难看出李群上的左不变向量场是完备的. 因此我们可以定义下面的映射.

定义 9.6.6 设 $X \in g(G)$. 定义指数映射 $\exp : g \to G$ 为

$$\exp(X) = e_1^X(e). \tag{9.6.2}$$

于是显然有

$$\exp(tX) = e_t^X(e).$$

而且, 如果 $G = GL(n, \mathbb{R})$ 或其子群, 指数映射变为普通矩阵的指数映射.

例 9.6.5 如果我们将左不变向量场 $X(x)$ 与它在单位元的值 $X(e)$ 等同, 我们得到:

(1) $GL(n,\mathbb{R})$ 的李代数为 $gl(n,\mathbb{R})$.

(2) $SL(n,\mathbb{R})$ 的李代数是 $sl(n,\mathbb{R})$, 这里

$$sl(n,\mathbb{R})=\{X\in gl(n,\mathbb{R})\mid \mathrm{tr}(X)=0\}.$$

(3) $O(n)$ 的李代数是 $o(n)$, 这里

$$o(n)=\{X\in gl(n,\mathbb{R})\mid X^{\mathrm{T}}=-X\}.$$

(4) $U(n)$ 的李代数是 $u(n)$, 这里

$$u(n)=\{X\in gl(n,\mathbb{C})\mid \bar{X}^{\mathrm{T}}=-X\}.$$

(5) $Sp(2n,\mathbb{R})$ 的李代数是 $sp(2n,\mathbb{R})$, 这里

$$sp(2n,\mathbb{R})=\{X\in gl(2n,\mathbb{R})\mid X^{\mathrm{T}}J+JX=0\}.$$

(6) 记

$$SO(n)=\{A\in O(n)\mid \det(A)=1\},$$

它称为特殊正交群. 考虑 $SO(n)$ 的李代数. 注意到李群的李代数只依赖于李代数在单位元附近的值, 因此当李群作为一个拓扑空间具有几个连通块时, 它的李代数只由包含单位元的那个子块来决定. 因此 $O(n)$ 与 $SO(n)$ 具有相同的李代数, 即 $o(n)$. □

事实上, 所有有穷维李代数本质上都是 $gl(n,\mathbb{R})$ 的子代数:

定理 9.6.3 (Ado 定理) 任意有穷维李代数都同构于 $gl(n,\mathbb{R})$ 的一个子代数.

证明见文献 [113].

下面的定理给出李群和它的李代数之间的基本关系.

定理 9.6.4 每一个有穷维李代数 g 对应于一个唯一的, 连通且单连通的李群 $\tilde{G}$. 而且, 任何其他以 g 为李代数的连通李群 G 均同构于 $\tilde{G}$ 对其某个离散正规子群 D 的商群, 即

$$G\simeq \tilde{G}/D.$$

证明及细节见文献 [113].

事实上, 所有以 g 为其李代数的连通李群 G 具有一个共同的复叠空间 $\tilde{G}$. 因而它们均局部同构.

下面讨论李代数的结构与表示.

定义 9.6.7 设 $\mathcal{G}$ 为一李代数, W 为一向量空间. 李代数 $\mathcal{G}$ 在 W 上的表示是一个向量空间的同态 $\phi:\mathcal{G}\to \mathrm{End}(W)$. (当 W 为有限维空间时, $\mathrm{End}(W)$ 也记作 $gl(W)$). 特别是它到自身的表示, $\mathcal{G}\to gl(\mathcal{G})$ 称为伴随表示, 这里对每个 $\alpha\in\mathcal{G}$, 伴随表示记作 ad_α, 定义为

$$\mathrm{ad}_\alpha(x)=[\alpha,x],\quad \forall x\in\mathcal{G}. \tag{9.6.3}$$

注意, 当 W 的基底固定下来以后, $gl(W)$ 就成了 $gl(n,\mathbb{R})$, 这里 $n=\dim(W)$.

例 9.6.6 考查 $gl(2,\mathbb{R})$, 选择一组基底为

$$e_1=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix};\quad e_2=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix};\quad e_3=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix};\quad e_4=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}.$$

设 $\alpha=\begin{bmatrix}3&1\\-1&0\end{bmatrix}\in gl(2,\mathbb{R})$, 那么

$$\mathrm{ad}_\alpha e_1=\alpha e_1-e_1\alpha=\begin{bmatrix}0&-1\\-1&0\end{bmatrix}=-e_2-e_3;$$

$$\mathrm{ad}_\alpha e_2=\alpha e_2-e_2\alpha=\begin{bmatrix}-1&3\\0&-1\end{bmatrix}=-e_1+3e_2-e_4.$$

□

对一个给定的李代数 $\mathcal{L}$ 我们可以定义一个递减李子代数列

$$\mathcal{L}^{(0)}=\mathcal{L},\quad \mathcal{L}^{(k+1)}=\left[\mathcal{L}^{(k)},\mathcal{L}^{(k)}\right],\quad k\geqslant 0.$$

定义 9.6.8 一个李代数 $\mathcal{L}$ 称为是可解的, 如果存在 $k^*>0$ 使得

$$\mathcal{L}^{(k^*)}=0. \tag{9.6.4}$$

对李代数 $\mathcal{L}$, 我们可以定义另一个递减李子代数列

$$\mathcal{L}^0=\mathcal{L},\quad \mathcal{L}^{k+1}=\left[\mathcal{L},\mathcal{L}^k\right],\quad k\geqslant 0.$$

定义 9.6.9 一个李代数 $\mathcal{L}$ 称为是幂零的, 如果存在 $k^*>0$ 使得 $\mathcal{L}^{k^*}=0$.

如果一个李代数是幂零的, 那么它一定是可解的. 这是显然的, 因为依定义有

$$\mathcal{L}^{(k)}\subset\mathcal{L}^{2k-1}.$$

但反之未必成立, 见下例.

例 9.6.7 记 $T(n,\mathbb{R})$ 为实上三角阵集合. 容易证明, $T(n,\mathbb{R})$ 是 $gl(n,\mathbb{R})$ 的李子代数.

记 $\mathcal{L}=T(n,\mathbb{R})$. 直接计算可知, 设 $A=(a_{i,j})\in\mathcal{L}^{(1)}$, 则 $a_{i,i}=0$, $i=1,\cdots,n$. 同理, 设 $A=(a_{i,j})\in\mathcal{L}^{(2)}$, 则 $a_{i,i}=0$, $i=1,\cdots,n$, 且 $a_{i,i+1}=0$, $i=1,\cdots,n-1$. 继续进行, 则得 $\mathcal{L}^{(n-1)}=\{0\}$. 故 $T(n,\mathbb{R})$ 是可解李代数.

但是, 显然, $[\mathcal{L},\mathcal{L}^1]\subset\mathcal{L}^1$. 而取 $I_n\in\mathcal{L}$ 即得 $[\mathcal{L},\mathcal{L}^1]\supset\mathcal{L}^1$. 于是, $\mathcal{L}^k=\mathcal{L}^1$, $k\geqslant 2$. 故 $T(n,\mathbb{R})$ 不是幂零的. □

定义 9.6.10 李代数 $\mathcal{L}$ 的一个李子代数 $\mathcal{I}$ 称为 $\mathcal{L}$ 的一个理想, 如果

$$[X,\mathcal{L}]\subset\mathcal{L},\quad \forall X\in\mathcal{L}.$$

对于李代数 $\mathcal{L}$, 显然, 它自身及 $\{0\}$ 均为其理想, 这两个理想称为平凡理想.

定义 9.6.11 (1) 李代数 $\mathcal{L}$ 称为单代数, 如果它没有非平凡理想;

(2) 李代数 $\mathcal{L}$ 称为半单代数, 如果它没有非零可解理想;

(3) 李代数 $\mathcal{L}$ 的最大可解理想称为它的根基, 记作 r.

定理 9.6.5 [113] 任一李代数 $\mathcal{L}$ 可分解为

$$\mathcal{L} = s \oplus r, \tag{9.6.5}$$

这里 s 是半单李子代数, r 为根基.

式 (9.6.5) 称为 Levi 分解.

定义 9.6.12 李代数 $\mathcal{L}$ 的 Killing 形式定义为

$$K(X,Y) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_X\,\mathrm{ad}_Y),\ \forall X,Y \in \mathcal{L}. \tag{9.6.6}$$

定理 9.6.6 [113] 李代数 $\mathcal{L}$ 是可解的, 当且仅当

$$K(X,Y) = 0,\ \forall X,Y \in \mathcal{L}. \tag{9.6.7}$$

设一个李代数 $\mathcal{L}$ 是有穷维的, 记 $\{e_1,\cdots,e_n\}$ 为其基底. 对于这组基底可定义一个 $n\times n$ 矩阵 M_K 如下

$$M_K = (k_{i,j}),\quad k_{i,j} = K(e_i,e_j),\quad i,j = 1,\cdots,n,$$

这个矩阵称为 Killing 矩阵.

容易验证, Killing 矩阵的秩与基底选择无关, 并且有下面的定理.

定理 9.6.7 [113] 有穷维李代数 $\mathcal{L}$ 是半单的, 当且仅当它的 Killing 矩阵非奇异.

下面给出一个例子.

例 9.6.8 李代数 $\mathcal{L} = sl(2,\mathbb{R})$ 是半单的. 要证明这一点, 计算它的 Killing 矩阵. 它的一个基是

$$e_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\quad e_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$\mathrm{ad}_{e_1} e_2 = e_1e_2 - e_2e_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = e_3,$$

$$\mathrm{ad}_{e_1} e_3 = e_1e_3 - e_3e_1 = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = -2e_1.$$

注意到 $\mathrm{ad}_{e_i} e_i = 0$, $i = 1,2,3$, 因此

$$\mathrm{ad}_{e_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathrm{ad}_{e_2} e_3 = e_2 e_3 - e_3 e_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = 2e_2.$$

再利用反对称性 $\mathrm{ad}_{e_i} e_j = -\mathrm{ad}_{e_j} e_i$，可得

$$\mathrm{ad}_{e_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathrm{ad}_{e_3} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

现在可直接计算 k_{ij}, 例如

$$k_{11} = \mathrm{tr}\,(\mathrm{ad}_{e_1}\,\mathrm{ad}_{e_1}) = \mathrm{tr} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0,$$

等. 最后可得

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

由于 Killing 矩阵 K 非奇异, $sl(2,\mathbb{R})$ 是半单的. □

可解性与 Levi 分解等在切换系统的稳定性与镇定问题中有很多应用, 下面给出一个例子.

例 9.6.9 给定一个切换线性系统

$$\dot{x} = A_{\sigma(t)} x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{9.6.8}$$

这里 $\sigma : [0,\infty) \to \Lambda$ 为一个分段定常函数, Λ 是一个指标集, 即系统在模型集 $\{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ 中切换. 设 $|\Lambda| < \infty$, 那么如果存在一个 $P > 0$, 使

$$PA_\lambda + A_\lambda^{\mathrm{T}} P < 0, \quad \forall \lambda \in \Lambda, \tag{9.6.9}$$

则称 P 为 $\{A_\lambda\}$ 的共同二次 Lyapunov 函数. 如果 $\{A_\lambda\}$ 具有共同二次 Lyapunov 函数, 则无论怎么切换都能保证切换系统 (9.6.8) 是渐近稳定的.

文献 [91] 证明了: 如果 $\{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}_{LA}$ 可解, 则 $\{A_\lambda\}$ 具有共同二次 Lyapunov 函数. 利用 Levi 分解, 可得到更精细的判据[44]. □

9.7 非线性系统的几何理论

本节介绍如何赋予非线性控制系统一个几何框架, 从而将非线性控制问题转化为微分几何的相关问题来研究. 本节的目的是给初学者一个整体观念, 严格定义与结论应参考相关控制论专著.

考虑非线性系统

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + \sum\limits_{i=1}^{m} g(x)u_i := f(x) + g(x)u, \quad x \in M, u \in U, \\ y = h(x), \quad y \in Y. \end{cases} \tag{9.7.1}$$

这里 $x \in M$ 称为系统状态, M 为一个 n 维流形, $u \in U$ 称为控制, U 为一个 m 维流形, $y \in Y$ 称为系统输出, Y 为一个 p 维流形. 实际上式 (9.7.1) 应视为系统在一个局部坐标下的表示.

先讨论系统的能控性, 即是否存在控制, 使系统从一个点运动到另一个点. 注意到, 对某个给定的 u, 能运动的方向就是向量场 $f(x) + g(x)u$. 由 Chow 定理可知, 向量场之间的李括号方向也是可以运动的方向, 于是可以定义一个由这样的向量场生成的李代数, 用它来刻画能控性.

定义 9.7.1 李代数

$$\mathcal{L}_c := \{f + gu \,|\, u = 常数\}_{LA}$$

称为能控性李代数.

实际上, 能控性李代数反映了系统可以移动的方向 (这里, 我们忽略了时间正负的问题, 下同).

能控性李代数里有一个方向, 它与控制无关, 是漂移项 f. 在讨论控制问题时常常不考虑这个方向. 从能控性李代数里把这个方向去掉, 不难证明, 它会变成如下的李代数.

定义 9.7.2 李代数

$$\mathcal{L}_c := \left\{\mathrm{ad}_f^i\, g_j \,|\, j = 1, \cdots, m; i = 0, 1, 2, \cdots\right\}_{LA}$$

称为强能控李代数.

因此, 如果一个系统的强能控李代数, 作为分布的维数为 n 时, 系统可以向任何方向移动, 也就能控了.

例 9.7.1 考虑线性系统

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + \sum\limits_{i=1}^{m} b_i u_i := Ax + Bu, \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m \\ y = Cx, \quad y \in \mathbb{R}^p. \end{cases} \tag{9.7.2}$$

容易算出, 对上述线性系统有

$$\mathcal{L}_c = \mathrm{span}\{B, AB, \cdots, A^{n-1}B\}.$$

(这里, 是将 $\mathcal{L}_c$ 看作一个分布.) 因此线性系统能控, 当且仅当 $\mathcal{L}_c$ 满秩. □

再考虑系统的能观测性, 即是否存在控制, 使得根据系统的输出 $y(t)$ 的不同, 能将不同的轨线 (等价地, 不同初值) 区分开. 不同的 $y(t)$ 可以用一点的 y 及其各阶导数来表示. 例如, 解析函数 $y(t)$ 可由 $y(0), y'(0), y''(0)\cdots$ 唯一确定. 显然, $y(t)$ 的各阶导数是由 $L_f h_j$, $L_{g_i} h_j$ 及其高阶李导数决定的, 因此有如下定义.

定义 9.7.3 余分布

$$\mathcal{O} := \mathrm{span}\,\{\, \mathrm{d}L_{X_1} L_{X_2} \cdots L_{X_k} h_j \mid X_i \in \{f, g_1, \cdots, g_m\}; j = 1, \cdots, p; k < \infty\}$$

称为能观测余分布.

因此, 如果能观测余分布满秩, 则系统可观测.

例 9.7.2 考虑线性系统 (7.7.2). 容易算出

$$\mathcal{O} = \mathrm{span}\, row \left\{ \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \right\}.$$

因此, 线性系统能观测, 当且仅当 $\mathcal{O}$ 满秩. □

再举一个例子, 即干扰解耦问题. 考虑非线性系统 (9.7.1). 如果除控制输入外, 系统还存在干扰输入, 那么系统变为

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u + q(x)w, & x \in M, u \in U, w \in W, \\ y = h(x), & y \in Y. \end{cases} \tag{9.7.3}$$

这里 $w \in W$ 是干扰, W 是一个 q 维流形.

所谓干扰解耦问题, 就是要寻找控制, 使系统的干扰输入不影响系统的输出. 要解决这个问题, 我们需要一些准备: 记由输入渠道形成的分布为 G, 即

$$G = \mathrm{span}\{g_1, \cdots, g_m\}.$$

定义 9.7.4 一个分布 $\varDelta$ 称为弱 (f, g)-不变分布, 如果

$$\begin{cases} [f(x), \varDelta] \subset \varDelta + G, \\ [g_i(x), \varDelta] \subset \varDelta + G, \quad i = 1, \cdots, m. \end{cases} \tag{9.7.4}$$

一个分布 $\varDelta$ 称为 (f, g)-不变分布, 如果存在 $\alpha(x) \in \mathbb{R}^m$, $\beta(x) \in GL(m, \mathbb{R})$, 使得

$$\begin{cases} [\tilde{f}(x), \varDelta] \subset \varDelta, \\ [\tilde{g}_i(x), \varDelta] \subset \varDelta, i = 1, \cdots, m, \end{cases} \tag{9.7.5}$$

这里 $\tilde{f}(x) = f(x) + g(x)\alpha(x)$, $\tilde{g}(x) = g(x)\beta(x)$.

实际上, 我们考虑反馈控制

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v.$$

为了保证输入渠道不减, 这里假定 $\beta(x)$ 为 $m \times m$ 非奇异阵. 那么, 对反馈后的闭环系统, 新的 f 和 g 则为 $\tilde{f}$ 及 $\tilde{g}$ 了.

下面的引理保证了式 (9.7.4) 和式 (9.7.5) 的等价性.

引理 9.7.1 (Quaker 引理)　假定 Δ、$\Delta \cup G$、$\Delta \cap G$ 在 x_0 点非奇异, 那么在 x_0 的一个邻域 N 上弱 (f,g)-不变与 (f,g)-不变等价.

可以证明以下的结论.

定理 9.7.1　对系统 (9.7.3), 干扰解耦问题可解, 当且仅当存在一个对合分布 Δ, 它是 (f,g)-不变分布, 并且

$$q_i(x) \in \Delta(x) \subset \ker\{\mathrm{d}h_j(x) \mid j = 1, \cdots, p\}, \quad i = 1, \cdots, q. \tag{9.7.6}$$

当考虑局部解耦问题时, 有具体算法, 可将包含在 $\ker\{\mathrm{d}h_j(x) \mid j = 1, \cdots, p\}$ 中最大的弱 (f,g)-不变分布算出来; 再根据 Quaker 引理验证它是 (f,g)-不变分布; 然后, 构造反馈, 使式 (9.7.5) 成立. 这样的反馈控制就能保证干扰不影响输出.

微分几何方法在非线性系统分析与控制设计中有大量应用, 是非线性系统控制的主要工具和理论基础. 它的弱点是: 在一般微分流形中没有距离或相应的度量, 这个问题将在 第 10 章 讨论.

9.8　注释与参考

经典的微分几何以曲线及曲面为主要研究对象. 德国数学家高斯 (C.F. Gauss, 1777–1855) 是近代曲面几何的创始人. 高斯被称为数学王子, 他对数学的贡献是多方面的.

德国数学家 Hermann Grassmann (1809–1877) 是最早系统研究高维几何理论的人, 他提出两个向量的积 (称为二阶量) 实际上就是李括号.

最早提出流形 (manifold) 概念的是 H. von Helmholtz (1821–1894), 他的目的是给非欧几何一个承载空间. n 维流形的研究与黎曼几何等非欧几何的发展密不可分 (参见第 10 章).

庞加莱猜想由庞加莱在 1904 年提出, 后来被推广到 $n \geqslant 3$. 有趣的是: 对 $n \geqslant 4$ 的情况, 在 20 世纪 60–80 年代均获解决. 而 $n = 3$ 的情况主要由俄罗斯数学家 G. Perelman 于 2003 年证明.

20 世纪 50–60 年代, 控制论的主流是调节原理, 考虑的是单输入单输出系统, 主要工具是复变函数. 60 至 70–80 年代, 研究多输入多输出线性系统成为主流, 主要工具是线性代数. 70 年代以后, 对非线性控制系统的研究成为理论研究的主流方向, 其基本工具就是微分几何.

关于非线性系统的几何理论, 可参考文献 [79, 97, 11], 较新的一些进展见文献 [83, 45, 56], 另一本很好的参考书是文献 [86], 它偏重实际非线性设计.

9.9 习题

9.1 证明 n 维球

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \,|\, x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}$$

是一个 n 维流形, 给出它的一组坐标卡.

9.2 给出 T^2 的一组局部坐标卡, 证明它是一个二维流形.

9.3 证明 S^1 是 $\mathbb{R}^2$ 的浸入子流形.

9.4 定义微分方程

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

的解为 $\mathrm{e}_t^f(x_0)$, 假定解对所有 $t \in \mathbb{R}$ 均存在.

(1) 证明解是一个群;

(2) 定义 $\pi : t \mapsto \mathrm{e}_t^f(x_0)$. 那么 $\pi : (\mathbb{R}, +) \to \left\{\mathrm{e}_t^f(x_0) \,\middle|\, t \in \mathbb{R}\right\}$ 是一个群同构.

9.5 设在 $\mathbb{R}^3$ 上有两向量场

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_1^2 \\ \sin x_2 \\ x_1 + x_3 \end{bmatrix}, \quad g(x) = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{x_3} \\ \cos x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}.$$

计算 (1) $[f, g]$; (2) $[x_1^2 f, (x_2 + x_3) g]$; (3) $[f, [f, g]]$.

9.6 证明式 (9.3.13).

9.7 在 $\mathbb{R}^n$ 上设 $f = Ax$, A 为一 $n \times n$ 矩阵, $h = Cx$, C 为 $p \times n$ 矩阵. 求

(1) $f(h)$; (2) $f^k(h)$, 这里 $f^k(h)$ 是由 $f^k(h) = f(f^{k-1}(h))$ 递推来定义的.

9.8 设 V 为一李代数. 证明 Jacobi 恒等式也可表示为

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0, \quad \forall\, X, Y, Z \in V.$$

9.9 检验在例 9.6.3 中的三个集合均为李代数.

9.10 设 I 与 J 为一李代数 V 的两个理想. 证明

$$I + J := \{X + Y \,|\, X \in I 且 Y \in J\}$$

和

$$IJ := \{[X, Y] \,|\, X \in I 且 Y \in J\}$$

均为 V 的理想.

9.11 检验例 9.6.2 中的所有断言.

9.12 检验例 9.6.3 中的所有断言.

9.13 检验例 9.6.5 中的所有断言.

9.14 检验 $O(n,\mathbb{R})$ 是 $GL(n,\mathbb{R})$ 的李子群.

9.15 检验 $Sp(2n,\mathbb{R})$ 是 $GL(2n,\mathbb{R})$ 的李子群.

9.16 在 $\mathbb{R}^3$ 中设

$$f(x)=\begin{bmatrix}1\\ \sin(x_1+x_2)\\ x_3\end{bmatrix},\quad g(x)=\begin{bmatrix}-1\\ \cos(x_1+x_2)\\ x_3\end{bmatrix}.$$

$$h(x)=x_1^2+x_2-x_3,\quad \omega(x)=(1,x_1+x_2,x_3).$$

计算 (1) ad_f^g; (2) $L_f(h)$; (3) $L_f(w)$.

9.17 设 $X\in V(M)$, $w\in V^*(M)$, $\alpha,\beta\in C^r(M)$.

(1) 证明 $\frac{\partial}{\partial x}(\alpha X)=\mathrm{d}c\otimes X+c\frac{\partial}{\partial x}(X)$; (2) 给出 $\mathrm{d}\langle \alpha w,\beta x\rangle$ 的计算公式.

9.18 向量场的高次李导数可递推地定义如下

$$\mathrm{ad}_f^k\, g=\mathrm{ad}_f(\mathrm{ad}_f^{k-1}\, g)$$

函数及余向量场的高阶李导数可类似地定义. 计算

(1) $\mathrm{ad}_f^2\, g$; (2) $L_f^3(h)$; (3) $L_f^2(w)$.

9.19 设 $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ 定义为

$$\begin{cases}y_1=-x_2,\\ y_2=x_2^2-2x_3,\\ y_3=\sin(x_2-x_3)+2x_1.\end{cases}$$

(1) 证明 $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ 是一个微分同胚;

(2) 一个向量场 X 在 x 坐标中表达为

$$X=\begin{bmatrix}\sin(x_1-x_2)\\ \exp(x_3)\\ x_2^2\end{bmatrix},$$

给出它在 y 坐标下的表达;

(3) 一个向量场 Y 在 y 坐标下表达为

$$Y=\begin{bmatrix}\exp(y_1)\\ y_2+y_1\\ y_3^2\end{bmatrix},$$

给出它在 x 坐标下的表达.

9.20 计算下列向量场的积分曲线:

(1)

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in V(\mathbb{R}^3),$$

初值 $x_0 = (1, 0, 1)^{\mathrm{T}}$;

(2)

$$X = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ -x_2^2 \end{bmatrix} \in V(\mathbb{R}^2),$$

初值 $x_0 = (0, 2)^{\mathrm{T}}$.

9.21 在 $\mathbb{R}^3$ 中, 设 $X = (x_1 + x_2, x_2^2, x_1 - x_3)^{\mathrm{T}}$. 计算下列各式对 X 的导数.

(1) $h(x) = \sin(x_1 + x_2) + \cos(x_1 - x_3) \in C^r(\mathbb{R}^3)$;

(2) $Y(x) = (\sin(x_1 + x_2), \cos(x_1 - x_3), x_2)^{\mathrm{T}} \in V(\mathbb{R}^3)$;

(3) $\omega(x) = (\sin(x_1 + x_2), \cos(x_1 - x_3), x_2) \in V^*(\mathbb{R}^3)$.

9.22 设 D 为有限光滑函数生成的余向量场构成的余分布, 即存在光滑函数 $\{h_1, \cdots, h_k\}$, 使得

$$D = \mathrm{span}\{\mathrm{d}h_1, \cdots, \mathrm{d}h_k\}.$$

记它的正交分布为

$$\Delta = D^{\perp} = \mathrm{span}\{X \mid \langle \mathrm{d}h_j, X \rangle = 0,\ j = 1, \cdots, k\},$$

证明 Δ 是对合的.

9.23 (1) 设 $X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x \in V(\mathbb{R}^2)$, $Y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x \in V(\mathbb{R}^2)$. 找出由 X、Y 生成的李代数 $\{X, Y\}_{LA}$.

(2) 设 $X = Ax \in V(\mathbb{R}^n)$, $Y = Bx \in V(\mathbb{R}^n)$. 找出由 X、Y 生成的李代数 $\{X, Y\}_{LA}$.

9.24 利用式 (9.5.11) 给出下列微分方程的级数解

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{x_2} \\ x_1 + x_3 \\ \sin(x_1) \end{bmatrix}, \quad x(0) = 0.$$

第 10 章 张量场、黎曼几何与辛几何

黎曼几何、辛几何等是控制理论中几何方法的基础, 同时, 它们在物理学、力学及工程实际问题中也有大量应用. 从近代数学的观点看, 它们无非是在流形结构上加上了一个张量场结构. 粗略地说, 如果加上一个对称的张量场结构, 就成了黎曼流形. 如果加上一个反对称的张量场结构, 就成了辛流形. 因此, 我们从统一的张量与张量场分析入手, 讨论黎曼几何和辛几何. 最后对哈密顿系统作一些讨论.

10.1 张量及其运算

设 V 为一个 n 维向量空间. 一个映射 $\phi: \underbrace{V\times\cdots\times V}_{k} \to \mathbb{R}$ 称为多线性映射, 如果它满足

(1)

$$\phi(X_1,\cdots,cX_r,\cdots,X_k)=c\phi(X_1,\cdots,X_r,\cdots,X_k);$$

(2)

$$\phi(X_1,\cdots,Y_r+Z_r,\cdots,X_k)=\phi(X_1,\cdots,Y_r,\cdots,X_k)+\phi(X_1,\cdots,Z_r,\cdots,X_k).$$

设 $\{e_1,\cdots,e_n\}$ 为 V 的一组基, V 的对偶空间记作 V^*, V^* 的一组基 $\{d^1,\cdots,d^n\}$ 称为 $\{e_1,\cdots,e_n\}$ 的对偶基, 如果它满足

$$d^i(e_j)=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j.\end{cases}$$

定义 10.1.1 一个多线性映射

$$\phi: \underbrace{V\times\cdots\times V}_{r}\times\underbrace{V^*\times\cdots\times V^*}_{s}\to\mathbb{R}$$

称为 V 上的张量, 这里 r 称为协变阶, s 称为逆变阶. ϕ 简称为一个 (r,s) 张量. (r,s) 张量集合记作 $\mathcal{T}^r_s(V)$.

记

$$\gamma_{j_1,\cdots,j_s}^{i_1,\cdots,i_r} = \phi(e_{i_1},\cdots,e_{i_r},d^{j_1},\cdots,d^{j_s}), \quad 1 \leqslant i_1,\cdots,i_r \leqslant r, 1 \leqslant j_1,\cdots,j_s \leqslant s.$$

我们构造一个矩阵

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \gamma_{11\cdots 1}^{11\cdots 1} & \cdots & \gamma_{11\cdots 1}^{11\cdots n} & \cdots & \gamma_{11\cdots 1}^{nn\cdots 1} & \cdots & \gamma_{11\cdots 1}^{nn\cdots n} \\ \vdots & & & & & & \\ \gamma_{11\cdots n}^{11\cdots 1} & \cdots & \gamma_{11\cdots n}^{11\cdots n} & \cdots & \gamma_{11\cdots n}^{nn\cdots 1} & \cdots & \gamma_{11\cdots n}^{nn\cdots n} \\ \vdots & & & & & & \\ \gamma_{nn\cdots 1}^{11\cdots 1} & \cdots & \gamma_{nn\cdots 1}^{11\cdots n} & \cdots & \gamma_{nn\cdots 1}^{nn\cdots 1} & \cdots & \gamma_{nn\cdots 1}^{nn\cdots n} \\ \vdots & & & & & & \\ \gamma_{nn\cdots n}^{11\cdots 1} & \cdots & \gamma_{nn\cdots n}^{11\cdots n} & \cdots & \gamma_{nn\cdots n}^{nn\cdots 1} & \cdots & \gamma_{nn\cdots n}^{nn\cdots n} \end{bmatrix}, \tag{10.1.1}$$

称它为 ϕ 的结构矩阵. 记向量 $X \in V$ 为一列向量 $X = (a_1,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$, 即 $X = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i e_i$. 同样, 一个余向量 $\omega \in V^*$, 记作一个行向量 $\omega = (b_1,\cdots,b_n)$, 即 $\omega = \sum\limits_{i=1}^{n} b_i d^i$. 那么我们可以用下式计算张量值

$$\phi(X_1,\cdots,X_r,\omega_1,\cdots,\omega_s) = (\omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_s)\Gamma(X_1 \otimes \cdots \otimes X_r). \tag{10.1.2}$$

协变阶 $r = 0$ 及逆变阶 $s = 0$ 是两个重要的特殊情况. 我们简单地记 $\mathcal{T}^r := \mathcal{T}_0^r$, 其元素称为 r 阶协变张量; 记 $\mathcal{T}_s := \mathcal{T}_s^0$, 其元素称为 s 阶逆变张量.

例 10.1.1 设 $V \in \mathcal{T}^3(\mathbb{R}^3)$, 定义为

$$V(X,Y,Z) = (X \times Y) \cdot Z, \quad X,Y,Z \in \mathbb{R}^3. \tag{10.1.3}$$

这里 $\times$ 是叉积, $\cdot$ 是点积. 熟知, V 为以 X、Y、Z 为棱构成的平行六面体的体积 (当 X-Y-Z 成右手系时为正, 为左手系时为负).

V 显然是一个张量. 如果取标准坐标基底 $e_1 = \delta_1^3$, $e_2 = \delta_2^3$, $e_3 = \delta_3^3$, 那么容易算出

$$\gamma^{111} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle = 0.$$

类此可算出非零元素有

$$\gamma^{123} = \gamma^{132} = \gamma^{231} = 1, \quad \gamma^{213} = \gamma^{312} = \gamma^{321} = -1.$$

于是, 结构矩阵为

$$M_v = [0,0,0,0,0,1,0,1,0,0,0,-1,0,0,0,1,0,0,0,-1,0,-1,0,0,0,0,0].$$

令 $X=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$, $Y=(y_1,y_2,y_3)^{\mathrm{T}}$, $Z=(z_1,z_2,z_3)^{\mathrm{T}}$, 于是

$$\begin{aligned}V(X,Y,Z)&=M_v(X\otimes Y\otimes Z)\\&=x_1y_2z_3+x_1y_3z_2-x_2y_1z_3+x_2y_3z_1-x_3y_1z_2-x_3y_2z_1.\end{aligned}$$

□

下面我们定义两个张量的乘积, 称张量积.

定义 10.1.2 设 $\xi\in\mathcal{T}_s^r$, $\eta\in\mathcal{T}_q^p$, 那么其张量积 $\xi\otimes\eta\in\mathcal{T}_{s+q}^{r+p}$ 由下式定义

$$\begin{aligned}&\xi\times\eta(X_1,\cdots,X_{r+p};\omega_1,\cdots,\omega_{s+q})\\&=\xi(X_1,\cdots,X_r;\omega_1,\cdots,\omega_s)\eta(X_{r+1},\cdots,X_{r+p};\omega_{s+1},\cdots,\omega_{s+q}).\end{aligned}\tag{10.1.4}$$

张量积的结构矩阵是结构矩阵的张量积. 我们将它叙述为一个命题, 证明留给读者.

命题 10.1.1 设 ξ 和 η 的结构矩阵分别为 M_ξ 及 M_η. 那么 $\xi\otimes\eta$ 的结构矩阵为

$$M_{\xi\otimes\eta}=M_\xi\otimes M_\eta.\tag{10.1.5}$$

协变张量 $\sigma\in\mathcal{T}^r(V)$ 有特殊的重要性, 下面着重讨论它们.

定义 10.1.3 $\phi\in\mathcal{T}^r(V)$ 称为一个对称协变张量, 如果

$$\phi(X_1,\cdots,X_i,\cdots,X_j,\cdots,X_r)=\phi(X_1,\cdots,X_j,\cdots,X_i,\cdots,X_r),\quad\forall X_t\in V.$$

ϕ 称为一个反对称协变张量, 如果

$$\phi(X_1,\cdots,X_i,\cdots,X_j,\cdots,X_r)=-\phi(X_1,\cdots,X_j,\cdots,X_i,\cdots,X_r),\quad\forall X_t\in V.$$

记 $\mathcal{S}^k(V)\subset\mathcal{T}^k(V)$ 为 k 阶对称协变张量集合, $\Omega^k(V)\subset\mathcal{T}^k(V)$ 为 k 阶反对称协变张量集合. 我们先研究反对称情况. 我们有

$$\Omega^k(V)=\{0\},\quad k>n.$$

要证明这一点, 考查一个反对称张量 ϕ, 如果 $X_i=X_j$, 那么

$$\begin{aligned}\phi(X_1,\cdots,X_i,\cdots,X_j,\cdots,X_r)&=-\phi(X_1,\cdots,X_j,\cdots,X_i,\cdots,X_r)\\&=-\phi(X_1,\cdots,X_i,\cdots,X_j,\cdots,X_r).\end{aligned}$$

因此它是零. 现在假定 $r>n$, 并设 X_i 为基底 $\{e_1,\cdots,e_n\}$ 中某个元. 显然 $\phi(e_{i_1},\cdots,e_{i_r})=0$, 因为 $e_{i_1},\cdots,e_{i_r}$ 中至少有两个是一样的, 由上面的讨论可知其为零. 再由多线性性, $\phi(X_1,\cdots,X_r)$ 是基底项 $\phi(e_{i_1},\cdots,e_{i_r})$ 的线性组合, 因此它是零. 于是我们得到

$$\Omega(V)=\Omega^0(V)\oplus\Omega^1(V)\oplus\cdots\oplus\Omega^n(V),$$

它是反对称张量空间, 这里 $\Omega^0(V):=\mathbb{R}$.

下面我们定义两个映射, 分别称为对称映射和反对称映射, 它们可以将一般张量变为对称的或反对称的.

定义 10.1.4 对称映射 $\mathcal{P}: \mathcal{T}^r(V) \to \mathcal{S}^r(V)$ 定义为

$$\mathcal{P}(\phi)(X_1, \cdots, X_r) = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S_r} \phi(X_{\sigma(1)}, \cdots, X_{\sigma(r)}); \tag{10.1.6}$$

反对称映射 $\mathcal{A}: \mathcal{T}^r(V) \to \Omega^r(V)$ 定义为

$$\mathcal{A}(\phi)(X_1, \cdots, X_r) = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S_r} \mathrm{sgn}(\sigma) \phi(X_{\sigma(1)}, \cdots, X_{\sigma(r)}), \tag{10.1.7}$$

这里 S_r 是 k 阶对称群.

例 10.1.2 设 $\phi \in \mathcal{T}^3(V)$. 要求 $\mathcal{P}(\phi)$ 及 $\mathcal{A}(\phi)$ 先讨论 3 阶对称群 S_3. 记 $S_3 = \{\sigma_1, \cdots, \sigma_6\}$, 其中

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix},$$

$$\sigma_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \sigma_5 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \sigma_6 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

因此

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(\phi)(X_1, X_2, X_3) = \tfrac{1}{6}[&\phi(X_1, X_2, X_3) + \phi(X_1, X_3, X_2) + \phi(X_2, X_1, X_3) \\ &+\phi(X_2, X_3, X_1) + \phi(X_3, X_1, X_2) + \phi(X_3, X_2, X_1)].\end{aligned}$$

一个置换的符号为 $(-1)^k$, 这里 k 是实现置换的对换个数. 于是 $\mathrm{sgn}(\sigma_1) = (-1)^0 = 1$, $\mathrm{sgn}(\sigma_2) = (-1)^1 = -1$, $\mathrm{sgn}(\sigma_3) = (-1)^1 = -1$, $\mathrm{sgn}(\sigma_4) = (-1)^2 = 1$, $\mathrm{sgn}(\sigma_5) = (-1)^2 = 1$, $\mathrm{sgn}(\sigma_6) = (-1)^5 = -1$. 因此

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\phi)(X_1, X_2, X_3) = \tfrac{1}{6}[&\phi(X_1, X_2, X_3) - \phi(X_1, X_3, X_2) - \phi(X_2, X_1, X_3) \\ &+\phi(X_2, X_3, X_1) + \phi(X_3, X_1, X_2) - \phi(X_3, X_2, X_1)].\end{aligned}$$

□

命题 10.1.2 设 V 为 n 维向量空间, 则 $\Omega(V)$ 的维数是

$$\dim(\Omega(V)) = 2^n. \tag{10.1.8}$$

证明 注意到 $\phi \in \mathcal{T}^k(V)$ 是由

$$\phi(e_{i_1}, \cdots, e_{i_k}), \quad 1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n$$

唯一决定的, 换言之

$$\left\{ \mathcal{A}\left(d^{i_1} \otimes \cdots \otimes d^{i_k}\right) \middle| \, 1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n \right\}$$

是 $\mathcal{T}^k(V)$ 的一个基. 因此 $\dim(\Omega^k(V)) = \binom{n}{k}$, 结论显见. □

反对称张量的楔积在张量分析中是很重要的.

定义 10.1.5　设 $\phi \in \Omega^r(V)$ 及 $\psi \in \Omega^s(V)$. 楔积 $\wedge : \phi \wedge \psi$ 定义为

$$\phi \wedge \psi = \frac{(r+s)!}{r!s!}\mathcal{A}(\phi \otimes \psi) \in \Omega^{r+s}(V). \tag{10.1.9}$$

下面给出一个例子.

例 10.1.3　设 $\phi \in \Omega^2(V)$ 及 $\psi \in \Omega^1(V)$, 那么

$$\begin{aligned}
\phi \wedge \psi(X_1, X_2, X_3) &= \frac{3!}{2!1!}\mathcal{A}(\phi \otimes \psi)(X_1, X_2, X_3) \\
&= \frac{3!}{2!1!}\frac{1}{3!}\sum_{\sigma \in S_3} \operatorname{sgn}(\alpha)(\phi \otimes \psi)(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, X_{\sigma(3)}) \\
&= \frac{1}{2}[(\phi \otimes \psi)(X_1, X_2, X_3) - (\phi \otimes \psi)(X_1, X_3, X_2) \\
&\quad -(\phi \otimes \psi)(X_2, X_1, X_3) + (\phi \otimes \psi)(X_2, X_3, X_1) \\
&\quad +(\phi \otimes \psi)(X_3, X_1, X_2) - (\phi \otimes \psi)(X_3, X_2, X_1)] \\
&= \frac{1}{2}[\phi(X_1, X_2)\psi(X_3) - \phi(X_1, X_3)\psi(X_2) - \phi(X_2, X_1)\psi(X_3) \\
&\quad +\phi(X_2, X_3)\psi(X_1) + \phi(X_3, X_1)\psi(X_2) - \phi(X_3, X_2)\psi(X_1)] \\
&= \phi(X_1, X_2)\psi(X_3) - \phi(X_1, X_3)\psi(X_2) - \phi(X_2, X_3)\psi(X_1).
\end{aligned}$$

□

下面给出楔积的一些基本性质. 它们均可由定义直接计算而得到证明, 具体留作练习.

命题 10.1.3　(1) (双线性性)

$$\phi \wedge (\psi_1 + \psi_2) = \phi \wedge \psi_1 + \phi \wedge \psi_2. \tag{10.1.10}$$

(2) (结合律)

$$\phi \wedge (\psi \wedge \eta) = (\phi \wedge \psi) \wedge \eta. \tag{10.1.11}$$

(3) 如果 $\phi \in \Omega^r(V)$ 且 $\psi \in \Omega^s(V)$, 那么

$$\phi \wedge \psi = (-1)^{rs}\psi \wedge \phi. \tag{10.1.12}$$

(4) 设 $\phi_i \in \Omega^{r_i}(V)$, $i = 1, \cdots, k$, 那么

$$\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_r = \frac{(r_1 + \cdots + r_k)!}{r_1!r_2!\cdots r_k!}\mathcal{A}(\phi_1 \otimes \cdots \otimes \phi_k). \tag{10.1.13}$$

如果 $\omega_1, \cdots, \omega_k \in \mathcal{T}^1(V)$, 那么由式 (10.1.13) 有

$$\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_k = k! \mathcal{A}(\omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_k). \tag{10.1.14}$$

由命题 10.1.2 的证明知 $\dim(\Omega^k(V)) = \binom{n}{k}$. 现在设取 V 的对偶基为 $\{d_1, \cdots, d_n\}$. 那么我们可以构造一个集合

$$B_k = \{d_{i_1} \wedge \cdots \wedge d_{i_k} \mid 1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n\} \subset \Omega^k(V). \tag{10.1.15}$$

注意到 B_k 中共有 $\binom{n}{k}$ 个元素, 而它们显然线性无关, 因此, 它们构成 $\Omega^k(V)$ 的一组基.

命题 10.1.4 定义于式 (10.1.15) 的 B_k 是 $\Omega^k(V)$ 的一组基.

于是 n 维空间 V 的 n 阶反对称张量集是一个一维空间. 利用前面的记号, 它的一个基底元素为 $d_1 \wedge \cdots \wedge d_n$. 因此, 任何 $\omega \in \Omega^n(V)$ 均可表示为 $\omega = \lambda d_1 \wedge \cdots \wedge d_n$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

命题 10.1.5 设 $\omega \in \Omega^n(V)$. $e_1, \cdots, e_n$ 为 V 的一组基, $(v_1, \cdots, v_n) = (e_1, \cdots, e_n)A$. 那么

$$\omega(v_1, \cdots, v_n) = \det(A)\omega(e_1, \cdots, e_n). \tag{10.1.16}$$

证明 记 $\sigma(i_1, \cdots, i_n) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{bmatrix}$. 由多线性性可得

$$\begin{aligned}
\omega(v_1, \cdots, v_n) &= \sum_{\sigma(i_1, \cdots, i_n) \in S_n} a_{i_1,1} a_{i_2,2} \cdots a_{i_n,n} \omega(e_{i_1}, \cdots, e_{i_n}) \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n} \omega(e_1, \cdots, e_n) \\
&= \det(A)\omega(e_1, \cdots, e_n).
\end{aligned}$$

□

用矩阵的半张量积 (参见附录 A) 进行张量计算有极大的便利. 容易证明, 如果 X、Y 为两个列向量, 则

$$X \otimes Y = X \ltimes Y.$$

如果 X、Y 为两个行向量, 则

$$X \otimes Y = Y \ltimes X.$$

利用这个关系可知, 式 (10.1.2) 在半张量积下可表示为

$$\phi(X_1, \cdots, X_r, \omega_1, \cdots, \omega_s) = \omega_s \ltimes \cdots \ltimes \omega_1 \ltimes \Gamma \ltimes X_1 \ltimes \cdots \ltimes X_r. \tag{10.1.17}$$

这个式子的优点是, 因为半张量积的结合律, 我们不再需要括号, 计算可按任意顺序进行. 它的一个用处可在下面的坐标变换中显示出来.

我们在前面已提到, 结构矩阵依赖于坐标, 那么在坐标变换下结构矩阵会怎样变化呢? 设 $X = (a_1, \cdots, a_n)^{\mathrm{T}}$ 为一向量, 如果有一个线性坐标变换 $y = Jx$, 那么在新坐标下,

X 变为 JX. 如果有一个余向量 $\omega=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$, 那么它在新坐标下应表示为什么样子呢? 注意到余向量是向量的线性函数, 因此, 函数值 $\omega(X)=\omega X$ 应与坐标选择无关. 于是, 余向量在新坐标下应表示为 ωJ^{-1}.

现在, 假定在新坐标下 ϕ 的结构矩阵为 $\tilde{\Gamma}$, 那么同样道理, ϕ 的值应与坐标无关, 即

$$
\begin{aligned}
&\omega_s J^{-1}\ltimes\cdots\ltimes\omega_1 J^{-1}\ltimes\tilde{\Gamma}\ltimes JX_1\ltimes\cdots\ltimes JX_r\\
&=\omega_s\ltimes\cdots\ltimes\omega_1\ltimes\Gamma\ltimes X_1\ltimes\cdots\ltimes X_r.
\end{aligned}
\tag{10.1.18}
$$

利用命题 A.1.4, 不难得到

$$
\begin{aligned}
&\omega_s\cdots\omega_1(I_{n^{s-1}}\otimes J^{-1})\cdots(I_n\otimes J^{-1})J^{-1}\tilde{\Gamma}J(I_n\otimes J)\cdots(I_{n^{r-1}}\otimes J)X_1\ltimes\cdots\ltimes X_r\\
&=\omega_s\cdots\omega_1\Gamma X_1\cdots X_r.
\end{aligned}
$$

因此可得

$$
(I_{n^{s-1}}\otimes J^{-1})\cdots(I_n\otimes J^{-1})J^{-1}\tilde{\Gamma}J(I_n\otimes J)\cdots(I_{n^{r-1}}\otimes J)=\Gamma,\tag{10.1.19}
$$

等价地

$$
\tilde{\Gamma}=J(I_n\otimes J)\cdots(I_{n^{s-1}}\otimes J)\Gamma(I_{n^{r-1}}\otimes J^{-1})\cdots(I_n\otimes J^{-1})J^{-1}.\tag{10.1.20}
$$

10.2 流形上的张量场

下面定义流形上的张量场.

定义 10.2.1 在一个 C^∞ 流形 M 上的一个 C^∞ 张量场 $\phi(x)\in\mathcal{T}^r_s(M)$ 是一个规则, 它对每一点 $x_0\in M$ 指定一个 $\phi(x_0)\in\mathcal{T}^r_s(T_{x_0}(M))$, 使得对任意 C^∞ 向量场 $X_1(x),\cdots,X_r(x)$ 和余向量 $\omega_1(x),\cdots,\omega_s(x)$, 映射

$$
\phi(X_1(x),\cdots,X_r(x),\omega_1(x),\cdots,\omega_s(x))
$$

是一个 C^∞ 函数.

类似于张量, 对张量场我们也可同样定义对称、反对称等. 两个张量场的张量积及楔积也是定义好的.

局部地说, 在一个 n 维流形 M 的一个坐标卡 (U,x) 上将 $T_x(M)$ 的自然基底选为 $\frac{\partial}{\partial x_i}$, $i=1,\cdots,n$, 而它的对偶基为 $\mathrm{d}x_i$, $i=1,\cdots,n$.

反对称张量在理论上十分重要. $\Omega^k(M)$ 的一个自然基底为

$$
\{\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_k}\mid 1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n\}.
$$

一个张量场 $\omega\in\Omega^k(M)$ 称为一个 k-形式. 显然 $\dim(\Omega^n(M))=1$. 一个 n-形式可用来给流形定向.

定义 10.2.2 一个流形 M 称为可定向的, 如果存在一个 C^∞ 的 n-形式 ω, 使得

$$\omega(p) \neq 0, \quad \forall p \in M.$$

要理解为什么一个非零 n-形式称为一个定向, 我们先看 $\mathbb{R}^n$. 在 $\mathbb{R}^n$ 上, $\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n$ 称为一个自然定向, 它定的是一个什么方向呢? 我们从低维看起. 在 $\mathbb{R}^2$ 中的自然定向是 $\omega = \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2$. 设坐标轴向量以 $\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_2}$ 反时针定向时对应

$$\omega\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\right).$$

容易算出

$$\omega\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\right) = \mathrm{d}x_1 \otimes \mathrm{d}x_2\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\right) - \mathrm{d}x_1 \otimes \mathrm{d}x_2\left(\frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_1}\right) = 1. \tag{10.2.1}$$

如果我们用 $\left(\frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_1}\right)$ 代入, 则有

$$\omega\left(\frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_1}\right) = -1.$$

现在我们假定有两个向量 V_1、V_2, V_1-V_2 成反时针结构, 于是它们可表示为 (不妨设 $\|V_i\| = 1$)

$$V_1 = \begin{bmatrix}\cos(\alpha)\\ \sin(\alpha)\end{bmatrix}, \quad V_2 = \begin{bmatrix}\cos(\alpha+\beta)\\ \sin(\alpha+\beta)\end{bmatrix}, \quad 0 < \beta < \pi.$$

利用命题 10.1.5 可得

$$\omega(V_1, V_2) = \det\begin{bmatrix}\cos(\alpha) & \cos(\alpha+\beta)\\ \sin(\alpha) & \sin(\alpha+\beta)\end{bmatrix}\omega\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\right) = \sin(\beta) > 0.$$

如果 V_1-V_2 成顺时针结构, 即 $-\pi < \beta < 0$, 则 $\omega(V_1, V_2) < 0$.

同样在 $\mathbb{R}^3$ 中, 令 $\omega = \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3$, 不难检验, 如果三个向量 V_1-V_2-V_3 形成右手系方向, 则 $\Omega(V_1, V_2, V_3) > 0$, 而若为左手系方向, 则 $\Omega(V_1, V_2, V_3) < 0$.

对于 $\mathbb{R}^n$, $n > 3$, 虽然很难用这种直观形象来解释, 但其几何意义也是显见的. 一个非零 n-形式用其在 n 个向量上的取值的正负表明这 n 个向量所构成的框架的定向.

现在, 设 $U, W \subset \mathbb{R}^n$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上的两个开集, $0 \neq \omega \in \Omega^n(\mathbb{R}^n)$, $\omega_U = \omega|_U$, $\omega_W = \omega|_W$. $F: U \to W$ 为一微分同胚, 那么 $F^*(\omega_W) \in \Omega^n(U)$. 于是

$$F^*(\omega_W) = \lambda\omega_U.$$

如果 $\lambda > 0$ 则称为保向映射, 否则称其为逆向映射. 下面的定理给流形定向一个很好的刻画.

设 $\{U_1, \varphi_1\}$, $\{U_2, \varphi_2\}$ 为流形 M 上的两个坐标卡, $U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$, 这两个坐标卡称为保向的, 如果 $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ 是保向的.

定理 10.2.1 [52] 一个流形 M 是可定向的, 当且仅当它有一个由保向坐标卡组成的覆盖.

例 10.2.1 (1) 球面 S^2 是可定向的.

(2) Möbius 带是不可定向的.

我们只分析 (2). 设我们在 Möbius 带 $ACBADB$ 上有一个如图 10.2.1 的定向, 那么把右半边移到左半边 (虚线) 立即得到一个相反的定向, 这说明 Möbius 带可以连续地从一个定向变到另一个定向. □

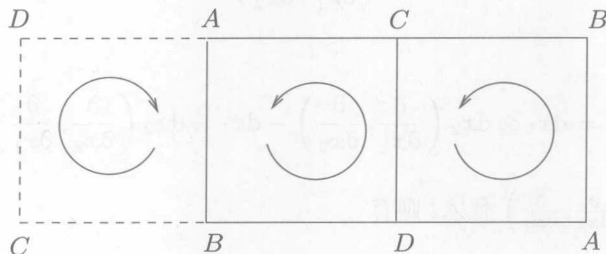


图 10.2.1 Möbius 带上的 "定向"

最后, 我们定义外微分. 我们已经知道对于一个光滑函数 $h \in C^r(M) = \Omega^0(M)$, 其微分 $\mathrm{d}: h \mapsto \mathrm{d}h$ 是一个从 $\Omega^0(M)$ 到 $\Omega^1(M)$ 的 $\mathbb{R}$ 线性映射. 一般地, 我们定义一个 $\mathbb{R}$ 线性映射 $\mathrm{d}: C^k(M) \to C^{k+1}(M)$ 如下, 称它为外微分.

设 $\omega = a(x)\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}$, 那么

$$\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}a(x) \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}. \tag{10.2.2}$$

因为 d 是 $\mathbb{R}$ 线性的, $\{\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k} \,|\, 1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n\}$ 是 $\Omega^k(M)$ 的基底, 上式唯一地定义了这个映射.

注意, 为了避免复杂的几何概念, 我们只在局部坐标下定义外微分. 它在使用上很方便, 但必须证明它与局部坐标选择无关, 而这是易证的.

下面给一个简单例子.

例 10.2.2 设 $\omega = \sin(x_1 - x_2)\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_3 \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$. 那么

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\omega &= (\cos(x_1 - x_2)\mathrm{d}x_1 - \cos(x_1 - x_2)\mathrm{d}x_2) \wedge \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_3 \\
&= -\cos(x_1 - x_2)\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_3 \\
&= \cos(x_1 - x_2)\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 \in \Omega^3(\mathbb{R}^3).
\end{aligned}$$

□

定理 10.2.2 (1)

$$\mathrm{d}^2\omega = 0; \tag{10.2.3}$$

(2) 设 $\theta \in \Omega^r(M)$ 及 $\omega \in \Omega^s(M)$, 那么

$$\mathrm{d}(\theta \wedge \omega) = \mathrm{d}\theta \wedge \omega + (-1)^r \theta \wedge \mathrm{d}\omega. \tag{10.2.4}$$

证明 不失一般性, 我们可假定 ω 只有一项, 即 $\omega = a(x)\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_s}$. 那么

$$\mathrm{d}^2\omega = \sum_{j,k \neq i_1,\cdots,i_s} \frac{\partial^2 a(x)}{\partial x^j \partial x^k} \mathrm{d}x^k \wedge \mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_s}.$$

因为 $\frac{\partial^2 a(x)}{\partial x^j \partial x^k} = \frac{\partial^2 a(x)}{\partial x^k \partial x^j}$ 及 $\mathrm{d}x^k \wedge \mathrm{d}x^j = -\mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^k$, 立即可得式 (10.2.3) .

要证明式 (10.2.4), 设 $\theta = a(x)\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_r}$ 及 $\omega = b(x)\mathrm{d}x^{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{j_s}$. 不妨假定

$$i^p \neq j^q, \quad p = 1, \cdots, r;\ q = 1, \cdots, s,$$

否则, 式 (10.2.4) 的两边均为零, 等式显见成立. 那么

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\,(\theta \wedge \omega) &= \sum_{t \neq i^p, j^q} \left(b\frac{\partial a}{\partial x^t} + a\frac{\partial b}{\partial x^t} \right) \mathrm{d}x^t \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_r} \wedge \mathrm{d}x^{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{j_s} \\
&= \sum_{t \neq i^p, j^q} \frac{\partial a}{\partial x^t} \mathrm{d}x^t \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_r} \wedge b\mathrm{d}x^{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_s} \\
&\quad + \sum_{t \neq i^p, j^q} a\frac{\partial b}{\partial x^t} \mathrm{d}x^t \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_r} \wedge \mathrm{d}x^{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{j_s} \\
&= b\mathrm{d}\theta \wedge \omega + (-1)^r a\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_r} \sum_{t \neq i^p, j^q} \frac{\partial b}{\partial x^t} \mathrm{d}x^t \wedge \mathrm{d}x^{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{j_s} \\
&= \mathrm{d}\theta \wedge \omega + (-1)^r \theta \wedge \mathrm{d}\omega.
\end{aligned}$$

□

最后说明外微分对微分同胚的不变性. 设 $F: M \to N$ 为一微分同胚, $\omega \in \Omega(N)$. 那么 $F^*(\omega) \in \Omega(M)$. 容易证明

$$F_* \circ \mathrm{d} = \mathrm{d} \circ F^*. \tag{10.2.5}$$

10.3 黎曼几何

当 $r = 2$, 张量场 $\phi(x) \in \mathcal{T}^2(M)$ 是一个二次型, 那么在局部坐标下它可表示为

$$\phi(X, Y) = X^{\mathrm{T}}(x) M_\phi(x) Y(x), \quad X(x), Y(x) \in V(M),$$

这里 $M_\phi(x)$ 是 ϕ 的矩阵表示, 它的元素为

$$M_\phi^{i,j}(x) = \phi(x) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right).$$

张量场 $\phi(x)$ 是对称的 (反对称的), 当且仅当 $M_\phi(x)$ 是对称 (反对称) 矩阵. 如果

$$\phi(x)(X,X) \geqslant 0, \quad 且\ \phi(X(x),X(x))=0,\ 当且仅当\ X(x)=0, \quad \forall x \in M,$$

则 $\phi(x)$ 称为正定的. 显然 $\phi(x)$ 是正定的, 当且仅当 $M_\phi(x)$ 是正定矩阵.

定义 10.3.1 一个流形 M 连同一个对称张量 $\phi \in \mathcal{T}^2(M)$ 称为一个伪黎曼流形; 如果 ϕ 还是正定的, 则 (M,ϕ) 称为一个黎曼流形.

设 (M,ϕ) 为一个黎曼流形. 一条光滑曲线 L 定义为映射 $L:[a,b]\to M$. L 的长度定义为

$$|L| = \int_a^b \sqrt{\phi\left(\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}\right)}\,\mathrm{d}t. \tag{10.3.1}$$

两点 $A=L(a)$ 及 $B=L(b)$ 的流形距离定义为

$$d(A,B) = \inf\{|L| \mid L(a)=A,\ L(b)=B\}, \tag{10.3.2}$$

可以证明这是一个距离[52], 因此, 黎曼流形是一个距离空间.

在黎曼流形上, $\phi(X,Y)$ 通常用内积形式 (X,Y) 表示.

例 10.3.1 (1) 在 $\mathbb{R}^n$ 中设 ϕ 由 $M_\phi = I_n$ 给出, 那么显然它是一个黎曼流形. 事实上由这个二次型 ϕ 定义的距离是 $\mathbb{R}^n$ 上的普通距离, 即, 令 $A=(x_1^A,\cdots,x_n^A)$, $B=(x_1^B,\cdots,x_n^B)$, 则

$$d(A,B) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(x_i^A - x_i^B\right)^2}.$$

(2) 在 $\mathbb{R}^4$ 中设 ϕ 由下式给出

$$M_\phi = \begin{bmatrix} c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

这里 c 是光速. 那么 $\mathbb{R}^4$ 带上这个 ϕ 是一个伪黎曼流形, 它是相对论中时空四维空间的 "距离"[68]. □

下面考虑黎曼流形上的积分. 先考虑一般可定向流形上的积分. 设 M 为一可定向流形, $\omega \in \Omega^n(M)$ 是处处不为零的 n-形式, 它给 M 定向. ω 称为一个体积元.

定义 10.3.2 设 (U,ϕ) 为一坐标卡, 即 $\phi(U) \subset \mathbb{R}^n$, 在这个坐标卡下 ω 表示为 $\omega(x) = g(x)\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n$. $C \subset \phi(U)$ 是一个立方体. 那么 ω 在 $\phi^{-1}(C)$ 上的积分定义为

$$\int_{\phi^{-1}(C)} \omega = \int_C g(x)\mathrm{d}v. \tag{10.3.3}$$

设 $f(x)$ 为一有界分段连续函数. 那么 f 在 $\phi^{-1}(C)$ 上的积分定义为

$$\int_{\phi^{-1}(C)} f\omega = \int_C f(x)g(x)\mathrm{d}v. \tag{10.3.4}$$

要说明积分是定义好的, 我们必须指出它与局部坐标无关. 设 $y=y(x)$ 为另一坐标, 由微积分可知式 (10.3.3) 的右边为

$$\int_{C'} g(x(y))\det(J_x(y))\,\mathrm{d}v'.$$

而 ω 在 y 坐标下可表示为

$$\omega = g(x(y))\det(J_x(y))\mathrm{d}y^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}y^n.$$

因此, 式 (10.3.3) 仍然成立.

只要积分对一个小方块定义好了, 它对任何区域也就定义好了, 因为区域可分解成小方块.

显然流形上的积分依赖于体积元的选择. 幸运的是, 下面的定理保证唯一的约定积分在黎曼流形上存在 (证明见文献 [52]).

定理 10.3.1 设 M 为一个可定向黎曼流形, 黎曼距离为 Φ. 那么存在 M 上唯一的定向张量 $\omega\in\Omega^n(M)$, 使对任何正交基 $\{e_1,\cdots,e_n\}$, $\omega(e_1,\cdots,e_n)=1$. 而且, 设 $M_\Phi(x)$ 为 Φ 在给定局部坐标 x 下的矩阵形式, 那么 ω 可表示成

$$\omega=\sqrt{g}\,\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^n, \tag{10.3.5}$$

这里 $g=\det(M_\Phi)$.

这个 ω 称为自然体积元, 在定向黎曼流形上的约定积分就是对这个 ω 的积分.

例 10.3.2 在 $\mathbb{R}^3$ 上设曲面 S 由 $z=F(x,y)$ 定义. 在 S 上的距离为 $\mathbb{R}^3$ 上的导出距离. 考虑在区域 $\tilde{D}$ 上的积分, 这里

$$\tilde{D}=\{(x,y,F(x,y))\,|\,(x,y)\in D\}.$$

记 $T^*(S)$ 的基为 (E_1,E_2), 那么

$$E_1=\phi^{-1}(\tfrac{\partial}{\partial x})=J_{\phi^{-1}}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\\frac{\partial F}{\partial x}&\frac{\partial F}{\partial y}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\\frac{\partial F}{\partial x}\end{bmatrix},$$

同理

$$E_2=\begin{bmatrix}1\\0\\\frac{\partial F}{\partial y}\end{bmatrix}.$$

现在自然体积元的矩阵为 M_Φ

$$M_\Phi=\begin{bmatrix}\langle E_1,E_1\rangle & \langle E_1,E_2\rangle\\ \langle E_2,E_1\rangle & \langle E_2,E_2\rangle\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 & \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}\\ \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial x} & 1+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2\end{bmatrix}.$$

因此

$$\sqrt{g}=\sqrt{1+\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2}.$$

设 $h(x,y)$ 为 S 上的一个函数, 它在 $\tilde{D}$ 上的积分为

$$\int_D h(x,y)\sqrt{1+\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y.$$

□

下面考虑黎曼流形上的微分. 联络是黎曼流形上最重要的微分形式, 它在几何和物理中均有大量应用[6]. 利用半张量积我们将联络的一些基本公式表示为矩阵形式.

定义 10.3.3　设 $f,g\in V(M)$ 为两向量场. 一个映射 $\nabla: V(M)\times V(M)\to V(M)$ 称为一个联络, 如果它满足

(1)

$$\nabla_{rf}sg=rs\nabla_f g,\quad r,s\in\mathbb{R},\tag{10.3.6}$$

(2)

$$\nabla_{hf}g=h\nabla_f g,\quad \nabla_f(hg)=L_f(h)g+h\nabla_f g,\quad h\in C^\infty(M)\tag{10.3.7}$$

在一个局部坐标 x 下, 联络对基底的作用记作

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)=\sum_{k=1}^n\gamma_{ij}^k\frac{\partial}{\partial x_k},$$

这里 γ_{ij}^k 称为 Christoffel 符号. 利用 Christoffel 符号, 我们定义 Christoffel 矩阵 Γ 如下

$$\Gamma=\begin{bmatrix}\gamma_{11}^1 & \cdots & \gamma_{1n}^1 & \cdots & \gamma_{n1}^1 & \cdots & \gamma_{nn}^1\\ \vdots & & & & & & \\ \gamma_{11}^n & \cdots & \gamma_{1n}^n & \cdots & \gamma_{n1}^n & \cdots & \gamma_{nn}^n\end{bmatrix}.$$

两向量间的联络由以下矩阵表示.

命题 10.3.1　设 $f=\sum\limits_{i=1}^n f_i\frac{\partial}{\partial x_i}$ 及 $g=\sum\limits_{j=1}^n g_j\frac{\partial}{\partial x_j}$, 那么

$$\nabla_f g=Dg\ltimes f+\Gamma\ltimes f\ltimes g.\tag{10.3.8}$$

证明　由定义 (10.3.6)~(10.3.7), 可算出

$$\nabla_f g = \sum_{i=1}^n f_i \left(\sum_{j=1}^n L_{\frac{\partial}{\partial x_i}} g_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n g_j \gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k} \right)$$
$$= Dg \ltimes f + \Gamma \ltimes f \ltimes g. \tag{10.3.9}$$

式 (10.3.9) 的最后式子是向量场的向量形式表示, 即向量场 $f = \sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ 简单表示为 $f = (f_1, f_2, \cdots, f_n)^{\mathrm{T}}$. □

设 $y = y(x)$ 是另一个局部坐标. 我们导出 Γ 在新坐标下的表示, 记作 $\tilde{\Gamma}$, $\tilde{\gamma}_{ij}^k$ 为新坐标下的相应元素, 则有以下引理.

引理 10.3.1　在新坐标 y 下, 有

$$\begin{bmatrix} \tilde{\gamma}_{ij}^1 \\ \vdots \\ \tilde{\gamma}_{ij}^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 x_1}{\partial y_j \partial y_1} & \cdots & \frac{\partial^2 x_1}{\partial y_j \partial y_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial^2 x_n}{\partial y_j \partial y_1} & \cdots & \frac{\partial^2 x_n}{\partial y_j \partial y_n} \end{bmatrix} \left[\frac{\partial x_1}{\partial y_i}, \cdots, \frac{\partial x_n}{\partial y_i} \right]^{\mathrm{T}}$$
$$+ \Gamma \ltimes \left[\frac{\partial x_1}{\partial y_i}, \cdots, \frac{\partial x_n}{\partial y_i} \right]^{\mathrm{T}} \ltimes \left[\frac{\partial x_1}{\partial y_j} \cdots \frac{\partial x_n}{\partial y_j} \right]^{\mathrm{T}}. \tag{10.3.10}$$

证明　设

$$f = \frac{\partial}{\partial y_i} = \sum_{s=1}^n \frac{\partial}{\partial x_s} \frac{\partial x_s}{\partial y_i},$$
$$g = \frac{\partial}{\partial y_j} = \sum_{t=1}^n \frac{\partial}{\partial x_t} \frac{\partial x_t}{\partial y_j}.$$

回忆 γ 的定义, 可知

$$\sum_{k=1}^n \tilde{\gamma}_{ij}^k \frac{\partial}{\partial y_k} = \nabla_f g.$$

应用式 (10.3.8) 到上述等式即得式 (10.3.10). □

定理 10.3.2　在新坐标 y 下, $\tilde{\Gamma}$ 是

$$\tilde{\Gamma} = D^2 x D x + \Gamma \ltimes Dx (I \otimes Dx). \tag{10.3.11}$$

证明 直接计算可得

$$D^2x \ltimes Dx = \begin{bmatrix} \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial^2 x_1}{\partial y_s \partial y_1} \frac{\partial x_s}{\partial y_1} & \cdots & \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial^2 x_1}{\partial y_s \partial y_n} \frac{\partial x_s}{\partial y_1} & \cdots & \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial^2 x_1}{\partial y_s \partial y_1} \frac{\partial x_s}{\partial y_n} & \cdots & \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial^2 x_1}{\partial y_s \partial y_n} \frac{\partial x_s}{\partial y_n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial^2 x_n}{\partial y_s \partial y_1} \frac{\partial x_s}{\partial y_1} & \cdots & \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial^2 x_n}{\partial y_s \partial y_n} \frac{\partial x_s}{\partial y_1} & \cdots & \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial^2 x_n}{\partial y_s \partial y_1} \frac{\partial x_s}{\partial y_n} & \cdots & \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial^2 x_n}{\partial y_s \partial y_n} \frac{\partial x_s}{\partial y_n} \end{bmatrix}.$$

用 (ij) 标记它的列, 那么它的 (ij) 列为式 (10.3.10) 右边的第一项.

其次, 记 Dx 的第 i 行为 J_i, 那么

$$\Gamma \ltimes Dx = (\Gamma \ltimes J_1, \Gamma \ltimes J_2, \cdots, \Gamma \ltimes J_n).$$

因为 $I \otimes Dx = \mathrm{diag}(J, \cdots, J)$, 故

$$\begin{aligned} &\Gamma \ltimes Dx \ltimes (I \otimes Dx) \\ &= (\Gamma \ltimes J_1 \ltimes J_1, \cdots, \Gamma \ltimes J_1 \ltimes J_n, \cdots, \Gamma \ltimes J_n \ltimes J_1, \cdots, \Gamma \ltimes J_n \ltimes J_n). \end{aligned}$$

显然上式的 (ij) 列是式 (10.3.10) 右边的第二项. □

设 M 为一黎曼流形, 其黎曼距离由 $G = (g_{ij})_{n\times n}$ 决定. 黎曼几何基本定理说, 在 M 上存在唯一的黎曼联络[43], 并且 Christoffel 符号由

$$\gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{n} g^{ks} \left(\frac{\partial g_{si}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_s} + \frac{\partial g_{js}}{\partial x_i} \right), \tag{10.3.12}$$

决定, 这里 g^{ij} 是 G^{-1} 的 (i,j) 元.

我们知道下述命题[6].

命题 10.3.2 *在黎曼流形上存在唯一的联络, 使*

(1)

$$[f, g] = \nabla_f g - \nabla_g f. \tag{10.3.13}$$

(2) 对 $X, Y, Z \in V(M)$

$$L_X(\omega(Y, Z)) = \omega(\nabla_X Y, Z) + \omega(Y, \nabla_X Z). \tag{10.3.14}$$

称 Christoffel 矩阵是对称的, 如果

$$\gamma_{ij}^k = \gamma_{ji}^k, \quad \forall i, j, k. \tag{10.3.15}$$

实际上我们有以下定理.

定理 10.3.3 设在流形 N 上存在一个联络, 它有对称 Christoffel 矩阵, 那么式 (10.3.13) 成立.

证明 显见如果 Christoffel 矩阵 Γ 对称, 则

$$\Gamma \ltimes f \ltimes g = \Gamma \ltimes g \ltimes f, \quad \forall f, g \in V(N).$$

由式 (10.3.8) 可得

$$\nabla_f g - \nabla_g f = Dgf - Dfg = [f, g].$$

□

由式 (10.3.12) 可知, 对于黎曼流形 Christoffel 矩阵对称. 根据定理 10.3.3, 式 (10.3.13) 显然成立. 由命题 10.3.2 和定理 10.3.3 可知, 在黎曼流形上使 Christoffel 矩阵对称的联络唯一.

一个相关的问题是测地线. 测地线方程[43] 也可以表示成矩阵形式. 一条曲线 $r(t)$ 称为 M 上的测地线, 当且仅当

$$\ddot{r}_t = \Gamma \ltimes \dot{r}^2. \tag{10.3.16}$$

当 $r(t)$ 在局部坐标下表示为 $r(t) = (x_1(t), \cdots, x_n(t))^{\mathrm{T}}$, 那么方程式 (10.3.16) 可表示为以下矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \vdots \\ \ddot{x}_n \end{bmatrix} = \Gamma \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix}^2.$$

从某种意义上讲, 联络是对向量场求导数. 下面考虑二次求导. 如果对函数求两次导数, 我们有

$$L_X L_Y h - L_Y L_X h = L_{[X,Y]} h.$$

受其启发, 我们给出如下定义.

定义 10.3.4 设 X、Y 为黎曼流形 M 上向量场. 定义 $R_0(X, Y) : V(M) \to V(M)$ 为

$$R_0(X, Y)Z = \nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\nabla_X Z) - \nabla_{[X,Y]} Z, \tag{10.3.17}$$

称 $R_0(X, Y)$ 为曲率算子.

曲率算子的一个有趣的性质是, 它只跟单点值有关, 即 $R_0(X, Y)Z|_p$ 只依赖于 X_p、Y_p、Z_p 的值.

曲率算子主要用于定义曲率张量.

定义 10.3.5 设 X、Y、Z、W 为黎曼流形 M 上向量场. 定义一个四阶张量场 $R(X,Y,Z,W)$ 为

$$R(X,Y,Z,W) := (R_0(X,Y)Z,W), \tag{10.3.18}$$

这里 $(\cdot,\cdot)$ 是黎曼内积. $R(X,Y,Z,W)$ 称为黎曼曲率张量.

不难验证, 曲率算子与黎曼曲率张量有如下对称关系.

命题 10.3.3 设 X、Y、Z、W 为黎曼流形 M 上的任意向量场. 则曲率算子与黎曼曲率张量满足

$$R_0(X,Y)Z = -R_0(Y,X)Z, \tag{10.3.19}$$

$$R_0(X,Y)Z + R_0(Y,Z)X + R_0(Z,X)Y = 0, \tag{10.3.20}$$

$$R(X,Y,Z,W) = -R(X,Y,W,Z), \tag{10.3.21}$$

$$R(X,Y,Z,W) = -R(Z,W,X,Y). \tag{10.3.22}$$

设 (M_1,ϕ_1) 及 (M_2,ϕ_2) 为两个黎曼流形, $F: M_1 \to M_2$ 称为一个同构映射, 如果 F 是微分同胚, 并且 F 保持内积不变, 即 $F^*(\phi_2) = \phi_1$.

黎曼曲率张量是同构不变的, 即设 $F: M_1 \to M_2$ 为一同构, 而 R_1、R_2 分别为 M_1 和 M_2 上的黎曼曲率张量, 那么 $F^*(R_2) = R_1$.

黎曼曲率张量是研究流形形状的重要工具, 它在机器人视觉等的研究中起着重要作用.

在局部坐标下, 定义

$$R_0(e_k,e_l)e_i := \sum_{j=1}^{n} R_{ikl}^{j} e_j, \tag{10.3.23}$$

$$R(e_k,e_l,e_i,e_j) := R_{ijkl}, \tag{10.3.24}$$

那么

$$R_{ijkl} = \sum_{s=1}^{n} g_{js} R_{ikl}^{s}, \tag{10.3.25}$$

这里 $g_{ij} = (e_i,e_j)$.

10.4 辛几何

从 10.3 节可以看到, 一个微分流形加上一个对称正定的张量场, 即构成了一个黎曼流形. 依此类似, 一个微分流形加上一个特定的反对称的张量场即构成一个辛流形.

定义 10.4.1 一个 $2n$ 维流形 M 连同一个 2-形式 ω 称为一个辛流形, 如果 ω 是反对称、非奇异且闭的.

一个 k-形式 ω, 如果 $\mathrm{d}\omega=0$, 则称为闭的. 可以用以下方法检验一个 2-形式是不是闭的.

命题 10.4.1 设 ω 在一个坐标卡下的矩阵表现为 $M_\omega=(\sigma_{i,j})$, 那么 $\mathrm{d}\omega=0$ 当且仅当

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\sigma_{jk})+\frac{\partial}{\partial x_j}(\sigma_{ki})+\frac{\partial}{\partial x_k}(\sigma_{ij})=0,\quad \forall i,j,k. \tag{10.4.1}$$

证明 由于 $\sigma=\sum_i\sum_j\sigma_{ij}\mathrm{d}x^i\wedge\mathrm{d}x^j$, 则

$$\mathrm{d}\sigma=\sum_k\sum_i\sum_j\frac{\partial\sigma_{i,j}}{\partial x_k}\mathrm{d}x^k\wedge\mathrm{d}x^i\wedge\mathrm{d}x^j.$$

对一个给定的指标组 I、J、K, 我们合并形如 $\mathrm{d}x^I\wedge\mathrm{d}x^J\wedge\mathrm{d}x^K$ 的项. 设 $k=I$, $i=J$, 及 $j=K$, 则有

$$\frac{\partial\sigma_{JK}}{\partial x_I}\mathrm{d}x^I\wedge\mathrm{d}x^J\wedge\mathrm{d}x^K.$$

设 $k=I$, $i=K$ 及 $j=J$. 由反对称性, 我们有

$$\frac{\partial\sigma_{KJ}}{\partial x_I}\mathrm{d}x^I\wedge\mathrm{d}x^K\wedge\mathrm{d}x^J=-\frac{\partial\sigma_{JK}}{\partial x_I}\mathrm{d}x^I\wedge\mathrm{d}x^K\wedge\mathrm{d}x^J=\frac{\partial\sigma_{JK}}{\partial x_I}\mathrm{d}x^I\wedge\mathrm{d}x^J\wedge\mathrm{d}x^K.$$

同样地, 对 $k=K$, $i=I$ 及 $j=J$ (或 $i=J$ 及 $j=I$) 我们有

$$\frac{\partial\sigma_{IJ}}{\partial x_K}\mathrm{d}x^I\wedge\mathrm{d}x^J\wedge\mathrm{d}x^K.$$

对 $k=J$, $i=K$, 及 $j=I$ (或 $i=I$, 及 $j=K$) 我们有

$$\frac{\partial\sigma_{KI}}{\partial x_J}\mathrm{d}x^I\wedge\mathrm{d}x^J\wedge\mathrm{d}x^K$$

合并上述 6 项, 得到 $\mathrm{d}x^I\wedge\mathrm{d}x^J\wedge\mathrm{d}x^K$ 的系数为

$$2\frac{\partial}{\partial x_I}(\sigma_{JK})+2\frac{\partial}{\partial x_J}(\sigma_{KI})+2\frac{\partial}{\partial x_K}(\sigma_{IJ}),$$

它应为零. 因此, 式 (10.4.1) 成立. □

例 10.4.1 在 $\mathbb{R}^{2n}$, 定义一个 2-形式 ω, 它的矩阵表示为 $M_\omega=J$, 这里

$$J=\begin{bmatrix}0 & I_n\\ -I_n & 0\end{bmatrix}, \tag{10.4.2}$$

那么 $(\mathbb{R}^{2n},\omega)$ 是一个辛流形. □

事实上, 式 (10.4.2) 有一般性. 下面的定理是一个基本关系. 直接证明参见文献 [99].

定理 10.4.1 (Darboux 定理) 在一个 $2n$ 维流形上, 一个 2-形式是一个辛结构, 当且仅当对任一点 $p\in M$, 存在 p 附近的一个坐标卡 $(U,(z))$, $z=(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_n)$, 使得 ω 可局部表示为

$$\omega=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{d}x^i\wedge\mathrm{d}y^i.$$

定义 10.4.2 设 (M,ω) 为一辛流形, 且 $X\in V(M)$ 及 $\mu\in V^*(M)$ 由下式联系起来

$$i_X(\omega):=\omega(X,\cdot)=\mu.$$

定义两个同构: $\sharp: V^*(M)\to V(M)$ 和 $\flat: V(M)\to V^*(M)$ 如下

$$X=\mu^\sharp,\quad \mu=X^\flat. \tag{10.4.3}$$

如果存在一个函数 H 使得 $X=(\mathrm{d}H)^\sharp$, 那么称 H 为哈密顿函数且称 X 为由 H 导出的哈密顿向量场, 记作 $X=X_H$.

设 M 及 N 为两个流形, $F:M\to N$ 为一微分同胚, $\omega\in\Omega^k(N)$. 那么一个导出映射 $F^*:\Omega^k(N)\to\Omega^k(M)$ 可定义为

$$F^*(\omega)(X_1,\cdots,X_k)=\omega(F_*(X_1),\cdots,F_*(X_k)),\quad \forall X_1,\cdots,X_k\in V(M). \tag{10.4.4}$$

下面的定理通常也称为结构不变性.

定理 10.4.2 (Liouville 定理) 设 (M,ω) 为一辛流形, X_H 为一哈密顿向量场. 那么

$$\left(\mathrm{e}_t^{X_H}\right)^*(\omega(x))=\omega\left(\mathrm{e}_t^{X_H}(x)\right). \tag{10.4.5}$$

证明参见文献 [43].

结构不变性是哈密顿力学系统的一个重要特征. 对一个力学系统进行数值求解时, 数值方法一般不保持辛结构, 从而影响了收敛性和收敛速度. 由冯康等创建的辛算法具有保持辛结构的特性[74, 14].

由于辛几何只能处理偶数维的动力系统, 为了给出更一般的几何结构, 我们引进 Poisson 流形.

定义 10.4.3 流形 M 上的一个 Poisson 括号是一个光滑映射 $C^r(M)\times C^r(M)\to C^r(M)$, 它带有以下的基本性质:

(1) (双线性性)

$$\{cF+dP,H\}=c\{F,H\}+d\{P,H\},\quad \{F,cH+dP\}=c\{F,H\}+d\{F,P\},$$

其中常数 $c,d\in\mathbb{R}$;

(2) (Leibniz 规则) $\{F,GH\}=\{F,G\}H+G\{F,H\}$;

(3) (反对称) $\{F,H\}=-\{H,F\}$;

(4) (Jacobi 恒等式) $\{F,\{G,H\}\}+\{G,\{H,F\}\}+\{H,\{F,G\}\}=0$.

一个流形 M 带上一个 Poisson 括号称为一个 Poisson 流形, Poisson 括号在 M 上定义了一个 Poisson 结构.

要说明 Poisson 流形更一般, 我们给出了以下结果.

命题 10.4.2 [43] 设 (M,ω) 为一辛流形, 则存在一个 Poisson 括号使 M 成为一个 Poisson 流形.

证明 对任意两个函数 $f,g\in C^r(M)$ 定义一个 Poisson 括号

$$\{f,g\}=\omega(X_f,X_g),\quad \forall f,g\in C^r(M), \tag{10.4.6}$$

请读者自行验证它确为一个 Poisson 括号. □

定义 10.4.4 设 M 为一 Poisson 流形. 一个光滑的实函数 $C:M\to\mathbb{R}$ 称为一个 Casimir 函数, 如果 C 和任何函数的 Poisson 括号均为零, 即 $\{C,H\}=0,\forall H\in C^r(M)$.

对给定的一个动力系统, 当我们寻找作为 Lyapunov 函数的哈密顿函数时, Casimir 函数会给我们更多的自由度. 因为如果两个函数仅相差一个 Casimir 函数 C, 我们总有 $X_H=X_{H+C}$, 即它们导出的哈密顿向量场是一样的.

命题 10.4.3 [43] 设 M 为一 Poisson 流形, $H:M\to\mathbb{R}$ 为一光滑函数. 由 H 生成的向量场 V_H 是 M 上唯一的满足下式的向量场

$$V_H(F)=\{F,H\}=-\{H,F\},\qquad \forall F:M\to\mathbb{R}. \tag{10.4.7}$$

命题 10.4.4 [43] 设 M 为一 Poisson 流形, $F,H\in C^r(M)$, 其相应的哈密顿向量场为 V_F、V_H. 那么 F 和 H 的 Poisson 括号所确定的哈密顿向量场是这两个哈密顿向量场的 Lie 括号的相反向量, 即

$$V_{\{F,H\}}=-[V_F,V_H]=[V_H,V_F].$$

设 $x=(x^1,\cdots,x^m)$ 是 M 上的局部坐标, 基底的 Poisson 括号

$$J^{ij}(x)=\{x^i,x^j\},\qquad i,j=1,\cdots,m,$$

称为 Poisson 流形 M 相对于给定坐标的结构函数, 它唯一决定了 Poisson 结构本身. 为方便将结构函数排成 $m\times m$ 矩阵 $J(x)$, 称为 M 的结构矩阵. 于是 Poisson 括号在局部坐标下可表示为

$$\{F,H\}=\mathrm{d}F(x)J(x)\nabla H(x).$$

命题 10.4.5 [43] 设 $J(x)=(J^{ij}(x))$ 为变量 $x=(x^1,\cdots,x^m)$ 的 $m\times m$ 矩阵, 定义于一个开集 $M\subset R^m$. 那么 $J(x)$ 是定义于 M 上的 Poisson 括号 $\{F,H\}=\mathrm{d}FJ\nabla H$, 当且仅当它满足条件:

(1) (反对称)

$$J^{ij}(x)=-J^{ji}(x),\qquad i,j=1,\cdots,m.$$

(2) (Jacobi 恒等式)

$$\sum_{l=1}^m\left(J^{il}\partial_lJ^{jk}+J^{kl}\partial_lJ^{ij}+J^{jl}\partial_lJ^{ki}\right)=0,\quad i,j,k=1,\cdots,m,\forall x\in M.$$

命题 10.4.6 [43] 设 M 为一 Poisson 流形, $x\in M$. 那么存在唯一的线性映射

$$\pi=\pi|_x:T^*M|_x\to TM|_x,$$

使对任何实值函数 $H\in C^r(M)$, 有

$$\pi(\mathrm{d}H(x))=V_H|_x.$$

定义 10.4.5 设 M 为一 Poisson 流形, $x\in M$. M 在点 x 的秩定义为线性映射 $\pi|_x:T^*M|_x\to TM|_x$ 的秩.

命题 10.4.7 [43] 一个 Poisson 流形在任意一点的秩均为偶数.

定义 10.4.6 设 M 和 N 为 Poisson 流形, 一个 Poisson 映射 $\phi: M\to N$ 定义为使 Poisson 括号不变的映射, 即

$$\{F\phi,H\phi\}_M=\{F,H\}_N\phi,\quad \forall F,H\in C^r(N).$$

命题 10.4.8 [43] 设 M 为一 Poisson 流形, X_H 为一哈密顿向量场. 那么对每一个 t, $e_t^{X_H}:M\to M$ 决定了一个从 M 到自身的 Poisson 映射.

推论 10.4.1 [43] 如果 X_H 为 Poisson 流形 M 上的一个哈密顿向量场, 那么 M 在 $e_t^{X_H}(x)$ 上的秩对任何 $t\in\mathbb{R}$ 均等于 M 在 x 的秩.

下面是推广的 Darboux 定理.

定理 10.4.3 (Darboux 定理[43]) 设 M 为一 m 维 Poisson 流形, 且有定常秩 $2n\leqslant m$, 则在任一点 $x_0\in M$ 存在一个局部坐标

$$(p,q,z)=(p^1,\cdots,p^n,q^1,\cdots,q^n,z^1,\cdots,z^l),\quad 2n+l=m,$$

使得 Poisson 括号可表示为

$$\{F,H\}=\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial F}{\partial q^i}\frac{\partial H}{\partial p^i}-\frac{\partial F}{\partial p^i}\frac{\partial H}{\partial q^i}\right),$$

而 $z_1,\cdots,z_l$ 为 Casimir 函数.

10.5 哈密顿系统

哈密顿系统是一般力学系统的一个深刻而简洁的刻画. 也许可以这样说, 辛几何是由于研究哈密顿系统而发展起来的. 近年来, 广义哈密顿系统与广义哈密顿控制系统的研究更是将哈密顿系统的研究对象从力学系统推广到电力、化工等十分广泛的一大类动力系统[70, 97, 61]. 本节对哈密顿系统作一个综合介绍.

从辛流形 $\{M,\omega\}$ 出发, 设 $(q_1,\cdots,q_n;p_1,\cdots,p_n)$ 为标称坐标, 使得在这个坐标上 $\omega=\sum\limits_{i=1}^{n}\mathrm{d}q_i\wedge\mathrm{d}p_i$, 即 ω 的结构矩阵为

$$M_\omega=J=\begin{bmatrix}0 & I_n\\ -I_n & 0\end{bmatrix}.$$

那么对任何一个光滑函数 H, 取为哈密顿函数, 其哈密顿向量场

$$X_H=(\mathrm{d}H)^\sharp=J\mathrm{d}H=\left(\frac{\partial H}{\partial q_i},\frac{\partial H}{\partial p_i}\right). \tag{10.5.1}$$

因此它的解 (积分曲线) 满足

$$\begin{cases}\dot{q}_i=\frac{\partial H}{\partial p_i},\\ \dot{p}_i=-\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i=1,\cdots,n.\end{cases} \tag{10.5.2}$$

这就是标准的哈密顿方程.

那么一个力学系统是如何用哈密顿方程来刻画的呢? 我们将由牛顿第二定律导出力学系统的拉格朗日方程和哈密顿方程. 设有一个 N 个粒子构成的力学系统, 用 x_i, $i=1,\cdots,m=3N$ 表示它们的直角坐标, 设系统有 n 个自由度, 用 q_i, $i=1,\cdots,n$ 表示广义坐标. 那么

$$x_i=x_i(q_1,\cdots,q_n), \quad i=1,\cdots,m; \tag{10.5.3}$$

其速度为

$$\dot{x}_i=\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha, \quad i=1,\cdots,m; \tag{10.5.4}$$

其加速度为

$$\begin{aligned}\ddot{x}_i&=\sum_{\alpha=1}^{n}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha}\right)\dot{q}_\alpha+\frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha}\ddot{q}_\alpha\right]\\ &=\sum_{\alpha=1}^{n}\left[\sum_{\beta=1}^{n}\frac{\partial^2 x_i}{\partial q_\alpha\partial q_\beta}\dot{q}_\alpha\dot{q}_\beta+\frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha}\ddot{q}_\alpha\right], \quad i=1,\cdots,m.\end{aligned} \tag{10.5.5}$$

下面考虑力. 这里只考虑保守力而不考虑外力. 设 U 为势函数, 则

$$F_i=-\frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad i=1,\cdots,m. \tag{10.5.6}$$

假定约束力与运动相容, 则约束力 C_i 不做功, 即

$$\sum_{i=1}^{m}C_i\mathrm{d}x_i=0. \tag{10.5.7}$$

特别是, 考虑 q_r 方向的运动, 则有

$$\sum_{i=1}^{m} C_i \frac{\partial x_i}{\partial q_r} = 0, \quad r = 1, \cdots, n. \tag{10.5.8}$$

考虑系统的动能

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} m_i \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha \sum_{\beta=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial q_\beta}\dot{q}_\beta = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n} \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta \sum_{i=1}^{m} m_i \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha}\frac{\partial x_i}{\partial q_\beta}. \tag{10.5.9}$$

于是可得

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} = \sum_{\alpha=1}^{n} \dot{q}_\alpha \sum_{i=1}^{m} m_i \frac{\partial x_i}{\partial q_r}\frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha}, \quad r = 1, \cdots, n. \tag{10.5.10}$$

而其对时间的导数为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} = \sum_{\alpha=1}^{n} \Bigg[& \ddot{q}_\alpha \sum_{i=1}^{m} m_i \frac{\partial x_i}{\partial q_r}\frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha} + \dot{q}_\alpha \sum_{\beta=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} m_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_\alpha \partial q_\beta}\dot{q}_\beta \frac{\partial x_i}{\partial q_r} \\ & + \dot{q}_\alpha \sum_{\beta=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} m_i \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha}\frac{\partial^2 x_i}{\partial q_\beta \partial q_r}\dot{q}_\beta \Bigg], \quad r = 1, \cdots, n.\end{aligned} \tag{10.5.11}$$

将 T 对 q_r 求导可得

$$\frac{\partial T}{\partial q_r} = \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n} \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta \sum_{i=1}^{m} m_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_r \partial q_\beta}\frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha}. \tag{10.5.12}$$

由式 (10.5.11) 及式 (10.5.12) 得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial T}{\partial q_r} = \sum_{\alpha=1}^{n} \left[\ddot{q}_\alpha \sum_{i=1}^{m} m_i \frac{\partial x_i}{\partial q_r}\frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha} + \dot{q}_\alpha \sum_{\beta=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} m_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_\alpha \partial q_\beta}\frac{\partial x_i}{\partial q_r} \right], \\ r = 1, \cdots, n.\end{aligned} \tag{10.5.13}$$

将式 (10.5.5) 乘以 $m_i \frac{\partial x_i}{\partial q_r}$ 再对 i 求和, 则得式 (10.5.13) 的左边. 于是有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial T}{\partial q_r} = \sum_{i=1}^{m} \ddot{x}_i m_i \frac{\partial x_i}{\partial q_r}. \tag{10.5.14}$$

由牛顿第二定律

$$\ddot{x}_i m_i = F_i + C_i, \quad i = 1, \cdots, m,$$

代入式 (10.5.14), 并利用式 (10.5.8) 得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial T}{\partial q_r} = -\frac{\partial U}{\partial q_r}. \tag{10.5.15}$$

定义拉格朗日函数

$$L = T - U, \tag{10.5.16}$$

于是可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial L}{\partial q_r} = 0, \quad r = 1, \cdots, n. \tag{10.5.17}$$

方程式 (10.5.17) 称为拉格朗日方程.

为得到哈密顿方程, 定义广义动量

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = 1, \cdots, n. \tag{10.5.18}$$

定义哈密顿函数

$$H(q, p) = \sum_{j=1}^{n} p_j \dot{q}_j - L(q, \dot{q}). \tag{10.5.19}$$

注意到 q_j 与 p_j 独立, 而 $\dot{q}_j = \dot{q}_j(q_j, p_j)$, 于是有

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i + \sum_{j=1}^{n}\left[p_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_i} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_i}\right] = \dot{q}_i, \quad i = 1, \cdots, n, \tag{10.5.20}$$

并且

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} - \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i} = -\dot{p}_i, \quad i = 1, \cdots, n. \tag{10.5.21}$$

式 (10.5.20) 及式 (10.5.21) 就是式 (10.5.2).

记 $x = (q, p)$, 那么哈密顿方程可表示为

$$\dot{x} = J\nabla H, \quad 这里 \quad J = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix}. \tag{10.5.22}$$

J 称为哈密顿系统的结构矩阵. 实际上, 它也是辛形式 (ω) 的结构矩阵.

将式 (10.5.9) 写成

$$T = \frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}} M(q)\dot{q}, \tag{10.5.23}$$

这里 $M(q)$ 称为广义质量, 表示为

$$M(q) = (m_{\alpha,\beta}), \quad m_{\alpha,\beta} = \sum_{i=1}^{m} m_i \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha}\frac{\partial x_i}{\partial q_\beta}.$$

由式 (10.5.23) 及定义式 (10.5.18) 可知

$$\sum_{j=1}^{n} p_j \dot{p}_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} = 2T.$$

因此可知 $H = T + U$ 是系统的总能量. 由式 (10.5.22) 可得

$$\dot{H} = \mathrm{d}HJ\nabla H = 0. \tag{10.5.24}$$

这表示, 封闭的力学系统能量守恒.

如果将式 (10.5.22) 中的结构矩阵 J 换成一般的 $M(x)$, 则得到广义哈密顿系统

$$\dot{x} = M(x)\nabla H. \tag{10.5.25}$$

现在, 可将结构矩阵分解为 $M(x) = P(x) + J(x)$, 这里 $P(x)$ 是对称矩阵, $J(x)$ 是反对称矩阵. 如果 $P(x) = 0$, 则得到守恒的广义哈密顿系统. 根据 $P(x)$ 的正负特征根对应的特征子空间, 还可将 $P(x)$ 分成 $P(x) = S(x) - R(x)$, 这里 $S(x)$ 及 $R(x)$ 均为半正定阵. 如果 $S(x) = 0$, 则称系统为广义耗散哈密顿系统.

如果系统对外界有能量交换, 就变为控制哈密顿系统. 目前, 在控制理论的研究中, 讨论常用如下形式的广义哈密顿控制系统

$$\begin{cases} \dot{x} = (J(x) - R(x))\nabla H(x) + \sum\limits_{i=1}^{m} g_i(x) u_i \\ y_j = g_i^{\mathrm{T}}(x), \quad j = 1, \cdots, m, \end{cases} \tag{10.5.26}$$

这里 $R(x) \geqslant 0$ 是半正定的, $J(x)$ 是反对称的, 这表明, 在没有输入量时系统是耗散的; u_i 是控制, 它代表外界的能量注入; y_i 为系统输出. 这个模型涵盖了大量的工程控制系统.

10.6 注释与参考

不管是黎曼几何还是辛几何都是非欧几何. 直到 18 世纪末, 人们都只相信欧几里得几何学. 整个欧氏几何就是建立在五个简单公理上, 其中第五个公理, 也称平行公设说: "过直线外一点, 能且只能作该直线的一条平行线." 这条公设不像其他四条那么自然, 更像一个定理. 于是, 人们试图放弃这个公设而证明它, 其结果是导致了一个新的几何学, 称为非欧几何. 最早系统发表非欧几何理论的是罗巴契夫斯基 (H.U. Lobachevsky, 1792–1856). 黎曼 (B. Riemann, 1826–1866) 建立了一种更广泛的几何, 称之为黎曼几何. 欧氏几何和罗巴契夫斯基几何都可以看作它的特例.

从本章可以看出, 一种新的几何无非就是在流形上定义一个新的二阶张量场, 关键是它是否有实际意义.

一个迭代算法 $x_{n+1} = Tx_n$ 称为辛算法, 如果它保持辛结构 ω 不变, 即

$$T^*(\omega(x)) = \omega(T(x)).$$

10.7 习题

10.1 证明式 (10.1.5), 即张量积的结构矩阵是结构矩阵的张量积.

10.2 设 $\phi \in \Omega^2(V)$ 及 $\psi \in \Omega^2(V)$, 计算 $\phi \wedge \psi(X_1, X_2, X_3, X_4)$.

10.3 证明楔积性质式 (10.1.10)~式 (10.1.13). (参考文献 [52])

10.4 在 $\mathbb{R}^3$ 上定义 (见式 (10.1.3)) $V(X,Y,Z) = (X \times Y) \cdot Z$, $X,Y,Z \in \mathbb{R}^3$. 证明: $V \in \Omega^3(\mathbb{R}^3)$.

10.5 设 $0 \neq \phi \in \Omega^n(V)$, $X_1, \cdots, X_n \in V$. 证明 $X_1, \cdots, X_n \in V$ 线性无关, 当且仅当 $\phi(X_1, \cdots, X_n) \neq 0$.

10.6 证明 Klein 瓶是不可定向的.

10.7 在 $\mathbb{R}^3$ 内有一二维流形 S, 局部坐标映射 $\phi: \{(x,y,z) \in S\} \to (u,v) \in \mathbb{R}^2$, ϕ^{-1} 为 $x = f(u,v)$, $y = g(u,v)$, $z = h(u,v)$. 设 S 用 $\mathbb{R}^3$ 的继承距离, 给出 S 上的积分表示式.

10.8 用 Christoffel 符号 Γ_{ij}^k 和 g_{ij} 表示式 (10.3.23) 中的 R_{ikl}^j 和式 (10.3.24) 中的 $R(e_k, e_l, e_i, e_j)$.

10.9 检验由式 (10.4.6) 定义的是一个 Poisson 括号.

10.10 设 $\{M, \sigma\}$ 为一辛流形. 局部坐标下 σ 的矩阵表示为 M_σ. 定义 Poisson 括号

$$\{f, g\} := \mathrm{d}f M_\sigma^{-1} \nabla g.$$

证明它与式 (10.4.6) 等价.

10.11 证明由式 (10.4.7) 定义的向量场存在唯一.

第 11 章

代数几何初步

代数几何是一门较艰深的数学分支, 它不仅内容庞杂, 而且流派甚多, 讲法不一. 本章介绍的只是与控制理论联系密切的一些基本概念和结果. 然后, 以线性控制系统族的实现问题为例, 说明有关概念及其意义.

11.1 多项式、平面曲线与仿射代数集

代数几何的研究对象就是多元多项式. 更准确地说, 研究多元多项式零点集的结构. 我们曾在第 7 章中对一元多项式的零点集作了许多研究, 特别是伽罗瓦理论, 对一元多项式根式解作了完整的描述. 为了研究多元多项式, 我们还要对环、域及一元多项式的相关概念作一个回忆.

一个环 R 上有两个运算: $+$ 和 $\times$. 如果 R 对乘法可交换, 则称为交换环; 如果它对乘法还有单位元 1, 则称有单位元环. 代数几何只关心多元多项式, 因此除非特别说明, 总假定讨论的环是有单位元的交换环. 环中的一个元素 a 称为不可约的, 如果它的因子只有 a 和 1. 如果 $a \neq 0$, $b \neq 0$, 但 $ab = 0$, 则称 a, b 为零因子, 没有零因子的环称为整环.

设 R 为一个交换环, H 为它的一个子环. 如果

$$hr \in H, \quad \forall h \in H,\ r \in R,$$

则称 H 为 R 的一个理想. 一个理想 H 称为素理想, 如果: $fg \in H$ 则或者 $f \in H$ 或者 $g \in H$.

理想在代数几何的讨论中至关重要, 因此在这里作一些补充讨论.

定义 11.1.1 (1) 称一个理想 $H \subset R$ 具有限基, 如果存在 $\{f_1, \cdots, f_n\} \subset H$ 使任一 $f \in H$ 都可以表示为

$$f = \sum_{i=1}^{n} r_i f_i, \quad r_i \in R,$$

这时 $\{f_1, \cdots, f_n\}$ 称为 H 的一组基, 记作 $H = (f_1, \cdots, f_n)$.

(2) 如果 H 由一个元素生成, 即它的基只含一个元素

$$H = (f) = Rf,$$

则称 H 为主理想.

(3) 如果 R 中的每个理想都有有限基, 则称 R 为 Noether 环.

命题 11.1.1 一个环 R 是 Noether 环, 当且仅当它的每一个理想升列 $H_1 \subset H_2 \subset \cdots$ 在有限步后停止上升, 即存在 i^* 使得 $H_{i^*} = H_{i^*+1} = H_{i^*+2} = \cdots$.

证明 如果 R 是 Noether 环, $H_1 \subset H_2 \subset \cdots$ 为一升列. 令 $H = \bigcup H_i$, 则 H 也是一理想. 于是它有有限基 $\{f_1, \cdots, f_n\}$, 这些基元素必属于某些环. 于是, 有限步后全部出现, H_i 就不升了. 反之, 如果有一个理想没有有限基, 那么任取 f_1, 作 $H_1 = (f_1)$, 有 $f_2 \neq H_1$, 再作 $H_2 = (f_1, f_2), \cdots$, 这个过程可一直继续下去. □

利用这个命题可证明以下定理.

定理 11.1.1 (Hilbert 基定理) 如果 R 是 Noether 环, 那么 $R[x]$ 也是 Noether 环.

由于域里的每个理想都是主理想, 则有如下推论:

推论 11.1.1 (Hilbert 基定理) 设 K 为任意域, 则 $K[x_1, \cdots, x_N]$ 是 Noether 环.

在整环 R 上考虑元素对集合 $K(R) = \{(a,b) | b \neq 0\}$. 两个元素对 (a_1, b_1), $(a_2, b_2) \in K(R)$ 称为等价, 记作 $(a_1, b_1) \sim (a_2, b_2)$, 如果 $a_1 b_2 = a_2 b_1$. 容易证明, 这是一个等价关系. 为方便记, 将 $K(R)$ 中元素记作 $(a, b) = a/b$. 在 $K(R)/\sim$ 上定义加法和乘法运算为

$$[a_1/b_1] + [a_2/b_2] = [(a_1 b_2 + a_2 b_1)/b_1 b_2]; \quad [a_1/b_1] \times [a_2/b_2] = [a_1 a_2/b_1 b_2],$$

则 $K(R)$ 构成一个域, 称为 R 的商域.

一个域称为有限域, 如果存在 $k > 0$ 使得 $\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{k} = 0$. 最小的正整数 k 称为域的特征值. 如果不存在这样的 k, 则称其特征值为 0. 例如, p 为素数时, $\mathbb{Z}_p$ 是有限域, 其特征数为 p. 有理数域 $\mathbb{Q}$、实数域 $\mathbb{R}$、复数域 $\mathbb{C}$ 的特征值为 0. 一个域 K 称为代数闭域, 如果 $\forall p(x) \in K[x]$, $p(x)$ 的根也属于 K. $\mathbb{C}$ 是代数闭域, $\mathbb{Q}$、$\mathbb{R}$ 都不是代数闭域. 一个特征数为零的域 K 上的多项式环 $K[x_1, \cdots, x_N]$ 是唯一分解环, 即 $f(x_1, \cdots, x_N) \in K[x_1, \cdots, x_N]$ 可分解为 $f(x) = f_1(x) \cdots f_r(x)$ $(x = (x_1, \cdots, x_N))$, 这里 $f_i(x)$ 是不可约多项式. 这个分解除顺序和定常 (非零) 因子外唯一.

定义 11.1.2 (1) 设 K 为一个域, 则 $\mathbb{A}_K^N = \{a_1, \cdots, a_N \,|\, a_i \in K\}$ 称为 K 上的仿射 N-空间;

(2) $V \subset \mathbb{A}_K^N$ 称为仿射代数集, 如果

$$V = \left\{ a = (a_i, \cdots, a_N) \in \mathbb{A}_K^N \,\middle|\, f_\alpha(a) = 0, f_\alpha(x) \in K[x_1, \cdots, x_N] \right\}.$$

换言之, 仿射代数集是一组多元多项式的共同零点.

(3) 给定 $f(x,y) \in K[x,y]$, 则其零点集 $X = \left\{ (x,y) \in \mathbb{A}_K^2 \,\middle|\, f(x,y) = 0 \right\}$ 称为 $f(x,y)$ 的代数曲线.

设 $f = f_1 \cdots f_r \in K[x,y]$, 这里 f_i 不可约. X 及 X_i 分别为 f 及 f_i 的代数曲线, 则

$$X = X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_r,$$

X_i 称为 X 的不可约分量.

在一元多项式中的一个重要结果是: 一个 n 次多项式有 n 个根, 它称为代数基本定理. 对于代数曲线, 它的次数定义为其相应多项式的次数. 即由 $x^2+y^3=0$ 决定的代数曲线次数为 3, 由 $x^2+x^2y^2=0$ 决定的代数曲线次数为 4 等. 在代数闭域上说 $f(x,y)\in K[x,y]$ 有多少个零点没有意义, 因为由代数基本定理, 任意选定 x (或 y) 则它变为关于 y (相应地, x) 的多项式, 于是可找到其零点 y (相应地, x), 使 (x,y) 成为其零点. 因此, 有意义的是两个方程有多少个解, 或者说, 两条代数曲线有多少个交点.

不难证明以下的两个结果[103].

命题 11.1.2 设 $f(x,y),g(x,y)\in K[x,y]$, $f(x,y)$ 不可约, 那么 $f(x,y)=g(x,y)=0$ 只有有限个解.

在上面的命题中 K 可以是任意的, 因此无法给出解的准确个数. 就像一元二次方程可能有两个, 一个或零个实根一样, 因为实数域不是代数封闭的. 下面的定理给出准确估计.

定理 11.1.2 (Bezout 定理) 设 K 为代数封闭域, $f(x,y),g(x,y)\in K[x,y]$, 且 $f(x,y)$ 及 $g(x,y)$ 均不可约. 那么 $f(x,y)=g(x,y)=0$ 解的个数为 $\deg(f(x,y))\times\deg(g(x,y))$.

例 11.1.1 代数基本定理可以看作 Bezout 定理的一个特例, 即 $f(x)=0$ 可看作 $f(x)=y$ 及 $y=0$ 这两个不可约多项式的交. 于是, 解的个数就等于

$$\deg(f(x)-y)\times\deg(y)=\deg(f(x))\times 1=\deg(f(x)).$$

□

K 不是代数封闭域时解的个数常常也是十分重要的. 数论中的一个基本问题就是求当 $K=\mathbb{Q}$ 时 $f(x,y)\in K[x,y]$ 的解. 例如, 费马大定理就是问: 当 $K=\mathbb{Q}$ 时 $x^n+y^n=1$ $(n\geqslant 3)$ 是否有解 $(x,y)\in\mathbb{A}_K^2$? 因此, 费马大定理的最后证明依赖于椭圆曲线的性质, 这一点也就不奇怪了 (关于椭圆曲线, 可参见例 11.1.3).

下面我们讨论一种特殊的平面曲线, 称为有理曲线.

定义 11.1.3 设 X 为由代数方程 $f(x,y)=0$ 定义的不可约代数曲线. X 称为有理曲线, 如果存在两个有理函数 $\phi(t)$ 及 $\psi(t)$ (其中至少有一个不是常值函数), 使得

$$f(\phi(t),\psi(t))=0 \tag{11.1.1}$$

为 t 的恒等式.

例 11.1.2 设代数曲线 X 由方程

$$y^2=x^2+x^3 \tag{11.1.2}$$

确定 (见图 11.1.1). 如果我们从原点作一条斜线 $y=tx$, 这里 t 是斜率, 代入式 (11.1.2) 可得

$$x^2(t^2-x-1)=0, \tag{11.1.3}$$

$x=0$ 对应的是原点. 除此之外, 还有一个解为 $x=t^2-1$. 因此, 相应的 y 为 $y=t(t^2-1)$. 于是我们可得到曲线的单参数表示形式

$$\begin{cases} x=t^2-1, \\ y=t(t^2-t). \end{cases} \tag{11.1.4}$$

因为 t 是斜率, 我们不妨在 $x=1$ 处画一垂直线. 于是过每一个点 $P\in X$, 可画一通过原点的直线, 它与 $x=1$ 的交点 Q 的 y 坐标就是 t, 因此, 曲线 X 与直线 $x=1$ 一一对应 (除原点外). □

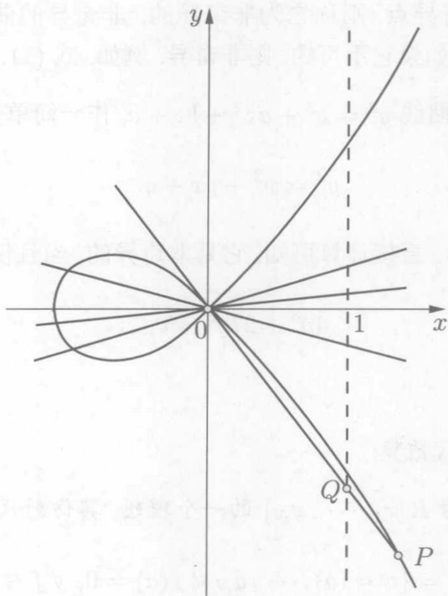


图 11.1.1

这种一一对应关系十分有用, 例如求有理曲线上的积分

$$\int_X g(x,y)\mathrm{d}x$$

就可以化为 t 的有理函数的积分 (根据方向可能取相反值)

$$\int_{t=-\infty}^{\infty} g(x(t),y(t))x'(t)\,\mathrm{d}t.$$

设 X 为有理曲线. 通过讨论 X 上的有理函数域 $K(X)$ 与有理函数域 $K(t)$ 的同构, 可以得到 t 到 $X=(x,y)$ 的同构映射, 记作 $x=\phi(t)$, $y=\psi(t)$. 对于这种参数化, 我们有如下结果.

定理 11.1.3 [103] 上述参数化, $x=\phi(t)$, $y=\psi(t)$ 具有如下性质:

(1) 除可能的有限点外, 任何其他点 (x_0,y_0), 都有相应的 t_0, 使得

$$(x_0,y_0)=(\phi(t_0),\psi(t_0)).$$

(2) 除可能的有限点外, 这个参数表示是唯一的.

定义 11.1.4 设一条平面曲线由 $f(x,y)=0$ 定义. $P=(x_0,y_0)$ 称为其一个奇异点, 如果

$$f(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=0.$$

一条曲线, 如果没有奇异点, 则称它为非奇异的. 非奇异的曲线是光滑的. 一个熟知的事实是: 一条三次曲线, 如果它不可约, 则非奇异. 例如, 式 (11.1.2) 就是非奇异的.

例 11.1.3 考虑三次曲线 $y^2=z^3+az^2+bz+c$, 作一简单变换 $z=x-a/3$ 即得

$$y^2=x^3+px+q. \tag{11.1.5}$$

它称为 Weierstrass 标准形. 直接计算可知, 它是非奇异的, 当且仅当

$$4p^3+27q^2=0,$$

这时它称为椭圆曲线. □

下面讨论一般的仿射代数集.

定义 11.1.5 设 H 为 $K[x_1,\cdots,x_N]$ 的一个理想, 其仿射代数集

$$V(H)=\{a=(a_1,\cdots,a_N)\,|\,f(a)=0,\ \forall f\in H\}$$

称为理想 H 的零点集. 设 $W\subset\mathbb{A}_K^N$, 那么

$$I(W)=\{f\in K[x_1,\cdots,x_N]\,|\,f(w)=0,\ \forall w\in W\}$$

称 $I(W)$ 为 W 的理想.

例 11.1.4 (1) 设 $H=\{f\cdot(x_2=x_1^2)\,|\,f\in K[x_1,x_2]\}$, 则 H 是一个理想, 并且 $V(H)=\{(a_1,a_2)\,|\,a_2=a_1^2\}$ 是一条 "抛物线" (如果 $K=\mathbb{R}$, 则是真正的抛物线).

(2) 设 $W=(0,0)$, 则 $I(W)$ 为常数项为零的多项式. 例如 $x_1x_2-x_2^3\in I(W)$, 而 $(x_1+1)(x_2-1)\neq I(W)$. □

11.2 Zariski 拓扑

对于多元多项式环, 零点集和理想之间有某种类似于 "正交补" 的对偶关系.

命题 11.2.1 (1) 如果 $H_1 \subset H_2$, 则 $V(H_1) \supset V(H_2)$;

(2) 如果 $W_1 \subset W_2$, 则 $I(W_1) \supset I(W_2)$;

(3) $V(\sum_i H_i) = \bigcap_i V(H_i)$;

(4) $V(H_1 \bigcap H_2) = V(H_1 \dot{H_2}) = V(H_1) \bigcup V(H_2)$;

(5) $I(\bigcup_i W_i) = \bigcap_i I(W_i)$;

(6) $V(I(W)) \supset W$, 且 $V(I(W)) = W$, 当且仅当 W 是一个仿射代数集;

(7) $I(V(H)) \supset H$, 且 $I(V(H)) = H$, 当且仅当存在 W, 使得 $H = I(W)$.

证明 我们只证 (7), 其余的留给读者.

设 $\xi \in H$, 那么对 $\forall \eta \in V(H)$ 有 $\xi(\eta) = 0$. 于是 $\xi \in I(V(H))$, 即 $H \subset I(V(H))$.

下证等价部分. (必要性) 取 $W = V(H)$ 即得. (充分性) 因为 $H = I(W)$, 则 $V(H) = V(I(W)) \supset W$, 从而 $I(V(H)) \subset I(W) = H$. 但已经证明 $I(V(H)) \supset H$, 故 $I(V(H)) = H$. □

定义 11.2.1 $W \subset \mathbb{A}_K^N$ 称为一个 Zariski 闭集, 如果它是一个仿射代数集.

命题 11.2.2 Zariski 闭集 (即仿射代数集) 在 $\mathbb{A}_K^N$ 上定义了一个拓扑, 这个拓扑称为 Zariski 拓扑.

证明 (参见习题 6.9) 我们要证明: (1) 仿射代数集的任意交还是仿射代数集, 它来自命题 11.2.1 第 3 条; (2) 仿射代数集的有限并还是仿射代数集, 它来自命题 11.2.1 第 5 条; (3) 全空间是仿射代数集, 这是因为 $\mathbb{A}_K^N = V(\{0\})$; (4) 空集是仿射代数集, 这是因为 $\varnothing = V(K[x_1, \cdots, x_N])$. □

注意 $\mathbb{A}_K^N$ 在 Zariski 拓扑下不是一个 Huasdorff 空间.

例 11.2.1 设映射 $\varphi : \mathbb{A}_K^2 \to \mathbb{A}_K^2$ 定义为 $\varphi(x, y) = (x, y - xy)$. 证明 φ 在 Zariski 拓扑下连续.

任取闭集 $W = \{(u, v) \mid f_\alpha(u, v) = 0\}$, 定义 $g_\alpha(u, v) := f_\lambda(\varphi(u, v))$. 构造 $V = \{(u, v) \mid g_\alpha(u, v) = 0\}$, 则 V 是闭集, 并且容易证明 $\varphi^{-1}(W) = V$. □

定义 11.2.2 设 $V \subset \mathbb{A}_K^N$ 为仿射代数集, $f \in K[x_1, \cdots, x_N]$ 且 $f \notin I(V)$, 那么

$$V_f = \{v \in V : |f(v) \neq 0\}$$

称为 V 的基本仿射开子集.

定理 11.2.1 基本仿射开子集 $(\mathbb{A}_K^N)_f$, $f \in K[x_1, \cdots, x_N]$, 形成 Zariski 拓扑的拓扑基.

证明 设 U 为 Zariski 开集, 则 $U = \mathbb{A}_K^N - V$, 这里 V 是仿射代数集. 由推论 11.1.1, $I(V) = (f_1, \cdots, f_r)$. 于是由命题 11.2.1 第 3 条, $V = \bigcap_{i=1}^r V((f_i))$. 我们断言

$$U = \bigcup_{i=1}^r (\mathbb{A}_K^N)_{f_i}.$$

如果断言正确, 就证完了. 如果 $v \in \bigcup_{i=1}^{r} (\mathbb{A}_K^N)_{f_i}$, 则存在 i 使 $f_i(v) \neq 0$, 于是 $v \notin V$. 即 $v \in U$. 反之, 设 $v \in U$, 从而 $v \notin V$, 则存在 i 使 $f_i(v) \neq 0$, 故 $v \in \bigcup_{i=1}^{r} (\mathbb{A}_K^N)_{f_i}$. □

例 11.2.2 考虑平面线性系统集合

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u, \\ y = Cx = (c_1, c_2)x. \end{cases} \tag{11.2.1}$$

这里 $a_{i,j}$, b_i, c_i 为任意实数. 考虑能控阵

$$f(A,B) = \det[b, Ab] = a_{21}b_1^2 + (a_{22} - a_{11})b_1 b_2 - a_{22}b_2^2;$$

能观测阵

$$g(A,C) = \det \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = a_{12}c_1^2 + (a_{22} - a_{11})c_1 c_2 - a_{22}c_2^2.$$

记

$$(x_1, \cdots, x_8) = (a_{11}, a_{12}, (a_{21}, a_{22}, (b_1, b_2, (c_1, c_2)))),$$

则 f、g、fg 均为 $\mathbb{R}[x_1, \cdots, x_8]$ 的元素. 于是能控集合为 $(\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^8)\big|_f$, 能观测集合为 $(\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^8)\big|_g$, 既能控又能观的集合为 $(\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^8)\big|_{fg} = (\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^8)\,|_f \bigcap (\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^8)\,|_g$. 它们都是 Zariski 拓扑下的开集, 或准确地说, 基本仿射开集. □

下面进一步考查零点集和理想的关系. 先考虑如果 $W = V(H)$, 那么是否 $I(W) = I$?

定义 11.2.3 如果 $H \subset K[x_1, \cdots, x_N]$ 是一个理想, 那么

$$\sqrt{H} := \{f \in K[x_1, \cdots, x_N] \mid f^m \in H, m \in \mathbb{Z}_+\}.$$

容易证明 (见习题 11.2) $H \subset \sqrt{H} \subset I(V(H))$. 实际上, 我们有如下定理中的等式关系.

定理 11.2.2 (Hilbert-Nullstellensatz **定理**[103]) 如果 $H \subset K[x_1, \cdots, x_N]$ 是一个理想, 那么

$$\sqrt{H} = I(V(H)). \tag{11.2.2}$$

下面考虑解的存在性问题. 下面的定理说明, 解总是有的.

定理 11.2.3[103] 如果 K 是代数闭域, $H \subset K[x_1, \cdots, x_N]$ 是一个真理想 (即 $H \neq K[x_1, \cdots, x_N]$), 那么 $V(H) \neq \varnothing$.

实际上, 上述定理来自以下结论: 对于极大理想 H, $V(H) \neq \varnothing$. 我们给极大理想一个严格定义.

定义 11.2.4 设 $M \subset K[x_1, \cdots, x_N]$ 是一个真理想. M 称为极大理想, 如果对任何理想 H, 满足 $M \subset H \subset K[x_1, \cdots, x_N]$, 必有 $H = M$ 或 $H = K[x_1, \cdots, x_N]$.

实际上, 极大理想总是由一个根生成的. 我们有如下命题.

命题 11.2.3 [103] $M \subset K[x_1, \cdots, x_N]$ 是一个极大理想, 当且仅当存在 $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_N) \in \mathbb{A}_K^N$ 使得 $M = I(\xi)$, 换言之

$$M = (x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2, \cdots, x_N - \xi_N).$$

直观地说, 极大理想与单点等价. 或者说, 一个极大理想是以某一点为根的所有多项式集合. 单点不可能分成两个更小的代数集.

定义 11.2.5 拓扑空间 X 中的一个非空集 $V \neq \varnothing$ 称为不可约的, 如果不存在 $V_1 \neq \varnothing, V_2 \neq \varnothing, V_1 \neq V_2$ 使得 $V = V_1 \bigcup V_2$.

例 11.2.3 设 $V = V(H)$, $H = (x_1^2 - x_2^2) \in K[x_1, x_2]$, 那么 $V = V_1 \bigcup V_2$, 这里 $V_1 = (x_1 + x_2)$, $V_2 = (x_1 - x_2)$, V_1、V_2 是不可约的. □

关于不可约性的主要结果有以下结论.

定理 11.2.4 [103] (1) V 不可约, 当且仅当 V 中任何两个非空开集交非空;

(2) V 不可约, $U \subset V$ 为其开子集, 则 U 不可约, 且在 V 中稠;

(3) V 不可约, 则其闭包 $\bar{V}$ 不可约.

定理 11.2.5 [103] 代数集 $V \in \mathbb{A}_K^N$ 不可约, 当且仅当 $I(V) \in K[x_1, \cdots, x_N]$ 是素理想.

例 11.2.4 (1) $\mathbb{A}_K^N$ 是不可约的, 因为 $I(\mathbb{A}_K^N) = (0)$, 它是 $K[x_1, \cdots, x_N]$ 中的素理想.

(2) 能控、能观测或能控能观测的平面系统集都是不可约的, 因为由例 11.2.2 它们均在 $A_{\mathbb{R}}^8$ 中开, 于是由定理 11.2.4 之 (2) 可知, 它们均不可约. □

11.3 正则函数与态射

定义 11.3.1 (1) 一个环 R 称为 K-代数, 如果 K 是 R 的子环;

(2) 一个 K-代数 R 是有限生成的, 如果存在 $r_1, \cdots, r_n \in R$, 使得 $R = K[r_1, \cdots, r_n]$;

(3) 一个有限生成的 K-代数 R, 如果不存在幂零元, 则称 R 为仿射 K-代数 ($r \neq 0$ 称为幂零元, 如果存在 $m > 0$ 使 $r^m = 0$).

显然, $K[x_1, \cdots, x_N]$ 是一个仿射 K-代数. 设 V 为一仿射代数集, 作商环

$$K[V] := K[x_1, \cdots, x_N]/I(V). \tag{11.3.1}$$

定义 11.3.2 商环 $K[V]$ 称为仿射坐标环. 仿射坐标环的元素称为 V 上的正则函数.

注意, 正则函数实际上是一个等价类 $[f]$. $[f] = [g]$, 如果 $f - g \in I(V)$. 为记号简便, 以下直接用元素代表等价类, 譬如, f 代表 $[f]$.

记 $\mathrm{Hom}_K(K(V), K)$ 为从 $K(V)$ 到 K 的保持 K 不变的环同态集合 (即若 $\alpha \in \mathrm{Hom}_K(K(V), K)$, 则 $\alpha([k]) = k, \forall k \in K$). 对每一个 $v \in V$, 可以定义 $\alpha_v : K(V) \to K$

如下: $\alpha_v([f]) := f(v)$. 容易证明, $\alpha_v \in \mathrm{Hom}_K(K(V), K)$. 实际上, 这是一个一对一且映上的, 即每个环同态 $\alpha \in \mathrm{Hom}_K(K(V), K)$, 都可以找到 $v \in V$, 使得 $\alpha = \alpha_v$. 记同态核 $m_v := \ker(\alpha_v)$, 因为 α_v 是 K-同态, 于是 m_v 为 $K(V)$ 的极大理想. 设 $K(V)$ 的极大理想集合为 $\mathrm{Sup}M(K(V))$, 那么可以证明, 对每个极大理想 $m \in \mathrm{Sup}M(K(V))$, 都可以找到 $v \in V$, 使得 $m = m_v$. 因此有下述定理.

定理 11.3.1 $v \leftrightarrow \alpha_v \leftrightarrow m_v$ 给出了以下的一一对应关系

$$V \Longleftrightarrow \mathrm{Hom}_K(K(V), K) \Longleftrightarrow \mathrm{Sup}M(K(V)). \tag{11.3.2}$$

任何一个仿射 K-代数总可以表示为一个商代数形式.

命题 11.3.1 如果 $R = K[f_1, \cdots, f_N]$ 是一个仿射 K-代数, 则存在 $W \in \mathbb{A}_K^N$, 使得 $R = K[W]$.

定义 11.3.3 (1) 设 $V \subset \mathbb{A}_K^N$, $W \subset \mathbb{A}_K^m$ 为两个仿射代数集, 映射 $\phi: V \to W$ 称为 K-态射, 如果对每个 $g \in K[W]$, 复合映射 $g \circ \phi \in K[V]$. K-态射的全体记作 $\mathrm{Hom}_K(V, W)$;

(2) 设 $V \subset \mathbb{A}_K^N$, $W \subset \mathbb{A}_K^m$ 为两个仿射代数集, 映射 $\phi: V \to W$ 称为正则的, 如果 ϕ 是一个多项式映射在 V 上的限制. 正则映射的全体记作 $\mathrm{Reg}(V, W)$.

命题 11.3.2 (1) 设 $g: V \to W$ 是正则的, 定义 $\phi^*: K[W] \to K[V]$ 为

$$\phi^*(g) = g \circ \phi,$$

ϕ^* 称为 ϕ 的提升. 那么, $\phi^* \in \mathrm{Hom}_K(K[W], K[V])$ 是 $K[W]$ 到 $K[V]$ 的一个 (环的) K-同态.

(2) 每个 $K[W]$ 到 $K[V]$ 的 (环的) K-同态都可以看作某个 (唯一的) 正则映射 ϕ 的提升. 因此, 有一一对应关系

$$\mathrm{Reg}(V, W) \Longleftrightarrow \mathrm{Hom}_K(K[W], K[V]).$$

(3) 设 $g: V \to W$ 是一个 K-态射, 定义 $\phi^*: K[W] \to K[V]$ 为

$$\phi^*(g) = g \circ \phi,$$

ϕ^* 称为 ϕ 的余态射. 那么 $\phi^* \in \mathrm{Hom}_K(K[W], K[V])$ 是 $K[W]$ 到 $K[V]$ 的一个 (环的) K-同态.

(4) 每个 $K[W]$ 到 $K[V]$ 的 (环的) K-同态都可以看作某个 (唯一的) K-态射 ϕ 的余态射. 因此, 有一一对应关系

$$\mathrm{Hom}_K(V, W) \Longleftrightarrow \mathrm{Hom}_K(K[W], K[V]).$$

一个 K-态射 ψ 称为 K-同构, 如果它是一对一且映上的, 并且 ψ^{-1} 也是一个 K-态射.

命题 11.3.3 $\psi: V \to W$ 是一个 K-同构, 当且仅当 $\psi: K[V] \to K[W]$ 是一个 (环) 同构.

例 11.3.1 (Laurent 映射) 考虑线性系统族

$$
\begin{cases}
\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ -\xi_1 & -\xi_2 & \cdots & -\xi_n \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u := Ax + bu, \\
y = (\eta_1, \cdots, \eta_n)x := cx.
\end{cases}
\tag{11.3.3}
$$

定义映射 $\psi_f : \mathbb{A}_K^{2n} \to \mathbb{A}_K^{2n}$ 为

$$
\psi_f(\xi, \eta) = [c(\eta)b, c(\eta)A(\xi)b, \cdots, c(\eta)A^{2n-1}(\xi)b].
$$

这是一个 K-态射, 因为它是正则的. □

注意, 在 Zariski 拓扑下, 不难证明一个多项式映射 $F : \mathbb{A}_K^N \to \mathbb{A}_K^m$ 是连续的, 从而可推出一个正则映射 $\phi : V \to W$ 也是连续的.

本节未证定理均可见文献 [103].

11.4 线性系统的实现

一个 (域 K 上的) 单输入–单输出的线性系统有四种常用的表示方法:

(1) 互质的多项式对: $p(s) = b_0 + b_1 s + \cdots + b_{n-1}s^{n-1}$, $q(s) = a_0 + a_1 s + \cdots + a_{n-1}s^{n-1} + s^n$ ($T(s) = p(s)/q(s)$ 称为传递函数).

(2) 严格真有理半纯函数 $f(s) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} h_j s^{-j}$ (可看作传递函数 $T(s)$ 的 Laurent 展开式).

(3) 有限秩 Hankel 矩阵 $H = (h_{i+j-2})_{i,j=1}^{\infty}$.

(4) (A, b, c), $A \in M_{n\times n}$, $b, c^{\mathrm{T}} \in \mathbb{C}^n$.

(A, b, c) 对应于控制系统

$$
\begin{cases}
\dot{x} = Ax + bu, \\
y = cx.
\end{cases}
\tag{11.4.1}
$$

称为系统的状态空间实现.

定理 11.4.1 (Hankel 定理) 设 $f(s) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} h_j s^{-j}$ 为一半纯函数. 定义其 Hankel 矩阵为 $H_f = (h_{i+j-2})_{i,j=1}^{\infty}$. 那么 $f(s)$ 为有理分式, 当且仅当其 Hankel 矩阵的秩有限.

为方便, 我们将 H_f 的秩称为 f 及 H 的次数. 定义

$$
\mathrm{Rat}(n, K) = \{f(s) \mid f(s) \text{ 为 } K \text{ 上 } n \text{ 次严真有理半纯函数}\}; \tag{11.4.2}
$$

$$
\mathrm{Han}(n, K) = \{H \mid H \text{ 为 } K \text{ 上 } n \text{ 次 Hankel 矩阵}\}. \tag{11.4.3}
$$

设 Hankel 阵秩为 n, 那么其 $n+1$ 列可表为前 n 列的 (唯一形式) 线性组合. 于是可得到唯一的递推关系

$$a_0h_j + a_1h_{j+1} + \cdots + a_{n-1}h_{j+n-1} + h_{j+n} = 0. \tag{11.4.4}$$

记 $H_n = (h_{i+j-2})_{i,j=1}^n$. 设

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \tag{11.4.5}$$

$$b = H_n\delta_1, \quad c = (\delta_1)^{\mathrm{T}}, \tag{11.4.6}$$

那么

$$h_j = cA^{j-1}b, \quad j = 1, 2, \cdots. \tag{11.4.7}$$

因此式 (11.4.5) 及式 (11.4.6) 是次数为 n 的 Hankel 阵的实现.

从式 (11.4.4) 可见, 次数为 n 的 Hankel 阵由 $2n$ 个独立变量决定, 因此 $\mathrm{Han}(n,K) \subset \mathbb{A}_K^{2n}$.

再看 $\mathrm{Rat}(n,K)$. 设 $f \in \mathrm{Rat}(n,K)$, 由于它的 Hankel 矩阵 H_f 的次数为 n, 由 Hankel 定理, 它有分式表示

$$f(s) = \frac{b_0 + b_1s + \cdots + b_{m-1}s^{m-1}}{a_0 + a_1s + \cdots + a_{m-1}s^{m-1} + s^m} := p(s)/q(s), \tag{11.4.8}$$

于是

$$f(s)q(s) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} h_js^{-j}\right) q(s) = p(s).$$

比较系数可知

$$a_0h_j + a_1h_{j+1} + \cdots + a_{m-1}h_{j+m-1} + h_{j+m} = 0. \tag{11.4.9}$$

由式 (11.4.9) 可知, 其 Hankel 矩阵 H_f 为 m 次. 因此, $m = n$. 于是 f 可用 $(a_0, \cdots, a_{n-1}, b_0, \cdots, b_{n-1})$ 来唯一确定. 因此 $\mathrm{Rat}(n,K) \subset \mathbb{A}_K^{2n}$.

为说明 $\mathrm{Han}(n,K)$ 与 $\mathrm{Rat}(n,K)$ 的等价性, 定义 $L : \mathrm{Rat}(n,K) \to \mathrm{Han}(n,K)$ 如下: 对于 $f(s) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} h_js^{-j} \in \mathrm{Rat}(n,K)$, $L(f) = (h_1, h_2, \cdots, h_{2n})$.

注意, 由式 (11.4.4), $h_1, h_2, \cdots, h_{2n}$ 可唯一确定 H_f. 实际上, 记 $a = (a_0, \cdots, a_{n-1})^{\mathrm{T}}$, $h^{n+1} = (h_{n+1}, \cdots, h_{2n})^{\mathrm{T}}$, 那么由式 (11.4.4) 有

$$H_na = -h^{n+1}. \tag{11.4.10}$$

由 H_n 非奇异性可得唯一解 a. 故上述 L 是一一的.

实际上, $\text{Han}(n,K)=\mathbb{A}_K^{2n}\setminus V(\theta)$, 这里 $\theta(h_1,\cdots,h_{2n}):=\det(H_n)$, 故

$$V(\theta)=\{h\in\mathbb{A}_K^{2n}\mid\det(H_n)=0\}.$$

因此, 如何保证 L 的像在 $\text{Han}(n.K)$ 上呢? 注意到 $f(s)\in\text{Rat}(n,K)$, 故它有分式表示 (11.4.8). 不难验证, 这时 $L(f)=(h_1(f),\cdots,h_{2n}(f))$, 其中

$$h_j(f)=h_j(a_0,\cdots,a_{n-1},b_0,\cdots,b_{n-1})=cA^{j-1}b,\quad j=1,\cdots,2n,\tag{11.4.11}$$

这里 A 如式 (11.4.5), $b=\delta_n^{\text{T}}$, $c=(b_0,\cdots,b_{n-1})$.

再考虑 $L^{-1}:\text{Han}(n,K)\to\text{Rat}(n,K)$. 如果 Hankel 矩阵知道了, 则可由式 (11.4.10) 解出 a. 作实现式 (11.4.5) 和式 (11.4.6), 那么 $h_j=cA^{j-1}b$, $j=1,2,\cdots$. 现在

$$f(s)=c(sI-A)^{-1}b=p(x)/q(x),$$

$q(x)=a_0+a_1s+\cdots+a_{n-1}s^{n-1}+s^n$ 已知. 令 $q(s)=b_0+b_1s+\cdots+b_{n-1}s^{n-1}$, 直接计算可得

$$b_i=\sum_{j=1}^{n-i}h_ja_{j+i},\quad i=1,\cdots,n.\tag{11.4.12}$$

下面我们要证明, 这几种表示方法是代数等价的.

定义 11.4.1 (1) (A,b,c) 称为传递函数 $f(x)$ 的实现, 如果 $c(sI-A)^{-1}b=f(s)$.

(2) (A,b,c) 称为 Hankel 矩阵 $H=(h_{i+j-2})_{i,j=1}^{\infty}$ 的实现, 如果 $h_i=cA^{i-1}b$, $i=1,2,\cdots$.

将 $(A,b,c)\in\mathbb{A}_K^{2n+2}$ 看作变量, 考虑多项式环 $K[\mathbb{A}_K^{2n+2}]=K[X,Y,Z]$, 分别用 $X=(x_{ij})$, $Y=(Y_i)$, $Z=(Z_j)$ 代表相应变量. 所谓实现, 就是要找一个 K-态射 $\mathcal{R}:\mathbb{A}_K^{n^2+2n}\to\mathbb{A}_K^{2n}$.

我们用 $\mathcal{R}_f$ 表示传递函数实现, 用 $\{A_0,\cdots,A_{n-1},B_0,\cdots,B_{n-1}\}$ 表示 $\mathbb{A}_K^{2n}$ 上的坐标函数, 即

$$\mathcal{R}_f(X,Y,Z)=(A_0(X,Y,Z),\cdots,A_{n-1}(X,Y,Z),B_0(X,Y,Z),\cdots,B_{n-1}(X,Y,Z)),\tag{11.4.13}$$

其中 $A_i(X,Y,Z)$ 为 $\det(sI-X)$ 的系数, 即

$$\det(sI-X)=A_0(X,Y,Z)+A_1(X,Y,Z)s+\cdots+A_{n-1}(X,Y,Z)s^{n-1}+s^n;$$

$B_i(X,Y,Z)$ 为 $Z\,\text{adj}(sI-X)Y$ 的系数, 即

$$Z\,\text{adj}(sI-X)Y=B_0(X,Y,Z)+B_1(X,Y,Z)s+\cdots+B_{n-1}(X,Y,Z)s^{n-1}.$$

例 11.4.1 设 $n=2$, 则

$$sI-X=\begin{bmatrix}s-X_{11}&-X_{12}\\-X_{21}&s-X_{22}\end{bmatrix},$$

$$\det(sI-X)=s^2-(X_{11}+X_{22})s+X_{11}X_{22}-X_{12}X_{21}.$$

因此

$$A_0(X,Y,Z)=X_{11}X_{22}-X_{12}X_{21},\quad A_1(X,Y,Z)=X_{11}+X_{22}.$$

$$\operatorname{adj}(sI-X)=\begin{bmatrix} s-X_{22} & X_{12}\\ X_{21} & s-X_{11}\end{bmatrix},$$

所以

$$A_0(X,Y,Z)=X_{11}X_{22}-X_{12}X_{21},\quad A_1(X,Y,Z)=X_{11}+X_{22}.$$

不难算出

$$\begin{aligned} B_0(X,Y,Z)&=Z_1(-X_{22}Y_1+X_{12}Y_2)+Z_2(X_{21}Y_1-X_{11}Y_2),\\ B_1(X,Y,Z)&=Z_1Y_1+Z_2Y_2. \end{aligned}$$

□

我们用 $\mathcal{R}_h$ 表示 Hankel 矩阵实现, 用 $\{H_1,\cdots,H_{2n}\}$ 表示 $\mathbb{A}_K^{2n}$ 上的坐标函数, 即

$$\mathcal{R}_h(X,Y,Z)=(H_1(X,Y,Z),\cdots,H_{2n}(X,Y,Z)),\tag{11.4.14}$$

这里

$$H_j(X,Y,Z)=ZX^{j-1}Y,\quad j=1,2,\cdots.$$

注意上式对 $j>2n$ 也成立.

还可以定义一种混合型的实现, 称为特征函数实现, 记作 $\mathcal{R}_c$. 用 $\{H_1,\cdots,H_{2n}\}$ 表示 $\mathbb{A}_K^{2n}$ 上的坐标函数, 即

$$\mathcal{R}_c(X,Y,Z)=(H_1(X,Y,Z),\cdots,H_{2n}(X,Y,Z)),\tag{11.4.15}$$

这里

$$\begin{aligned} H_j(X,Y,Z)&=ZX^{j-1}Y,\quad j=1,\cdots,n,\\ H_{n+t}(X,Y,Z)&=-A_{n-t},\quad t=1,\cdots,n. \end{aligned}$$

类似于 $\operatorname{Han}(n,K)=\mathbb{A}_K^{2n}\setminus V(\theta)$, 我们有 $\operatorname{Rat}(n,K)=\mathbb{A}_K^{2n}\setminus V(\rho)$, 这就是说, 要把 $\{x\in\mathbb{A}_K^{2n}\,|\,\rho(x)=0\}$ 的那些点去掉. 不符合要求的那些点是使传递函数分母、分子不互质的点. 回顾例 6.1.12, 定义 $\rho(x)=\det(S)$, 这里 $x=(a_0,\cdots,a_{n-1},b_0,\cdots,b_{n-1})$, S 为

$$S=\begin{bmatrix}
1 & a_{n-1} & & \cdots & a_0 & & \\
0 & 1 & a_{n-1} & \cdots & & a_0 & \\
 & & & \cdots & & & \\
 & & & 1 & a_{n-1} & \cdots & a_0\\
0 & b_{n-1} & & \cdots & b_0 & & \\
 & 0 & b_{n-1} & \cdots & & b_0 & \\
 & & & \cdots & & & \\
 & & & 0 & b_{n-1} & \cdots & b_0
\end{bmatrix}.$$

对应于三种实现 $\mathcal{R}_f$, $\mathcal{R}_h$ 和 $\mathcal{R}_c$, 我们定义三个伴随 K-态射 ψ_f, ψ_h 和 ψ_c 如下: $\psi_f:\mathbb{A}_K^{2n}\to\mathbb{A}_K^{2n}$ 即 Laurent 映射, 已在例 11.3.1 中定义; $\psi_h:\mathbb{A}_K^{2n}\to\mathbb{A}_K^{2n}$ 为

$$\psi_h(x)=(h_1(x),\cdots,h_{2n}(x)),$$

式中

$$h_i(x)=\begin{cases}x_i, & i=1,\cdots,n;\\ -\sum\limits_{k=1}^{n}x_{2n+1-k}h_{k+i-n-1}(x), & i=n+1,\cdots,2n.\end{cases}\tag{11.4.16}$$

$\psi_c:\mathbb{A}_K^{2n}\to\mathbb{A}_K^{2n}$ 为

$$\psi_c(x)=(y_1(x),\cdots,y_{2n}(x)),$$

式中

$$y_i(x)=\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{n-i}x_kx_{2n+1-k-i}+x_{n-i+1}, & i=1,\cdots,n;\\ x_{3n+1-i}, & i=n+1,\cdots,2n.\end{cases}\tag{11.4.17}$$

直接展开就会发现, ψ_c 是一个 K-同构.

用 $\mathcal{R}_c$ 作实现时, 类似于 $\mathrm{Rat}(n,K)$ 及 $\mathrm{Han}(n,K)$, 我们将好的实现 (即最小实现) 的集合记作 $\mathrm{Cha}(n,K)\subset\mathbb{A}_K^{2n}$. 同样, "坏实现" 可以用一个函数 λ 的零点集表示, 这里 $\lambda:\mathbb{A}_K^{2n}\to K$ 定义为

$$\lambda(x)=\rho\circ\psi_c(x).\tag{11.4.18}$$

因此有 $\mathrm{Cha}(n,K)=\mathbb{A}_K^{2n}\setminus V(\lambda)$.

直接展开计算, 就可以得到如下的实现及其伴随映射之间的关系式.

定理 11.4.2 实现 $\mathcal{R}_f$、$\mathcal{R}_h$、$\mathcal{R}_c$ 及其伴随 K-态射 ψ_f、ψ_h、ψ_c 间满足

$$\begin{cases}\psi_c\circ\mathcal{R}_c=\nabla_f,\\ \psi_f\circ\mathcal{R}_f=\nabla_h,\\ \psi_h\circ\mathcal{R}_c=\nabla_h,\\ \psi_h=\psi_f\circ\psi_c.\end{cases}\tag{11.4.19}$$

利用式 (11.4.19) 立即可得以下推论.

推论 11.4.1 $\psi_c:(\mathbb{A}_K^{2n})_\lambda\to(\mathbb{A}_K^{2n})_\rho$, $\psi_h:(\mathbb{A}_K^{2n})_\lambda\to(\mathbb{A}_K^{2n})_\theta$ 均为 K-同构. 因此图 11.4.1 为可交换的 K-同构图.

实际上, 这说明了这几个最小实现都是一样的, 在 Zariski 拓扑意义下有下面的推论.

推论 11.4.2 由三个实现得到的基本仿射开集 $\mathcal{R}_f^{-1}(\mathrm{Rat}(n,K))$, $\mathcal{R}_h^{-1}(\mathrm{Han}(n,K))$, $\mathcal{R}_c^{-1}(\mathrm{Cha}(n,K))$ 都相同.

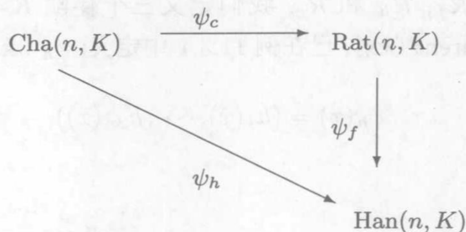


图 11.4.1　实现的 K-同构

例 11.4.2　当 $n = 2$ 时, 可直接计算得

$$\begin{cases} \psi_f(x) = (x_2, x_1 - x_4x_2, -x_3x_2 - x_4(x_1 - x_4x_2), \\ \qquad\qquad -x_3(x_1 - x_4x_2) - x_4(-x_3x_2 - x_4(x_1 - x_4x_2))); \\ \psi_h(x) = (x_1, x_2, -x_4x_1 - x_3x_2, -x_4x_2 - x_3(-x_4x_1 - x_3x_2)); \\ \psi_c(x) = (x_1x_3 + x_2, x_1, x_4, x_3). \end{cases} \tag{11.4.20}$$

相应的三个限制函数为

$$\begin{cases} \rho(x) = x_1^2 - x_4x_1x_2 + x_3x_2^2; \\ \theta(x) = x_1x_3 - x_2^2; \\ \lambda(x) = x_2^2 + x_1x_2x_3 + x_4x_1^2. \end{cases} \tag{11.4.21}$$

若取 $K = \mathbb{R}$, 则

$$\begin{cases} \mathrm{Rat}(n, K) = \mathbb{R}^4 \setminus \{x \mid \rho(x) = 0\}; \\ \mathrm{Han}(n, K) = \mathbb{R}^4 \setminus \{x \mid \theta(x) = 0\}; \\ \mathrm{Cha}(n, K) = \mathbb{R}^4 \setminus \{x \mid \lambda(x) = 0\}. \end{cases} \tag{11.4.22}$$

所有前面得到的结论均可一一检验.　□

记最小实现集合为 $S_{1,1}^n \subset \mathbb{A}_K^{n^2+2n}$. 总结上面的讨论, 我们有以下定理.

定理 11.4.3　$x = (A, b, c) \in S_{1,1}^n$, 当且仅当 $f_x(s) = c(sI - A)b \in \mathrm{Rat}(n, K)$, 当且仅当 $H_x = (cA^{i+j-2}b)_{i,j=1}^{\infty} \in \mathrm{Han}(n, K)$, 当且仅当 $h_x = (cb, \cdots, cA^{n-1}b, -A_{n-1}, \cdots, -A_0) \in \mathrm{Cha}(n, K)$.

本节未证定理均可见文献 [72].

11.5　注释与参考

代数几何是一个比较艰深的数学分支, 但也是近代数学的前沿和最活跃的一个分支.

它的研究对象是多元多项式的零点集，它与数论联系密切. 例如，我们前面提到的费马大定理的证明，其基础就是代数几何.

费马大定理的由来是这样的：费马 (P. Fermat, 1601–1665) 写在丢番图《算术》一书边上，称他证明了 $x^n + y^n = z^n$ 对 $n \geqslant 3$ 没有整数解. 但这个问题困惑了人类 358 年，最后被怀尔斯 (A. Wiles, 1953–) 利用其与椭圆曲线的关系，在 1996 年解决. 关于费马大定理的故事[31] 十分感人，值得一读.

另一个例子是黎曼猜想. 黎曼猜想说在带状区域 $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$ 中，黎曼 ζ 函数

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

的零点都位于直线 $\sigma = 1/2$ 上. 这一猜想自黎曼在 1859 年提出后，被许多人称为数论中最重大的研究课题. 它看似一个纯粹复分析的问题，但由于它可以表示成为所有素数 p 的一个乘积

$$\zeta(s) = \prod_p \left(1 - p^{-s}\right)^{-1}$$

而成为一个数论问题. 它的推广称广义黎曼猜想，是一个典型的代数几何问题. 有限域上的广义黎曼猜想已被证明[27].

从 20 世纪 70–80 年代开始，一部分系统控制学者将代数几何方法应用于系统控制问题，得到许多漂亮的系统族结论，部分工作可见文献 [72] 及其参考文献. 最近的一篇综合报导 (文献 [104]) 介绍了代数几何在分布参数系统中的许多应用.

代数几何的书不少，但百花齐放，没有统一的内容和方法，而且对近世代数、拓扑学及微分几何的要求甚高，一般都不易读懂. 笔者当年在华盛顿大学数学系修这门课时，用的是文献 [75]，它相对简单一点. 李克正的文献 [27] 也是很好的参考书.

11.6　习题

11.1 (1) 整数集 $\mathbb{Z}$ 对加法和乘法是一个环，$0 \neq n \in \mathbb{Z}$. 证明被 n 整除的数集，记作 (n)，是一个理想；并且 (n) 是素理想，当且仅当 n 是素数.

(2) 设 $a(x) \in K[x]$ 的特征数为 0. 证明被 $a(x)$ 整除的多项式集，记作 $(a(x))$，是一个理想；并且 $(a(x))$ 是素理想，当且仅当 $a(x)$ 不可约.

11.2 证明命题 11.2.1 的 (1)~(6).

11.3 设 $H \subset K[x_1, \cdots, x_N]$ 为一理想，证明 $H \subset \sqrt{H} \subset I(V(H))$.

11.4 素理想是否一定是极大理想? 考虑 $I(x-y) \in K[x,y]$，将它与 $I(x-1, y-1)$ 比较.

11.5 设 $V \subset \mathbb{A}_K^N$ 为一零点集，商环 $K(V)$ 定义如式 (11.3.1). 对每一个 $v \in V$，定义 $\alpha_v : K(V) \to K$ 如下：$\alpha_v([f]) := f(v)$. 证明 $\alpha_v \in \mathrm{Hom}_K(K(V), K)$.

11.6 利用例 11.4.2 的具体表达式检验定理 11.4.2 中的各式.

第12章 离散数学方法



本章包括两部分内容: 图论与博弈论. 这两个数学分支似乎难以纳入数学主流, 但却在近期以至将来的系统与控制理论的研究中起着重要作用. 图论属于离散数学是自不待言的, 之所以将博弈论归入离散数学方法是因为我们只讨论策略有限的博弈, 我们的主要目的是讨论演化博弈, 方法是将它转化为 k 值逻辑系统. 于是它就成了典型的离散数学问题了. 本章内容包括: 基本图论的概念与方法, 包括欧拉图、哈密顿图、环路与树等. 接着介绍图的扩展 — 超图, 它是一个新兴分支, 在信息科学中十分有用. 接着讨论研究图和超图的一个新工具 — 拟阵. 本章后几节讨论博弈论, 先讨论非合作博弈, 主要以纳什均衡为中心; 然后讨论合作博弈, 特别介绍了矩阵半张量在特征函数展开和 Shapley 值计算中的应用; 最后讨论网络演化博弈, 介绍其基本数学框架, 并给出基本演化方程等.

12.1 图论基础

定义 12.1.1 (1) 一个图可表示为 $G=(N,E)$, 这里 $N=\{1,2,\cdots,n\}$ 称为图的节点集, $|N|=n$ 称为图 G 的阶 (order); $E\subset N\times N$ 称为图的边集.

(2) 若 $(i,j)\in E$ 则 $(j,i)\in E$, 则称图为无向图; 否则即为有向图.

(3) 一个图称为简单图, 如果其任意两节点间最多只能有一条边.

除特别说明, 本章只讨论有限图, 即 $n<\infty$. 一个图, 可以用一个 $n\times n$ 矩阵来表示, 这个矩阵称为邻接矩阵, 其定义如下: 记 $E=(e_{i,j})$, 其中

$$e_{i,j}=\begin{cases}1, & (i,j)\in E,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

定义 12.1.2 (1) 一个无向图 G, 对于它的每一个节点 p, 与其相连的边的个数称为这个节点的度, 记作 $\deg(p)$.

(2) 一个有向图 G, 对于它的每一个节点 p, 进入这个节点的边的个数称为这个节点的入度, 记作 $d_i(p)$; 流出这个节点的边的个数称为这个节点的出度, 记作 $d_o(p)$.

(3) 一个无向图 G 称为规则图 (regular graph), 如果它每一点的度都一样; 一个有向图 G 称为规则图, 如果它每一点的入度和出度都一样.

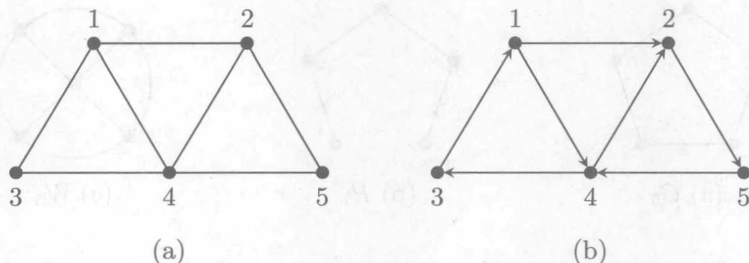


图 12.1.1　无向图和有向图

例 12.1.1　(1) 图 12.1.1 (a) 是一无向图, 其邻接矩阵为

$$E_a = \begin{bmatrix} 0&1&1&1&0 \\ 1&0&0&1&1 \\ 1&0&0&1&0 \\ 1&1&1&0&1 \\ 0&1&0&1&0 \end{bmatrix}.$$

(2) 图 12.1.1 (b) 是一有向图, 其邻接矩阵为

$$E_b = \begin{bmatrix} 0&1&0&1&0 \\ 0&0&0&0&1 \\ 1&0&0&0&0 \\ 0&1&1&0&0 \\ 0&0&0&1&0 \end{bmatrix}.$$

(3) 图 12.1.1 (a) 不是规则图, 如 $d(1)=3$, $d(4)=4$; 图 12.1.1 (b) 也不是规则图, 如 $d_i(1)=1$, $d_o(1)=2$, 但 $d_i(2)=2$, $d_o(2)=1$. □

定义 12.1.3　给定一个图 $G=(N,E)$.

(1) a_1-a_2-$\cdots$-a_k 称为一条通道 (walk), 如果 $a_i \in N, \forall i$; $(a_i, a_{i+1}) \in E, i=0,\cdots,k-1$;

(2) 一条通道, 如果没有重复的边, 即 $(a_i,a_{i+1}) \neq (a_j,a_{j+1})$, $i \neq j$, 则称其为轨迹 (trail). 两端点相等的轨迹称为闭轨迹;

(3) 一条通道, 如果除两端点可能相等外, 各端点均不相等, 则称其为路径 (path). 两端点相等的路径称为环路.

下面给出一些常见的图的例子.

例 12.1.2　(1) 具有 n 个节点的环路记作 C_n, 图 12.1.2 (a) 是 C_5.

(2) C_n 去掉一条边则成一路径 P_n, 图 12.1.2 (b) 是 P_5.

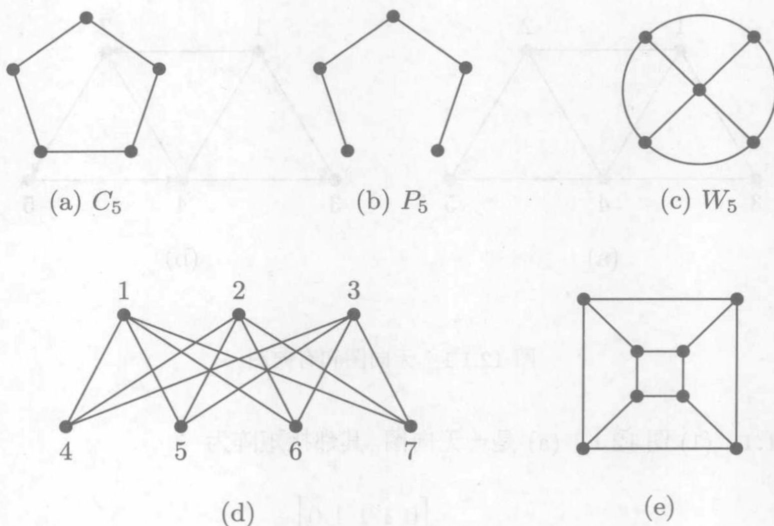


图 12.1.2　典型图

(3) C_{n-1} 加上一个中心, 它与其他 $n-1$ 点都相连, 则成一轮子, 记为 W_n, 图 12.1.2 (c) 是 W_5.

(4) 一个图, 如果节点集可分为两部分: $N = U \cup V$, 且 $U\mathcal{V} = \varnothing$; 并且 $E \subset U \times V$, 则它称为二分图. 图 12.1.2 (d) 是二分图, 这里 $U = \{1, 2, 3\}$, $V = \{4, 5, 6, 7\}$.

(5) 一个图, 如果每一节点的度都一样, 即 $d(i) = r$, $\forall i \in N$, 则称它为 r-正规图 (regular graph). 图 12.1.2 (e) 是 3-正规图. □

图论最早可追朔到哥尼斯堡城的七桥问题: 普瑞格尔河流经该城. 河中有两岛 A、B, 两岸记作 C、D, 其间有七座桥, 见图 12.1.3 (a).

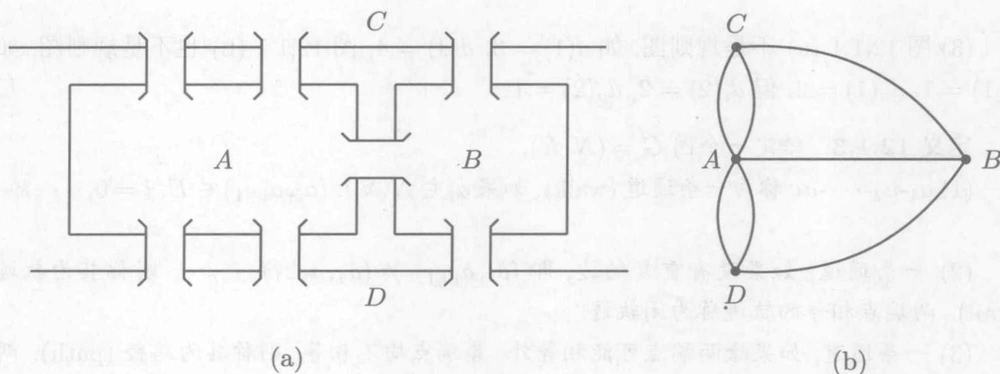


图 12.1.3　哥尼斯堡七桥

此间游客甚多, 某日某人提一问题: 能否从某地出发, 经过七座桥各一次, 再回到出发点? 这个问题很容易转化为图 12.1.3 (b) 的一笔画问题. 这个问题由欧拉于 1736 年解决

了, 图论也随之诞生.

能够一笔画的图形后来被称为欧拉图, 定义如下.

定义 12.1.4　一个无向图称为半欧拉图, 如果有一条轨迹, 它包含了所有的边. 如果这个轨迹是闭的, 那么, 这图就称为欧拉图.

欧拉定理给出检验欧拉图的方法.

定理 12.1.1 (Euler 定理[115])　(1) 一个无向图是欧拉图, 当且仅当它的每个节点的度均为偶数.

(2) 一个图是半欧拉图, 当且仅当它正好有一对节点, 其度为奇数.

例 12.1.3　由欧拉定理不难直接验证: 图 12.1.4 (a) 是欧拉图, 图 12.1.4 (b) 是半欧拉图, 图 12.1.4 (c) 是非欧拉图. □

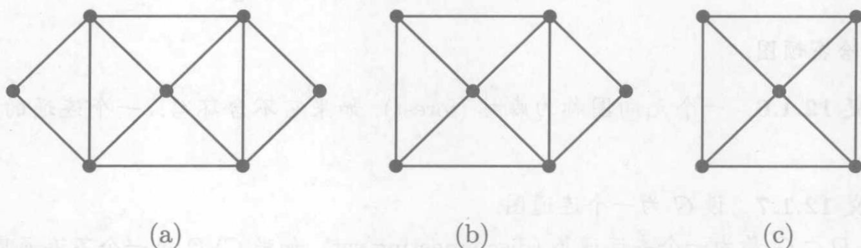


图 12.1.4　欧拉图与非欧拉图

欧拉图研究什么时候有一条闭轨迹, 它由所有的边组成. 类似的问题是, 什么时候有一条环路, 它由所有的节点组成. 这种图称哈密顿图.

定义 12.1.5　一个无向图称为半哈密顿图, 如果有一条路径, 它包含了所有的节点. 如果这个路径是环路, 那么, 这图就称为哈密顿图.

例 12.1.4　不难直接验证: 图 12.1.5 (a) 是哈密顿图, 图 12.1.5 (b) 是半哈密顿图, 图 12.1.5 (c) 是非哈密顿图. □

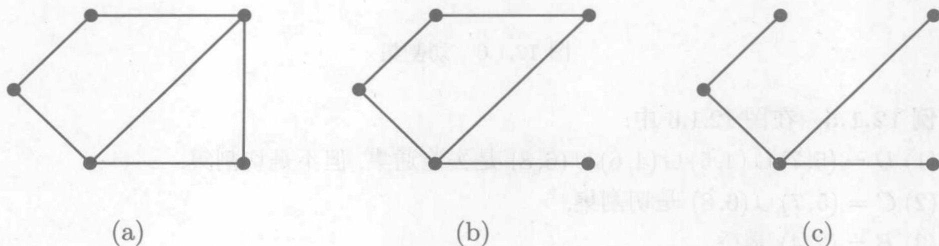


图 12.1.5　哈密顿与非哈密顿图

不像欧拉图, 对于哈密顿图, 并未找到易于检验的充要条件. 下面给出一些充分条件.

定理 12.1.2 (Ore 定理[115]) 一个 $n \geqslant 3$ 的无向简单图是哈密顿图, 如果它的每一对不邻接的节点 u、v 满足

$$d(u) + d(v) \geqslant n. \tag{12.1.1}$$

推论 12.1.1 (Dirac 定理[115]) 一个 $n \geqslant 3$ 的无向简单图是哈密顿图, 如果它的每一个节点都满足

$$d(u) \geqslant \frac{n}{2}. \tag{12.1.2}$$

定理 12.1.3 (Posá 定理[58]) 设 G 为一个 $n \geqslant 3$ 的无向简单图. 如果对每一个 $1 \leqslant j < \frac{n}{2}$, 度不超过 j 的顶点个数小于 j, 即

$$|\{s \in N | d(s) \leqslant j\}| < j, \quad 1 \leqslant j < \frac{n}{2}, \tag{12.1.3}$$

则 G 是哈密顿图.

定义 12.1.6 一个无向图称为森林 (forest), 如果它不含环路. 一个连通的森林称为树.

定义 12.1.7 设 G 为一个连通图.

(1) $D \subset G$ 称为一个去连通集 (disconnecting set), 如果 $G \backslash D$ 是一个不连通集.

(2) $D \subset G$ 称为一个切割集 (cut set), 如果 D 是一个去连通集, 而它的任一真子集都不是去连通集.

(3) 一条边 $e \in E$ 称为桥, 如果它是一个切割集.

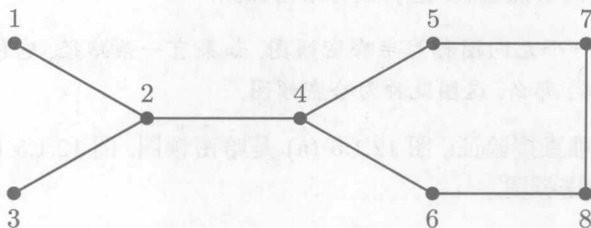


图 12.1.6 切割集

例 12.1.5 在图 12.1.6 中:

(1) $D = (5,7) \cup (4,5) \cup (4,6) \cup (6,8)$ 是去连通集, 但不是切割集.

(2) $C = (5,7) \cup (6,8)$ 是切割集.

(3) $B = (2,4)$ 是桥. □

定理 12.1.4 [115] 考虑一个 n 节点无向图. 以下是关于树的几个等价条件:

(1) T 是树;

(2) T 不含环路, 且有 $n-1$ 条边;

(3) T 连通, 且有 $n-1$ 条边;

(4) T 连通, 且每条边都是桥;

(5) 任意两点间有一条唯一的路径;

(6) T 不含环路, 但如果加一条边, 则形成一个环路.

定义 12.1.8 (1) 设 G 为一连通的无向图. 一个连通的树 $T \subset G$, 它包括 G 所有的顶点, 则 T 称为 G 的生成树.

(2) 设 G 有若干连通分支. 对每个分支找到其生成树, 这组生成树集合称为 G 的生成森林.

如何寻找一个连通图 G 的生成树呢? 它可以这样进行: 找到 G 的一个环路, 去掉环路的一条边, 则剩余的图还是连通的. 继续这个过程, 直到没有环路, 剩下的就是 G 的一个生成树.

12.2 超图与拟阵

定义 12.2.1 一个超图可表示为 $H=(X,\mathcal{E})$, 这里 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 称为超图的节点集, $|X|=n$ 称为超图 G 的阶; $\mathcal{E}=\{E_i|i\in I\}\subset 2^N$ 称为图的边集, 如果 (1) $E_i\neq\varnothing$, $i\in I$; (2) $\cup_{i\in I}E_i=N$.

一个超图, 如果每条边都连接 k 个点, 即 $|E_i|=k$, $i\in I$, 则称其为 k-匀齐超图. 2-匀齐超图就是普通图.

如果由 $E_i\subset E_j$ 能推出 $i=j$, 则称其为简单图. 换言之, 简单图里没有重边, 也没有一条边是另一条边的一部分.

设 $\varnothing\neq S\subset X$, S 的秩 (rank) $r(S)$ 定义为

$$r(S)=\max_i|S\cap E_i|.$$

$r(X)$ 称为超图的秩. 因此, 一个超图为匀齐超图, 当且仅当 $|E_i|=r(X)$, $i\in I$.

例 12.2.1 考虑超图 $H=(N,\mathcal{E})$, 如图 12.2.1 所示.

这里 $N=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, $\mathcal{E}=\{E_1,E_2,E_3,E_4,E_5,E_6\}$, 其中 $E_1=\{1,2,5\}$, $E_2=\{2,3,7\}$, $E_3=\{3,4\}$, $E_4=\{4,8\}$, $E_5=\{3,7,8\}$, $E_6=\{6\}$.

不难看出, 这个超图是简单图. □

两个点 i,j 称为邻接 (adjacent) 的, 如果存在一条边 E_k, 使得 $i,j\in E_k$.

下面定义超图的关联矩阵 (incidence matrix).

定义 12.2.2 给定 $H=(N,\mathcal{E})$, 设 $|N|=n$, $|\mathcal{E}|=m$. 定义其关联矩阵 $R\in M_{n\times m}$ 如下

$$r_{i,j}=\begin{cases}1, & i\in E_j,\\ 0, & i\notin E_j.\end{cases}$$

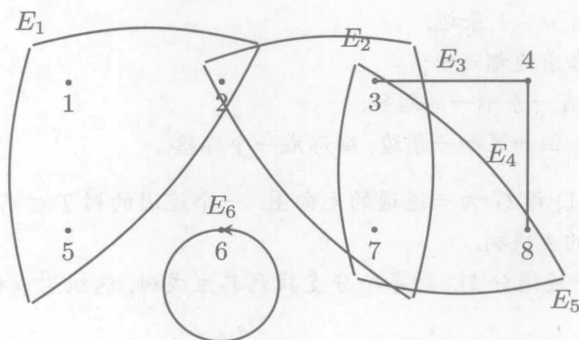


图 12.2.1 超图

例 12.2.2 考虑例 12.2.1 中的超图 (见图 12.2.1). 不难看出, 其关联矩阵为

$$R = \begin{bmatrix} 1\,0\,0\,0\,0\,0 \\ 1\,1\,0\,0\,0\,0 \\ 0\,1\,1\,0\,1\,0 \\ 0\,0\,1\,1\,0\,0 \\ 1\,0\,0\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,0\,0\,1 \\ 0\,1\,0\,0\,1\,0 \\ 0\,0\,0\,1\,1\,0 \end{bmatrix}.$$

□

给定超图 $H=(X,\mathcal{E})$ 如前, 它的对偶超图 (dual hypergraph) 定义如下.

定义 12.2.3 $H=(X,\mathcal{E})$ 的对偶超图, 记作 $H^*=(E;\mathcal{X})$. 这里 $E=\{e_1,\cdots,e_m\}$, 它对应于原图的边 $\mathcal{E}=\{E_1,\cdots,E_m\}$; $\mathcal{X}=\{X_1,\cdots,X_n\}$, 它对应于原图的节点 $X=\{x_1,\cdots,x_n\}$, 使得

$$X_j:=\{e_i|x_j\in E_i\},\quad j=1,\cdots,n\}.$$

容易检验, $H^*=(E;\mathcal{X})$ 是超图.

定义 12.2.4 给定超图 $H=(X,\mathcal{E})$, $A\subset X$. 由 A 生成的子超图, 记作 $(A,\mathcal{E}_A)$, 其中

$$\mathcal{E}_A:=\{E_i\cap A\,|\,E_i\in\mathcal{E},E_i\mathcal{A}\neq\varnothing\}.$$

下面定义超图的圈, 它是超图研究的核心问题.

定义 12.2.5 给定超图 $H=(X,\mathcal{E})$. 一个长度为 q 的链 (chain) 是一个序列 $(x_1,E_1,x_2,E_2,\cdots,E_q,x_{q+1})$, 使得

(1) $x_1,\cdots,x_q\in X$ 为不同节点;

(2) $E_1,\cdots,E_q\in\mathcal{E}$ 为不同的边;

(3) $x_k, x_{k+1} \in E_k$, $k = 1, \cdots, q$.

如果 $q > 1$ 且 $x_{q+1} = x_1$, 则称这个链为长度为 q 的圈.

定理 12.2.1 [49] 设 H 为一超图, 它有 n 个节点, m 条边, p 个连通块. 那么, 它不含圈当且仅当

$$\sum_{i=1}^{m}(|E_i| - 1) = n - p.$$

拟阵是图与超图研究中的一个重要工具, 简单介绍如下.

定义 12.2.6 一个拟阵是一个有序对 $M = (E, \mathcal{I})$, 这里 E 是有限集, 子集族 $\varnothing \neq \mathcal{I} \subset 2^E$ 称为独立族, 满足

(1) 设 $I \in \mathcal{I}$ 且 $K \subset I$, 则 $K \in \mathcal{I}$;

(2) 设 $I, J \in \mathcal{I}$ 且 $|I| < |J|$, 则存在 $e \in J \backslash I$, 使得 $I \cup \{e\} \in \mathcal{I}$.

拟阵有如下的等价定义[115]:

定义 12.2.7 一个拟阵是一个有序对 $M = (E, \mathcal{B})$, 这里 E 是有限集, 子集族 $\varnothing \neq \mathcal{B} \subset 2^E$ 称为基族, 满足

(1) 设 $B \in \mathcal{B}$, K 为 B 的真子集, 即 $K \subset B$ 且 $K \neq B$, 则 $K \notin \mathcal{B}$;

(2) 设 $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ 且 $e \in B_1$. 则存在 $f \in B_2$, 使得 $(B_1 \backslash \{e\}) \cup \{f\} \in \mathcal{B}$.

在后一个定义中的基底 $B \in \mathcal{B}$ 是前一个定义中最大的独立集.

下面的例子包括了拟阵的两个主要背景.

例 12.2.3 (1) 设 $V \in M_{n \times m}$, $\mathcal{I}$ 为 V 中线性无关列的集合, 则 $(V, \mathcal{I})$ 为一拟阵. 如果用基底定义, $\mathcal{B}$ 为 V 中最大线性无关列集所成族, 则 $(V, \mathcal{B})$ 为一拟阵.

(2) 设 G 是一个连通图, $\mathcal{I}$ 为 V 中无圈子图的集合, 则 $(G, \mathcal{I})$ 为一拟阵. 如果用基底定义, $\mathcal{B}$ 为 G 的生成树族, 则 $(G, \mathcal{B})$ 为一拟阵. □

定义 12.2.8 (1) 设 $M_1 = (E_1, \mathcal{B}_1)$ 和 $M_2 = (E_2, \mathcal{B}_2)$ 为两个拟阵. $\phi : E_1 \to E_2$ 称为两个拟阵的同构映射, 如果① ϕ 是一对一映上的; ②设 $B \in \mathcal{B}_1$, 则 $\phi(B) \in \mathcal{B}_2$. 如果存在同构映射, 则称拟阵 M_1 与 M_2 同构, 记作 $M_1 \simeq M_2$.

(2) 拟阵 M 上的同构称为自同构. 自同构以映射复合为乘法构成一个群, 称为 M 的自同构群, 记作 $Aut(M)$.

例 12.2.4 (1) 考虑矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

记 $c_i = \mathrm{Col}_i(A)$, $i = 1, 2, 3, 4$. 那么, $M_1 = (\mathrm{Col}(A), \mathcal{B})$ 为一拟阵, 这里 $\mathcal{B}$ 为基底集合, 即

$$\mathcal{B} = \{\{c_1, c_2, c_3\}; \{c_1, c_2, c_4\}; \{c_2, c_3, c_4\}\}.$$

(2) 考虑图 G, 如图 12.2.2 所示.

$M_2=(G,\mathcal{B})$ 为一拟阵, 这里 $\mathcal{B}$ 为生成树集合, 即

$$\mathcal{B}=\{\{e_1,e_2,e_3\};\{e_1,e_2,e_4\};\{e_2,e_3,e_4\}\}.$$

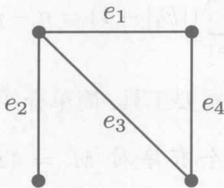


图 12.2.2 拟阵的图

(3) 定义 $\phi:\mathrm{Col}(A)\to E(G)$ 为

$$\phi(c_i)=e_i,\quad i=1,2,3,4.$$

显见 ϕ 是一同构映射, 故 $M_1\simeq M_2$. □

12.3 非合作博弈

博弈作为社会活动早已有之, 例如春秋战国时的故事 "田忌赛马" 即为一例. 但通常以冯・诺伊曼等在 1944 年出版的一本书—《博弈论与经济行为》—为博弈论的开篇[15]. 博弈论大体可分为两类: 非合作博弈与合作博弈. 本节讨论非合作博弈.

定义 12.3.1 一个正规型的非合作博弈 G 可用一有序三元组表示, $G=(N,\mathcal{S},c)$. 这里

(1) $N=\{1,2,\cdots,n\}$ 称为玩家 (players);

(2)

$$\mathcal{S}_i=\{1,2,\cdots,k_i\},$$

称为第 i 个玩家的策略集, $i=1,\cdots n$, 策略集的乘积集合

$$\mathcal{S}=\prod_{i=1}^{n}\mathcal{S}_i$$

称为局势集合 (situation or profile);

(3) 玩家 j 在每一个特定局势下的所得称为 j 的支付函数 (payoff function), 即

$$c_j:\ \mathcal{S}\to\mathbb{R},\quad j=1,\cdots,n.$$

记支付函数集合为

$$c=\{c_1,\cdots,c_n\};$$

(4) 一个二人博弈称为对称博弈, 如果

$$c_1(x_1, x_2) = c_2(x_2, x_1).$$

定义 12.3.2 在一个博弈 G 中, 一个局势

$$s = (x_1^*, \cdots, x_n^*) \in \mathcal{S}$$

称为纳什均衡, 如果

$$c_j(x_1^*, \cdots, x_j^*, \cdots, x_n^*) \geqslant c_j(x_1^*, \cdots, x_j, \cdots, x_n^*) \qquad (12.3.1)$$
$$j = 1, \cdots, n.$$

直观地说, 纳什均衡是这样一种局势, 在这种局势下大家都不肯“变招”, 因为谁变招了, 谁就只会吃亏 (至少无利可图).

将 s_i 作为第 i 个玩家策略的指标, 即 $s_i = 1, \cdots, k_i$. 以指标持 $id(s_1, \cdots, s_n; k_1, \cdots, k_n)$ 为序将所有策略排序 (记号见附录), 这样可得到一个局势的排列, 用它标识一个矩阵的列, 用玩家标识矩阵的行. 这样可得到一个 $n \times k$ 的矩阵, 这里 $k = \prod_{i=1}^n k_i$, 矩阵的第 i 行第 j 列表示玩家 i 在 j 列所对应的局势下的支付. 这样得到的矩阵称为支付矩阵.

下面用一个例子来描述支付矩阵.

例 12.3.1 在一个博弈 G 中有三个玩家. 第 1 与第 2 个玩家均有两种策略, 第 3 个玩家有三种策略, 即 $\mathcal{S}_1 = \{1,2\}$, $\mathcal{S}_2 = \{1,2\}$, $\mathcal{S}_3 = \{1,2,3\}$. 于是, 支付矩阵为一 3×12 的矩阵, 如表 12.3.1 所示.

表 12.3.1 支付矩阵与纳什均衡

$c\backslash$profile	111	112	113	121	122	123	211	212	213	221	222	223
c_1	2	1	$\underline{4}$	$\underline{3}$	$\underline{3}$	$\underline{2}$	$\underline{4}$	$\underline{3}$	1	2	2	1
c_2	3	1	2	$\underline{4}$	$\underline{2}$	$\underline{3}$	$\underline{2}$	1	$\underline{4}$	1	$\underline{2}$	1
c_3	2	1	$\underline{3}$	$\underline{4}$	$\underline{4}$	3	$\underline{4}$	2	2	$\underline{2}$	1	1

□

通过支付矩阵, 很容易找到纳什均衡点. 考虑第 i 行, 即第 i 个玩家的支付. 在 s_j, $j \neq i$ 都相同的情况下, 比较不同 s_i 的支付, 在最大值下面划线. 对每个 i 进行完比较后, 回头看该表. 如果某一列的元素, 对所有 i 都划了线, 则它所对应的就是纳什均衡点.

以表 12.3.1 为例. 考虑第一行, 将 111 与 211 比, 因 $c_1(211) = 4 > c_1(111) = 2$, 我们在 4 下划线; 将 112 与 212 比, 因 $c_1(112) = 1 < c_1(212) = 3$, 我们在 3 下划线, $\cdots$ 最后发现, 第 4, 5, 7 三列的每一列所有元素都有下划线, 于是, 它们对应的局势 121, 122 和 211 为 3 个纳什均衡点.

下面考察几个常见例子:

例 12.3.2　(1) 囚徒困境: 两囚徒被拘, 策略为 1: 沉默; 2: 招供. 支付矩阵如表 12.3.2 所示.

表 12.3.2　囚徒困境

$c\backslash$profile	1 1	1 2	2 1	2 2
c_1	-1	-9	$\underline{0}$	$\underline{-6}$
c_2	-1	$\underline{0}$	-9	$\underline{-6}$

显然 (2 2) 是纳什均衡.

(2) 石头-剪刀-布: 两人玩石头-剪刀-布 (R-S-C) 游戏. 支付矩阵如表 12.3.3 所示.

表 12.3.3　石头-剪刀-布

$c\backslash$profile	RR	RS	RC	SR	SS	SC	CR	CS	CC
c_1	0	$\underline{1}$	-1	-1	0	$\underline{1}$	$\underline{1}$	-1	0
c_2	0	-1	$\underline{1}$	$\underline{1}$	0	-1	-1	$\underline{1}$	0

显然, 这里没有纳什均衡.

(3) 手心-手背: 三人玩手心-手背. 如果三人一致, 则无输赢; 否则, 落单者向其余 2 人各付一元. 记 1: 手心, 2: 手背, 则支付矩阵如表 12.3.4 所示.

表 12.3.4　手心-手背

$c\backslash$profile	1 1 1	1 1 2	1 2 1	1 2 2	2 1 1	2 1 2	2 2 1	2 2 2
c_1	$\underline{0}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	-2	-2	$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{0}$
c_2	$\underline{0}$	$\underline{1}$	-2	$\underline{1}$	$\underline{1}$	-2	$\underline{1}$	$\underline{0}$
c_3	$\underline{0}$	-2	$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	-2	$\underline{0}$

显然, (1 1 1) 与 (2 2 2) 为纳什均衡.　□

以上讨论的是纯策略, 即玩家 i 的策略直接取自其策略集 $\mathcal{S}_i$. 但如果他以概率 p_j^i 取策略 $j \in \mathcal{S}_i$, 这里 $\sum_{j=1}^{k_i} p_j^i = 1$, 这种策略就称为混合策略. 我们用 $\mathcal{S}_i^*$ 表示玩家 i 的混合策略集. 在混合策略下, 我们用收益的期望值代替实际收益, 即玩家 i 的收益为

$$E_i = \sum_{j_1=1}^{k_1} \cdots \sum_{j_n=1}^{k_n} \left[\prod_{\ell=1}^{n} p_{j_\ell}^{\ell} c_i(j_1, \cdots, j_n) \right], \quad i = 1, \cdots, n. \tag{12.3.2}$$

定理 12.3.1　对于有限博弈 ($n < \infty$, $k_i < \infty$, $i = 1, \cdots, n$), 如果允许混合博弈, 则至少存在一个纳什均衡点.

例 12.3.3 考虑例 12.3.2 中的"石头-剪刀-布"游戏. 容易算出

$$E_1 = p_1^1 p_2^2(1) + p_1^1 p_3^2(-1) + p_2^1 p_1^2(-1) + p_2^1 p_3^2(1) + p_3^1 p_1^2(1) + p_3^1 p_2^2(-1).$$

为取极值, 令

$$\frac{\partial E_1}{\partial p_1^1} = 0; \quad \frac{\partial E_1}{\partial p_2^1} = 0; \quad \frac{\partial E_1}{\partial p_3^1} = 0.$$

解得

$$p_1^2 = p_2^2 = p_3^2.$$

考察 E_2, 同理可得

$$p_1^1 = p_2^1 = p_3^1.$$

即, 双方均用相等概率 (1/3) 选"石头"、"剪刀"、"布"中的一个. 容易验证, 这的确是纳什均衡点. □

12.4 合作博弈

我们只考虑收益可分配的 (transferable utility) 合作博弈.

定义 12.4.1 一个合作博弈 G 可由一个有序对表示: $G = (N, v)$. 这里

(1) $N := \{p_1, \cdots, p_n\} = \{1, \cdots, n\}$ 代表 n 个玩家.

N 的任一子集 $S \subset N$ 称为一个联盟. $S = \varnothing$ 称为空联盟, $S = N$ 称为大联盟.

(2) $v : 2^N \to \mathbb{R}$ 称为特征函数, 规定 $v(\varnothing) = 0$, $v(S)$ 表示联盟 S 的价值.

通常对特征函数 v 还要求它满足超加性, 即设 $R, T \in 2^N$, $R \cap T = \varnothing$, 则

$$v(R) + v(T) \leqslant v(R \cup T). \tag{12.4.1}$$

超加性表明合作可能有利可图. 如果对所有的 $R, T \in 2^N$, $R \cap T = \varnothing$ 均有

$$v(R) + v(T) = v(R \cup T), \quad \forall R \in 2^N.$$

这种博弈称为零和博弈. 对合作博弈而言, 零和博弈是平凡的, 没有合作价值.

下面给一个例子.

例 12.4.1 (传输问题) 图 12.4.1 中 P 为电厂, 1, 2, 3 为三个村子. 边上的数字为距离 (或铺设输电线花费). 现在如果 1, 2 单独铺设电线, 则需 $100 + 140 = 240$, 如果合作, 则只要 $100 + 50 = 150$. 于是, 合作的价值: $v(\{1, 2\}) = 90$. 类此可得特征函数如表 12.4.1. □

定义 12.4.2 给定一个合作博弈 $G = (N, v)$.

(1) $x \in \mathbb{R}^n$ 称为一个分配, 如果

$$x_i \geqslant v(\{i\}), \quad i = 1, \cdots, n; \tag{12.4.2}$$

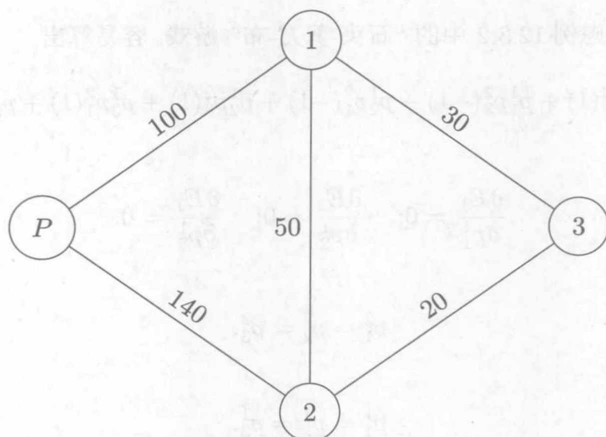


图 12.4.1　传输网络

表 12.4.1　特征函数

S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
$c(S)$	100	140	130	150	130	150	150
$v(S)$	0	0	0	90	100	120	220

(2)

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = v(N). \tag{12.4.3}$$

(N,v) 的分配集合记作 $I(v)$.

设 $N=\{1,2,\cdots,n\}$, $S\in 2^N$. 为了使用矩阵方法, 我们给所有的 S 一个向量表示. 记 $x^S\in\Delta_2^n$ 为 S 的向量表示, 这里

$$x_i^S=\begin{cases}\delta_2^1, & i\in S,\\ \delta_2^2, & \text{其他}.\end{cases} \tag{12.4.4}$$

在不会有混淆的情况下, 我们定义 (用同一记号)

$$x^S=\ltimes_{i=1}^n x_i^S. \tag{12.4.5}$$

在向量形式下, 我们可以将 2^N 中的元素排个序. 记

$$S_i:=\delta_{2^n}^i,\quad i=1,\cdots,2^n.$$

利用这个顺序, 我们可以定义特征函数的向量形式.

定义 12.4.3 特征函数 v 的向量形式定义为

$$C_v := [v(S_1)\ v(S_2)\ \cdots\ v(S_{2^n})] \in \mathbb{R}^{2^n}. \tag{12.4.6}$$

利用式 (12.4.6), 显然有

$$v(S) = C_v x^S. \tag{12.4.7}$$

例 12.4.2 回顾例 12.4.1, 那里

$$\begin{aligned} &S_1 = 1\,1\,1,\ S_2 = 1\,1\,0,\ S_3 = 1\,0\,1,\ S_4 = 1\,0\,0, \\ &S_5 = 0\,1\,1,\ S_6 = 0\,1\,0,\ S_7 = 0\,0\,1,\ S_8 = 0\,0\,0. \end{aligned}$$

于是有

$$C_v = \begin{bmatrix} 220\ 90\ 100\ 0\ 120\ 0\ 0\ 0 \end{bmatrix}.$$

□

定义 12.4.4 (N, v) 称为无偏博弈, 如果存在一个联盟 $\varnothing \neq T \in 2^N$, 使得

$$v(S) := u_T(S) = \begin{cases} 1, & T \subset S, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases} \tag{12.4.8}$$

定理 12.4.1 [51] 设 $N = \{1, 2, \cdots, n\}$, 其上的特征函数集合, 记为 G^N, 是一个 $2^n - 1$ 维的线性空间, 其一组基底为无偏博弈集合

$$\left\{ u_T \,\middle|\, \varnothing \neq T \in 2^N \right\}.$$

具体地说, 设 $v \in G^N$, 那么

$$v = \sum_{T \in 2^N \backslash \varnothing} \mu_T u_T, \tag{12.4.9}$$

这里

$$\mu_T = \sum_{S \subset T} (-1)^{(|T|-|S|)} v(S). \tag{12.4.10}$$

例 12.4.3 设 $N = \{1, 2\}$.

$$S_1 = 1\,1,\ \ S_2 = 1\,0,\ \ S_3 = 0\,1,\ \ S_4 = 0\,0.$$

由式 (12.4.8) 可知

$$\begin{aligned} &u_{S_1}(S_1) = 1,\ u_{S_1}(S_2) = 0,\ u_{S_1}(S_3) = 0,\ u_{S_1}(S_4) = 0, \\ &u_{S_2}(S_1) = 1,\ u_{S_2}(S_2) = 1,\ u_{S_2}(S_3) = 0,\ u_{S_2}(S_4) = 0, \\ &u_{S_3}(S_1) = 1,\ u_{S_3}(S_2) = 0,\ u_{S_3}(S_3) = 1,\ u_{S_3}(S_4) = 0, \end{aligned}$$

利用式 (12.4.9) 可得

$$v = \mu_{S_1} u_{S_1} + \mu_{S_2} u_{S_2} + \mu_{S_3} u_{S_3},$$

这里 μ_{S_i} 可由式 (12.4.10) 算得

$$\mu_{S_1} = \sum_{S \subset S_1} (-1)^{(|S_1|-|S|)} v(S) = v(S_1) - v(S_2) - v(S_3),$$

$$\mu_{S_2} = \sum_{S \subset S_2} (-1)^{(|S_2|-|S|)} v(S) = v(S_2),$$

$$\mu_{S_3} = \sum_{S \subset S_3} (-1)^{(|S_3|-|S|)} v(S) = v(S_3).$$

因此, 有

$$v = [v(S_1) - v(S_2) - v(S_3)]\, u_{S_1} + v(S_2) u_{S_2} + v(S_3) u_{S_3}. \tag{12.4.11}$$

□

由例 12.4.3 可以看出, 式 (12.4.9) 和式 (12.4.10) 在使用上并不方便, 我们希望把它表示为方便的矩阵形式.

为方便计, 对空集也形式地定义无偏博弈

$$u_{\varnothing}(S) = \begin{cases} 1, & S = \varnothing, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

相应地

$$\mu_{\varnothing} = 0.$$

于是式 (12.4.9) 可形式地写成

$$v = \sum_{T \in 2^N} \mu_T u_T. \tag{12.4.12}$$

下面考虑 v_T 的向量形式. 当 $|N| = 1$, $|N| = 2$, $|N| = 3$ 时, u_T 分别列于表 12.4.2~表 12.4.4 中.

表 12.4.2 $|N| = 1$ 时的 u_T

$T \backslash C_{u_T} \backslash S$	1	0
1	1	0
0	1	1

表 12.4.3 $|N|=2$ 时的 u_T

$T\backslash C_{u_T}\backslash S$	11	10	01	00
11	1	0	0	0
10	1	1	0	0
01	1	0	1	0
00	1	1	1	1

表 12.4.4 $|N|=3$ 时的 u_T

$T\backslash C_{u_T}\backslash S$	111	110	101	100	011	010	001	000
111	1	0	0	0	0	0	0	0
110	1	1	0	0	0	0	0	0
101	1	0	1	0	0	0	0	0
100	1	1	1	1	0	0	0	0
011	1	0	0	0	1	0	0	0
010	1	1	0	0	1	1	0	0
001	1	0	1	0	1	0	1	0
000	1	1	1	1	1	1	1	1

定义

$$U_n := \begin{bmatrix} C_{u_{S_1}} \\ C_{u_{S_2}} \\ \vdots \\ C_{u_{S_{2^n}}} \end{bmatrix}, \tag{12.4.13}$$

这里 $S_i \in 2^N$, $|N|=n$, 且 $C_{u_{S_i}}$ 为 u_{S_i} 的向量形式. 那么, $U_n \in \mathcal{M}_{2^n\times 2^n}$. 表 12.4.2~表 12.4.4 反映了 U_n, $n=1,2,3$, 称 U_n 为 n 阶无偏矩阵.

由表 12.4.2~表 12.4.4 不难看出如下结论.

命题 12.4.1 无偏矩阵可以递推计算如下

$$\begin{cases} U_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ U_{k+1} = \begin{bmatrix} U_k & 0 \\ U_k & U_k \end{bmatrix}, \quad k=2,3,\cdots. \end{cases} \tag{12.4.14}$$

给定 $v \in G^N$, 记它的向量形式为

$$C_v = (v_1\ v_2\ \cdots\ v_{2^n}).$$

设

$$v=\sum_{i=1}^{2^n}\mu_i u_{S_i},$$

这里总假定 $\mu_{2^n}=0$. 那么我们有

$$C_v=(\mu_1\ \mu_2\ \cdots\ \mu_{2^n})\,U_n. \tag{12.4.15}$$

另外 U_n^{-1} 可计算如下

$$\begin{cases} U_1^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix},\\ U_{k+1}^{-1}=\begin{bmatrix}U_k^{-1} & 0\\ -U_k^{-1} & U_k^{-1}\end{bmatrix}, \quad k=2,3,\cdots. \end{cases} \tag{12.4.16}$$

要看这些表达式有多方便, 回到例 12.4.3.

例 12.4.4 回顾例 12.4.3. 那里 $n=2$, 利用式 (12.4.15) 可知

$$(v(S_1)\ v(S_2)\ v(S_3)\ 0)=(\mu_1\ \mu_2\ \mu_3\ \mu_4)\,U_2.$$

因此

$$\begin{aligned}(\mu_1\ \mu_2\ \mu_3\ \mu_4)&=(v(S_1)\ v(S_2)\ v(S_3)\ 0)\,U_2^{-1}\\ &=(v(S_1)\ v(S_2)\ v(S_3)\ 0)\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-1&1&0&0\\-1&0&1&0\\1&-1&-1&1\end{bmatrix}\\ &=(v(S_1)-v(S_2)-v(S_3)\ v(S_2)\ v(S_3)\ 0).\end{aligned}$$

□

最后, 我们介绍 Shapley 值, 它是一种特殊的分配. 先从一种自然的分配方式入手, 令

$$\begin{aligned}x_1&=v(\{1\}),\\ x_2&=v(\{1,2\})-v(\{1\}),\\ x_3&=v(\{1,2,3\})-v(\{1,2\}),\\ &\vdots\\ x_n&=v(\{1,2,\cdots,n\})-v(\{1,2,\cdots,n-1\}),\end{aligned}$$

这种分配看似自然, 但它依赖于元素 $i\in N$ 的顺序. 令 $\sigma\in\mathbf{S}_n$ 为一排列. 那么在 $\sigma(i)$ 顺

序下, 我们有另一个分配

$$
\begin{aligned}
x_1 &= v(\{\sigma^{-1}(1)\}, \\
x_2 &= v(\{\sigma^{-1}(1), \sigma^{-1}(2)\}) - v(\{\sigma^{-1}(1)\}), \\
x_3 &= v(\{\sigma^{-1}(1), \sigma^{-1}(2), \sigma^{-1}(3)\}) - v(\{\sigma^{-1}(1), \sigma^{-1}(2)\}), \\
&\vdots \\
x_n &= v(\{\sigma^{-1}(1), \sigma^{-1}(2), \cdots, \sigma^{-1}(n)\}) - v(\{\sigma^{-1}(1), \sigma^{-1}(2), \cdots, \sigma^{-1}(n-1)\}).
\end{aligned}
$$

对每一个 $\sigma \in \mathbf{S}_n$, 记

$$S_\sigma^i = \{j | \sigma j < i\}.$$

对于排列 $\mathbf{S}_n$ 做平均, 则得

$$\varphi_i(v) := \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathbf{S}_n} \left[v(S_\sigma^i \cup \{i\}) - v(S_\sigma^i) \right], \quad i = 1, \cdots, n. \tag{12.4.17}$$

显然

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \varphi_i(v) &= v(N), \\
\varphi_i(v) &\geqslant v(\{i\}).
\end{aligned} \tag{12.4.18}
$$

因此, $\varphi := (\varphi_1(v), \varphi_2(v), \cdots, \varphi_n(v)) \in I(v)$ 是一个分配.

下面我们将式 (12.4.17) 右边的项依 $S \in N \backslash i$ 分类, 记

$$\Theta^S := \left\{ \sigma \in \mathbf{S}_n \middle| S_\sigma^i = S \right\}.$$

注意在 S_σ^i 中元素顺序不影响 φ_i 的定义. 同时由于

$$|\Theta^S| = |S|!(n-1-|S|)!$$

我们有

$$
\begin{aligned}
\varphi_i(v) &= \tfrac{1}{n!} \sum_{S \in N \backslash \{i\}} \sum_{\sigma \in \Theta^S} \left[v\left(S_\sigma^i \cup \{i\}\right) - v\left(S_\sigma\right) \right] \\
&= \sum_{S \in N \backslash \{i\}} \tfrac{|S|!(n-1-|S|)!}{n!} \left[v\left(S \cup \{i\}\right) - v\left(S\right) \right], \\
&\qquad i = 1, 2, \cdots, n.
\end{aligned} \tag{12.4.19}
$$

定义 12.4.5

$$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n) \in I(v)$$

称为 Shapley 值.

定义 12.4.6 设 (N, v) 为一合作博弈, $T \in 2^N$. T 称为 v 的一个支柱 (carrier), 如果

$$v(S) = v(S \cap T), \quad \forall S \in 2^N.$$

命题 12.4.2 [50] (1) 如果 T 是支柱, $T\subset W\subset N$, 那么 W 也是支柱.

(2) 如果 T 是支柱, $i\not\in T$, 那么

$$v(S\cup\{i\})=v(S),\quad \forall S\in 2^N,$$

这时 i 称为哑元.

定义 12.4.7 [50] 考虑 (N,v) 和一个 (分配) 映射

$$\psi(v)=(\psi_1(v),\psi_2(v),\cdots,\psi_n(v)).$$

以下为三个分配公理:

(1) (有效公理) 对 v 的任一支柱 T, 有

$$\sum_{i\in T}\psi_i(v)=v(T); \tag{12.4.20}$$

(2) (对称公理) 设有一排列 $\sigma\in \mathbf{S}_n$, 使得

$$v(\sigma(S))=v(S),\quad \forall\, S\in 2^N, \tag{12.4.21}$$

那么

$$\psi_{\sigma(i)}(v)=\psi_i(v),\quad \forall i\in N; \tag{12.4.22}$$

(3) (可加公理) 设 v,w 为 N 上的两个特征函数, 那么

$$\psi_i(v+w)=\psi_i(v)+\psi_i(w),\quad \forall i\in N. \tag{12.4.23}$$

定理 12.4.2 [50] 定义于式 (12.4.19) 的 Shapley 值是唯一满足三个公理的分配.

下面给出一个计算 Shapley 值的矩阵公式[64]. 记

$$\begin{aligned}
&v(S\cup\{i\})-v(S)\\
=&C_v\left[x_1^S\cdots x_{i-1}^S\tbinom{1}{0}x_{i+1}^S\cdots x_n^S-x_1^S\cdots x_{i-1}^S\tbinom{0}{1}x_{i+1}^S\cdots x_n^S\right]\\
=&C_v\left[W_{[2,2^{i-1}]}\tbinom{1}{0}x_1^S\cdots x_{i-1}^Sx_{i+1}^S\cdots x_n^S-W_{[2,2^{i-1}]}\tbinom{0}{1}x_1^S\cdots x_{i-1}^Sx_{i+1}^S\cdots x_n^S\right]\\
=&C_v\left[W_{[2,2^{i-1}]}\tbinom{1}{-1}x_1^S\cdots x_{i-1}^Sx_{i+1}^S\cdots x_n^S\right].
\end{aligned} \tag{12.4.24}$$

定义

$$|\delta_{2^k}^i|:=|S|,$$

这里 $x^S=\delta_{2^k}^i$. 以下引理由直接验证可得.

引理 12.4.1 构造一个序列的列向量如下

$$\begin{cases}
\ell_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^2;\\
\ell_{k+1}=\begin{bmatrix}\ell_k+\mathbf{1}_{2^k}\\ \ell_k\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{2^{k+1}},\qquad k=2,3,\cdots,
\end{cases}$$

这里 $\mathbf{1}_t = \Big[\underbrace{1,\cdots,1}_{t}\Big]^{\mathrm{T}}$. 记 ℓ_k^i 为 ℓ_k 的第 i 个分量, 那么

$$\left|\delta_{2^k}^i\right| = \ell_k^i, \quad i = 1, 2, \cdots, 2^k. \tag{12.4.25}$$

利用 ℓ_k, 我们构造列向量 $\eta_k \in \mathbb{R}^{2^k}$ 如下

$$\eta_k^i = (\ell_k^i)!\,(k-1-\ell_k^i)!, \quad i = 1, \cdots, 2^k. \tag{12.4.26}$$

利用式 (12.4.24)、式 (12.4.26), 式 (12.4.19) 可以写成

$$\varphi_i(v) = \frac{1}{n} C_v \sum_{j=1}^{2^{n-1}} \eta_{n-1}^j W_{[2,2^{i-1}]} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \delta_{2^{n-1}}^j, \quad i = 1, \cdots, n. \tag{12.4.27}$$

注意到

$$W_{[2,2^{i-1}]} = \delta_{2^i}\left[1\ 3\ \cdots\ 2^{i-1}-1\ 2\ 4\ \cdots\ 2^{i-1}\right],$$

因此

$$W_{[2,2^{i-1}]} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \binom{1}{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \binom{1}{-1} & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & \binom{1}{-1} \end{bmatrix}}_{2^{i-1}}.$$

下面构造矩阵 $\Gamma_i \in \mathcal{M}_{2^n \times 2^{n-1}}$ 如下

$$\begin{aligned} \Gamma_i &= \left[W_{[2,2^{i-1}]}\binom{1}{-1}\right] \otimes I_{2^{n-i}} \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} I_{2^{n-i}} \\ -I_{2^{n-i}} \end{pmatrix} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} I_{2^{n-i}} \\ -I_{2^{n-i}} \end{pmatrix} & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & \begin{pmatrix} I_{2^{n-i}} \\ -I_{2^{n-i}} \end{pmatrix} \end{bmatrix}}_{2^{i-1}}. \end{aligned}$$

显然

$$W_{[2,2^{i-1}]} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \delta_{2^{n-1}}^j = \mathrm{Col}_j(\Gamma_i).$$

下面将 η (η_{n-1} 的简写) 分成 k 个同样大小的块, 即

$$\eta = \begin{bmatrix} \eta_k^1 \\ \eta_k^2 \\ \vdots \\ \eta_k^k \end{bmatrix}, \quad k = 1, 2, 2^2, \cdots, 2^{n-1}.$$

根据 Γ_i 的结构, 不难看出

$$\sum_{j=1}^{2^{n-1}} \eta_{n-1}^j W_{[2,2^{i-1}]} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \delta_{2^{n-1}}^j = \begin{bmatrix} \eta_{2^{i-1}}^1 \\ -\eta_{2^{i-1}}^1 \\ \eta_{2^{i-1}}^2 \\ -\eta_{2^{i-1}}^2 \\ \vdots \\ \eta_{2^{i-1}}^{2^{i-1}} \\ -\eta_{2^{i-1}}^{2^{i-1}} \end{bmatrix}.$$

总结以上讨论, 可以得到如下定理.

定理 12.4.3 (N, v) 的 Shapley 值 (这里 $|N| = n$) 可计算如下

$$C_v \Xi_n = \varphi(v), \tag{12.4.28}$$

这里 $\Xi \in \mathcal{M}_{2^n \times n}$ 定义为

$$\Xi_n = \frac{1}{n!} \left[\begin{pmatrix} \eta_1 \\ -\eta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_2^1 \\ -\eta_2^1 \\ \eta_2^2 \\ -\eta_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_4^1 \\ -\eta_4^1 \\ \eta_4^2 \\ -\eta_4^2 \\ \eta_4^3 \\ -\eta_4^3 \\ \eta_4^4 \\ -\eta_4^4 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} \eta_{2^{n-1}}^1 \\ -\eta_{2^{n-1}}^1 \\ \eta_{2^{n-1}}^2 \\ -\eta_{2^{n-1}}^2 \\ \vdots \\ \eta_{2^{n-1}}^{2^{n-1}} \\ -\eta_{2^{n-1}}^{2^{n-1}} \end{pmatrix} \right]. \tag{12.4.29}$$

例 12.4.5 (1) $n = 2$

$$\ell_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}};$$

$$\eta_1 = \begin{bmatrix} 1!(2-1-1)! & 0!(2-1-0)! \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}};$$

$$\Xi_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(2) $n=3$

$$\ell_2=\begin{bmatrix}2\ 1\ 1\ 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}};$$

$$\eta_2=\begin{bmatrix}2\ 1\ 1\ 2\end{bmatrix}^{\mathrm{T}};$$

$$\Xi_3=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}2 & 2 & 2\\ 1 & 1 & -2\\ 1 & -2 & 1\\ 2 & -1 & -1\\ -2 & 1 & 1\\ -1 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 2\\ -2 & -2 & -2\end{bmatrix}.$$

(3) $n=4$

$$\ell_3=\begin{bmatrix}3\ 2\ 2\ 1\ 2\ 1\ 1\ 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}};$$

$$\eta_3=\begin{bmatrix}6\ 2\ 2\ 6\ 2\ 6\ 6\ 6\end{bmatrix}^{\mathrm{T}};$$

$$\Xi_4=\frac{1}{24}\begin{bmatrix}6 & 6 & 6 & 6\\ 2 & 2 & 2 & -6\\ 2 & 2 & -6 & 2\\ 6 & 6 & -2 & -2\\ 2 & -6 & 2 & 2\\ 6 & -2 & 6 & -2\\ 6 & -2 & -2 & 6\\ 6 & -6 & -6 & -6\\ -6 & 2 & 2 & 2\\ -2 & 6 & 6 & -2\\ -2 & 6 & -2 & 6\\ -6 & 6 & -6 & -6\\ -2 & -2 & 6 & 6\\ -6 & -6 & 6 & -6\\ -6 & -6 & -6 & 6\\ -6 & -6 & -6 & -6\end{bmatrix}.$$

□

例 12.4.6　玩家 P_1 卖马. P_2 准备最多花 90 元买马, P_3 准备最多花 100 元买马.

(1) 计算 v: 不难算出 $v(\{1,2,3\})=100$, $v(\{1,2\})=90$, $v(\{1,3\})=100$, $v(\{2,3\})=0$, $v(\{1\})=0$, $v(\{2\})=0$, $v(\{3\})=0$, $v(\{\varnothing\})=0$. 因此

$$C_v=\begin{bmatrix}100 & 90 & 100 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

(2) 计算 Shapley 值:

$$\varphi(v)=C_v\Xi_3=\begin{bmatrix}65 & 15 & 20\end{bmatrix}.$$

此值与文献 [38] 中直接计算的结果一致. □

12.5　网络演化博弈

所谓演化博弈是指一种博弈, 它重复多次 (含无数次), 而玩家可根据以前的经验来决定下一次博弈的策略.

定义 12.5.1　一个网络演化博弈, 记作 $((N,E),G,\Pi)$, 由三部分组成:

(1) 网络图 (N,E), 其中 $N=\{1,\cdots,n\}$ 为 n 个玩家;

(2) 基本演化博弈 G, 设 $(i,j)\in E$, 那么, i 同 j 玩游戏 G;

(3) 依赖于局部信息的策略更新规则.

下面对这三个因素做一点说明:

(1) 网络图: 网络图通常是一个无向图, 如果是一个有向图, 那么 $(i,j)\in E$ 就表明在二人博弈中, i 是 P_1, j 是 P_2. 显然, 当基本演化博弈对称时不需要有向图.

我们定义 i 的 r 邻域, 记作 $U_r(i)$. $j\in U_r(i)$, 当且仅当存在一条连接 i 与 j 的路径, 其长度不超过 r. (此时不管每条边的方向, 即把有向图当无向图处理.) 当 $r=1$ 时下标可省去, 即 $U_1(i)=:U(i)$. 另外, 依定义, $i\in U_r(i)$, $\forall r\geqslant 1$.

(2) 基本演化博弈: 基本演化博弈 G 是一个二人博弈, $\mathcal{S}_1=\mathcal{S}_2:=\{1,\cdots,k\}$. 如果基本演化博弈不对称, 则相应网络图必须是有向的.

(3) 策略更新规则: 每个玩家根据当前邻域玩家的策略与收益决定自己下一步的策略. 如果用 x_i 表示第 i 个玩家的策略, 则有

$$x_i(t+1)=f_i(\{x_j(t),c_j(t)\big|j\in U(i)\}),\quad i=1,\cdots,n. \tag{12.5.1}$$

注意到 $c_j(t)$ 只由 $\{x_k(t)|k\in U(j)\}$ 决定, 而如果 $j\in U(i)$, 且 $k\in U(j)$, 则 $k\in U_2(i)$. 因此式 (12.5.1) 可写为

$$x_i(t+1)=f_i(\{x_j(t)\big|j\in U_2(i)\}),\quad i=1,\cdots,n. \tag{12.5.2}$$

显然, 如果式 (12.5.2) 定了, 则整个网络博弈的演化, 或者说形势的演化, 也就确定了. 因此, 我们将式 (12.5.2) 称为基本演化方程.

一个基本演化博弈主要由两个因素决定: (1) 策略数 k; (2) 对称不对称? 依此, 我们将基本演化博弈分类如下:

(1) S-k: 有 k 个可能策略的对称博弈;

(2) A-k: 有 k 个可能策略的非对称博弈.

下面的例子中收集一些常见的博弈, 参见文献 [100, 105, 48].

例 12.5.1 考虑 3 种最简单的形式.

(1) S-2: 支付双矩阵见表 12.5.1.

表 12.5.1 S-2 博弈

$P_1\backslash P_2$	1	2
1	$(R,\ R)$	$(S,\ T)$
2	$(T,\ S)$	$(P,\ P)$

它包括了许多熟知的博弈, 例如:

① 当 $2R > T + S > 2P$ 时, 它是囚徒困境;

② 当 $R = b - c$, $S = b - c$, $T = b$, $P = 0$, 且 $2b > c > b > 0$ 时, 它是铲雪博弈;

③ 当 $R = \frac{1}{2}(v - c)$, $S = v$, $T = 0$, $P = \frac{v}{2}$, 且 $v < c$ 时, 它是鹰鸽博弈.

(2) A-2: 支付双矩阵见表 12.5.2.

表 12.5.2 A-2 博弈

$P_1\backslash P_2$	1	2
1	$(A,\ B)$	$(C,\ D)$
2	$(E,\ F)$	$(G,\ H)$

它也包括了许多熟知的博弈, 例如:

① 当 $A = H = a$, $B = G = b$, $C = D = E = F = 0$, 且 $a > b > 0$ 时, 它是性别游戏;

② 当 $E > A > C = D > B > 0 > F$, 且 $G = H = 0$ 时, 它是智猪博弈;

③ 当 $A = b$, $B = -b$, $C = b$, $D = -b$ $E = c$, $F = -c$, $G = a$, $H = -a$, 且 $a > b > c > 0$ 时, 它是俾斯麦海战;

④ 当 $A = D = F = G - a$, $B = C = E = H = a$, 且 $a \neq 0$ 时, 它是对硬币游戏 (game of matching the pennies).

(3) S-3: 支付双矩阵见表 12.5.3.

表 12.5.3 S-3 博弈

$P_1\backslash P_2$	1	2	3
1	$(A,\ A)$	$(B,\ C)$	$(D,\ E)$
2	$(C,\ B)$	$(F,\ F)$	$(G,\ H)$
3	$(E,\ D)$	$(H,\ G)$	$(I,\ I)$

它包括的一些博弈的例子如下:

① 当 $A=F=I=0$, $B=E=G=a$, $C=D=H=-a$, 且 $a\neq 0$ 时, 它是石头-剪刀-布;

② 当 $E=a$, $A=b$, $F=c$, $I=0$, $B=G=H=D=d$, $C=e$, 且 $a>b>c>0>d>c$ 时, 它是 B-K 游戏 (Benoit-Krishna game). □

下面的例子介绍几个常用的策略更新规则.

例 12.5.2 几类常用的策略更新规则:

(1) 无条件模仿 (UI)[98]: 玩家 i 在 $t+1$ 时刻的策略 $x_i(t+1)$ 取其邻域中在 t 时刻收益最佳者策略, 即如果

$$j^*=\operatorname{argmax}_{j\in U(i)}c_j(x(t)), \tag{12.5.3}$$

则

$$x_i(t+1)=x_{j^*}(t). \tag{12.5.4}$$

当在邻域中收益最佳者不唯一, 例如

$$\operatorname{argmax}_{j\in U(i)}c_j(x(t)):=\{j_1^*,\cdots,j_r^*\}, \tag{12.5.5}$$

我们有以下两种选择:

① 无条件模仿-1 (UI-1): 固定顺序

$$j^*=\min\{\mu\,|\,\mu\in\operatorname{argmax}_{j\in U(i)}c_j(x(t))\}. \tag{12.5.6}$$

这种方法导出确定型 k-值逻辑动态系统.

② 无条件模仿-2 (UI-2): 以等概率任选一位最优者, 即

$$x_i(t+1)=x_{j_\mu^*}(t),\quad 且概率\ p_\mu^i=\frac{1}{r},\quad \mu=1,\cdots,r. \tag{12.5.7}$$

这种方法导出概率型 k-值逻辑动态系统.

(2) Fermi 规则 (FM)[110, 111]: 随机取一邻居 $j\in U(i)$. 比较 $c_j(t)$ 与 $c_i(t)$ 以决定 $x_i(t+1)$ 如下

$$x_i(t+1)=\begin{cases}x_j(t), & 依概率\ p_t,\\ x_i(t), & 依概率\ 1-p_t,\end{cases} \tag{12.5.8}$$

这里 p_t 根据如下 Fermi 函数值确定

$$p_t=\frac{1}{1+\exp(-\mu(c_j(t)-c_i(t)))}.$$

参数值 $\mu > 0$ 可任意确定. 例如, 取 $\mu = \infty$, 那么

$$p_t = \begin{cases} 1, & c_j(t) > c_i(t), \\ 0, & c_j(t) \leqslant c_i(t). \end{cases}$$

这种方法导出概率型 k-值逻辑动态系统.

(3) 近视最佳反映调节 (Myopic Best Response Adjustment Rule (MBRA))[118]: 如果

$$c_i\left(x_i = x^*, x_j = x_j(t),\ j \in U(i)\backslash\{i\}\right) = \max_{x \in S} c_i\left(x_i = x, x_j = x_j(t),\ j \in U(i)\backslash\{i\}\right), \tag{12.5.9}$$

则选

$$x_i(t+1) = x^*. \tag{12.5.10}$$

当最佳策略不唯一时, 即

$$S^* = \{x_1^*, \cdots, x_r^*\} \subset S, \tag{12.5.11}$$

则有以下两种选择:

①第一 MBRA (MBRA-1): 固定顺序

$$x_i(t+1) = \min\{x_j^* \in S^*\}. \tag{12.5.12}$$

这种方法导出确定型 k-值逻辑动态系统.

②第二 MBRA (MBRA-2): 以等概率任选一位最优者, 即

$$x_i(t+1) = x_j^*(t), \quad 且概率\ p_\mu^i = \frac{1}{r}, \quad \mu = 1, \cdots, r. \tag{12.5.13}$$

这种方法导出概率型 k-值逻辑动态系统. □

下面讨论如何得到基本演化方程. 它实际上来自一个简单的比较算法, 我们通过具例子来说明.

例 12.5.3 考虑一个网络演化博弈, 其网络图为一五元环路 C_5. 基本网络博弈为 S-2, 参数满足 $R = S = -1$, $T = 2$, $P = 0$ (铲雪博弈). 策略更新规则为无条件模仿-1 (UI-1).

注意, 每个节点的收益是其与邻居博弈收益的平均值, 即

$$c_i(t) = \frac{1}{|U(i)| - 1} \sum_{j \in U(i)\backslash i} c_{ij}(t), \quad i \in N. \tag{12.5.14}$$

那么, 基本演化方程可由收益表得到, 见表 12.5.4.

表 12.5.4 收益 → 动态模型 (例 12.5.3)

Profile	11111	11112	11121	11122	11211	11212	11221	11222
c_{i-1}	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
c_i	-1	-1	-1	-1	2	2	1	1
c_{i+1}	-1	-1	2	1	-1	-1	1	0
f_i	1	1	2	2	2	2	2	2
Profile	12111	12112	12121	12122	12211	12212	12221	12222
c_{i-1}	2	2	2	2	1	1	1	1
c_i	-1	-1	-1	-1	1	1	-2	0
c_{i+1}	-1	-1	2	1	-1	-1	1	0
f_i	2	2	2	2	2	2	2	2
Profile	21111	21112	21121	21122	21211	21212	21221	21222
c_{i-1}	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
c_i	-1	-1	-1	-1	2	2	1	1
c_{i+1}	-1	-1	2	1	-1	-1	1	0
f_i	1	1	2	2	2	2	2	2
Profile	22111	22112	22121	22122	22211	22212	22221	22222
c_{i-1}	1	1	1	1	0	0	0	0
c_i	-1	-1	-1	-1	1	1	0	0
c_{i+1}	-1	-1	2	1	-1	-1	1	0
f_i	2	2	2	2	2	2	2	2

利用向量表示: $1 \sim \delta_2^1$ 和 $2 \sim \delta_2^2$, f 可由其代数形式表示为

$$x_i(t+1) = M_f x_{i-2} x_{i-1} x_i x_{i+1} x_{i+2}, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, \tag{12.5.15}$$

这里

$$M_f = \delta_2[1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2 \\ 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2]. \tag{12.5.16}$$

注意, 这里我们使用了 mod (5) 的记号, 即 $x_0 = x_5$, $x_{-1} = x_4$ 等. □

有了每一个玩家的策略演化方程, 要得到网络整体的形势演化方程, 是一个标准过程. 可见附录 (见定理 A.3.2). 得到确定型或概率型的 k-值逻辑动态系统后, 研究 k-值逻辑动态系统的方法就都能用上了[63].

关于网络演化博弈的进一步讨论可见文献 [65].

12.6 注释与参考

图论至今仍是一个十分活跃的分支, 它在解决几何、数论、运筹学和优化等领域中的各种组合问题中起着重要作用. 特别是在社会网络化的今天, 图论成为网络和网络化系统及其控制研究的一个有力工具.

Lajos Pósa (1947–) 是一位数学天才, 他在十几岁时就发现了 Pósa 定理. 大学开始, 他就参与中学教学. 获博士学位后, 尽管在数学研究中成果突出, 他却决心不再从事研究而投入数学教育. 他的一位老师和合作者为此深感遗憾, 说: “Pósa is dead.” 他后来因发现和培育有数学天赋的学生而著名.

超图是图的一个自然拓展, 是一个很年轻的离散数学分支, 它在信息科学中有重要应用. 文献 [49] 及 [2] 是这方面较好的参考书.

拟阵理论建立在图论和矩阵理论的基础上, 它同时推广了图和矩阵的概念, 成为研究图和超图的一个有效工具. 详细讨论可见文献 [24].

博弈论是近年最活跃的学科领域之一, 它不仅在经济学、生物学、军事对抗等许多学科中起着重大作用, 而且也为社会学中的许多问题提供解决之道, 成为跨学科、跨领域的一个新的、极富生命力的新的数学分支. 它可能会影响整个人类社会的发展, 对它怎么估计都不过份. 基于博弈的控制理论也越来越受到重视, 它可能是控制理论的一个新的重要发展方向.

12.7 习题

12.1 证明: 一个简单图有 n 个节点, k 个连通块, 则它的边数 m 满足

$$n-k \leqslant m \leqslant \frac{(n-k)(n-k+1)}{2}.$$

12.2 证明: 一个有奇数个节点的图不可能是哈密顿图.

12.3 证明定理 12.1.4.

12.4 考虑例 12.2.1 中的超图, 给出它的对偶超图.

12.5 设 $X=\{1,\cdots,n\}$, $n \geqslant r \geqslant 0$,

$$\mathcal{I}=\{Z \in 2^X \,\big|\, |Z| \leqslant r\}.$$

证明 $(X,\mathcal{I})$ 是一个拟阵.

12.6 考虑一个两人博弈.

(1) 支付双矩阵见表 12.5.1, 问何时有 (纯策略) 纳什均衡, 何时没有?

(2) 支付双矩阵见表 12.5.2, 问何时有 (纯策略) 纳什均衡, 何时没有?

12.7 考虑例 12.5.3 中的网络演化博弈. 给出其网络整体的形势演化方程.

12.8 考虑例 12.5.3 中的网络演化博弈. 如果将其网络图改为一五元路径 P_5:

(1) 给出其各节点策略演化方程;

(2) 给出其网络的形势演化方程.

附录 A

矩阵的半张量积

本附录介绍一种新的矩阵乘法, 称为矩阵的半张量积. 它是矩阵普通乘法的推广. 当 A 的列数与 B 的行数相等时, 它与普通矩阵乘法 AB 一致, 而当 A 的行数是 B 的列数的倍数或因数时, 它也有定义. 这种推广有广泛的实用背景. 更详细的内容可参考文献 [12].

A.1 定义与基本性质

定义 A.1.1 (1) 设 X 为一 np 维行向量, Y 为一 p 维列向量. 将 X 分成 p 等分 $X^1, \cdots, X^p$, 这里 X^i 为 $1 \times n$ 行向量. 定义 X Y 的左半张量积 (记作 $\ltimes$) 为

$$\begin{cases} X \ltimes Y = \sum_{i=1}^{p} X^i y_i \in \mathbb{R}^n, \\ Y^{\mathrm{T}} \ltimes X^{\mathrm{T}} = \sum_{i=1}^{p} y_i (X^i)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{A.1.1}$$

(2) 设 $A \in M_{m\times n}$, $B \in M_{p\times q}$. 如果 n 是 p 的因子, 即 $nt = p$, 记作 $A \prec_t B$, 或 p 是 n 的因子, 即 $n = pt$, 记作 $A \succ_t B$, 那么, A 和 B 的左半张量积, 记作 $C = A \ltimes B$, 定义如下: 乘积 C 由 $m \times q$ 块组成, 即 $C = (C^{ij})$, 其中, 每块定义为

$$C^{ij} = A^i \ltimes B_j, \quad i = 1, \cdots, m, \quad j = 1, \cdots, q,$$

这里 A^i 是 A 的第 i 行, B_j 是 B 的第 j 列.

因本书只涉及到左半张量积, 故以下将 "左" 省略.

例 A.1.1 (1) 设 $X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, 那么

$$X \ltimes Y = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot 1 + \begin{bmatrix} 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot 2 = \begin{bmatrix} 7 & 0 \end{bmatrix}.$$

(2) 设

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix},$$

那么

$$A \ltimes B = \begin{bmatrix} (3\ 4) & (-3\ -5) \\ (4\ 7) & (-5\ -8) \\ (5\ 2) & (-7\ -4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -3 & -5 \\ 4 & 7 & -5 & -8 \\ 5 & 2 & -7 & -4 \end{bmatrix}.$$

□

注 当 $n = p$ 时, 显然半张量积与普通矩阵乘积一致. 因此, 半张量积是普通矩阵乘积的推广. 为方便计, 不妨略去 $\ltimes$.

定义 A.1.1 要求两矩阵满足倍维数条件, 这是目前应用最广的一类情况. 但实际上, 矩阵半张量积可以对任意两个矩阵定义如下.

定义 A.1.2 设 $A \in M_{m\times n}$, $B \in M_{p\times q}$. 记 $t = lcm(n,p)$ 为和的最小公倍数, 则定义其 (左) 半张量积为

$$A \ltimes B = \left(A \otimes I_{t/n}\right)\left(B \otimes I_{t/p}\right). \tag{A.1.2}$$

容易验证, 定义 A.1.2 是定义 A.1.1 的推广.

下面给出一些半张量积的基本性质.

命题 A.1.1 半张量积满足:

(1) (分配律)

$$\begin{cases} A \ltimes (\alpha B + \beta C) = \alpha A \ltimes B + \beta A \ltimes C; \\ (\alpha B + \beta C) \ltimes A = \alpha B \ltimes A + \beta C \ltimes A, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{A.1.3}$$

(2) (结合律)

$$\begin{cases} A \ltimes (B \ltimes C) = (A \ltimes B) \ltimes C; \\ (B \ltimes C) \ltimes A = B \ltimes (C \ltimes A). \end{cases} \tag{A.1.4}$$

命题 A.1.2 设 $A \in M_{p\times q}$, $B \in M_{m\times n}$. 如果 $q = km$, 那么

$$A \ltimes B = A(B \otimes I_k); \tag{A.1.5}$$

如果 $kq = m$, 那么

$$A \ltimes B = (A \otimes I_k)B. \tag{A.1.6}$$

命题 A.1.3 设 A, B 有合适维数, 使 $A \ltimes B$ 有定义, 则

$$(A \ltimes B)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}} \ltimes A^{\mathrm{T}}. \tag{A.1.7}$$

如果 A 及 B 还是可逆阵, 那么

$$(A \ltimes B)^{-1} = B^{-1} \ltimes A^{-1}. \tag{A.1.8}$$

命题 A.1.4 给定 $A \in M_{m\times n}$.

(1) 令 $Z \in \mathbb{R}^t$ 为一行向量, 那么

$$A \ltimes Z = Z \ltimes (I_t \otimes A); \tag{A.1.9}$$

(2) 令 $Z \in \mathbb{R}^t$ 为一列向量, 那么

$$Z \ltimes A = (I_t \otimes A) \ltimes Z. \tag{A.1.10}$$

不管 $\xi \in \mathbb{R}^n$ 是一行向量或列向量, 那么 $\underbrace{\xi \ltimes \cdots \ltimes \xi}_{k}$ 总有定义. 因此, 记

$$\xi^k := \underbrace{\xi \ltimes \cdots \ltimes \xi}_{k}.$$

下面定义换位矩阵. 换位矩阵 $W_{[m,n]}$ 是一个 $mn \times mn$ 矩阵, 它依下面的步骤构成: 将其列用 $(I,J) = (11, 12, \cdots, 1n, \cdots, m1, m2, \cdots, mn)$ 标注, 并将其行用 $(i,j) = (11, 21, \cdots, m1, \cdots, 1n, 2n, \cdots, mn)$ 标注. 那么, 它在位置 $[(i,j),(I,J)]$ 处的值为

$$w_{(i,j),(I,J)} = \delta_{i,j}^{I,J} = \begin{cases} 1, & I = i \text{ 且 } J = j, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases} \tag{A.1.11}$$

当 $m = n$ 时, 我们将 $W_{[n,n]}$ 简记为 $W_{[n]}$.

例 A.1.2 设 $m = 2$ 及 $n = 3$, 那么切换阵 $W_{[2,3]}$ 可表示为

$$W_{[2,3]} = \begin{matrix} (11) & (12) & (13) & (21) & (22) & (23) & \\ \end{matrix}$$
$$W_{[2,3]} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} (11) \\ (21) \\ (12) \\ (22) \\ (13) \\ (23) \end{matrix}.$$

下面说明换位矩阵的基本作用.

设 $A \in M_{m\times n}$. 记 $V_r(A)$ 为 A 的行展开, 即

$$V_r(A) = [a_{11} \cdots a_{1n} \ \cdots \ a_{m1} \cdots a_{mn}]^{\mathrm{T}},$$

记 $V_c(A)$ 为 A 的列展开, 即

$$V_c(A) = [a_{11} \cdots a_{m1} \ \cdots \ a_{1n} \cdots a_{mn}]^{\mathrm{T}}.$$

□

以下命题表明换位矩阵的“换位”作用.

命题 A.1.5 (1) 设 $X \in \mathbb{R}^m$ 及 $Y \in \mathbb{R}^n$ 为两列向量, 则

$$W_{[m,n]} \ltimes X \ltimes Y = Y \ltimes X, \quad W_{[n,m]} \ltimes Y \ltimes X = X \ltimes Y. \tag{A.1.12}$$

(2) 设 $X \in \mathbb{R}^m$ 及 $Y \in \mathbb{R}^n$ 为两行向量, 则

$$X \ltimes Y \ltimes W_{[m,n]} = Y \ltimes X, \quad Y \ltimes X \ltimes W_{[n,m]} = X \ltimes Y. \tag{A.1.13}$$

(3) 设 $A \in M_{m\times n}$, 则

$$W_{[m,n]} V_r(A) = V_c(A), \quad W_{[n,m]} V_c(A) = V_r(A). \tag{A.1.14}$$

命题 A.1.6

$$W_{[m,n]}^{\mathrm{T}} = W_{[m,n]}^{-1} = W_{[n,m]}. \tag{A.1.15}$$

命题 A.1.7

$$W_{[pq,r]} = \left(W_{[p,r]} \otimes I_q\right)\left(I_p \otimes W_{[q,r]}\right). \tag{A.1.16}$$

式 (A.1.16) 两边取转置, 即得

$$W_{[r,pq]} = \left(I_p \otimes W_{[r,q]}\right)\left(W_{[r,p]} \otimes I_q\right). \tag{A.1.17}$$

A.2 高维数组与多线性运算

一个 k 维数组指一个具有 k 个下标的数组. 例如

$$D = \left\{d_{i_1,i_2,\cdots,i_k} \middle| i_j = 1,\cdots,n_j;\ j = 1,\cdots,k\right\} \tag{A.2.1}$$

是一个 k 维数组, 它包含 $n = \prod_{j=1}^{k} n_j$ 个元素.

将 D 中元素按字典序排成一行或一列, 其次序记着 $id(i_1,\cdots,i_k;n_1,\cdots,n_k)$. 这表示, 先让 i_k 从 1 跑到 n_k, 再让 i_{k-1} 从 1 跑到 $n_{k-1},\cdots$, 最后, 让 i_1 从 1 跑到 n_1. 于是有

$$M_D = \left[d_{11\cdots1}, d_{11\cdots2}, \cdots, d_{11\cdots n_k}, \cdots, d_{n_1\cdots n_{k-1}1}, d_{n_1\cdots n_{k-1}2}, \cdots, d_{n_1\cdots n_{k-1}n_k}\right].$$

实际上, 经典矩阵乘法只能用于处理一维和二维数组的情况, 即将数组分别表示成向量与矩阵形式. 用经典矩阵理论处理 3 维或更高维数组是很困难的. 曾经有人建议用立体阵来描述三维数组[47], 但该方法计算复杂. 况且, $k > 3$ 又怎么办呢? 矩阵半张量积为处理高维数组提供了一个有力工具.

我们考虑多线性映射的结构矩阵.

设 $V_1,\cdots,V_k$ 分别为 $n_1,\cdots,n_k$ 维线性空间, W 为 m 维线性空间, $\varphi: V_1\times\cdots\times V_k\to W$ 为一 k 线性映射, 即对任意的 $1\leqslant i\leqslant k$, 设 $X_r\in V_r$, $r\neq i$, 以及 $X_i^1,X_i^2\in V_i$, $c_1,c_2\in\mathbb{R}$ 有

$$\begin{aligned}&\varphi(X_1,\cdots,X_{i-1},c_1X_i^1+c_2X_i^2,\cdots,X_k)\\&=c_1\varphi(X_1,\cdots,X_i^1,\cdots,X_k)+c_2\varphi(X_1,\cdots,X_i^2,\cdots,X_k).\end{aligned}\tag{A.2.2}$$

记 $\{e_1^i,\cdots,e_{n_i}^i\}$ 为 V_i 的一个基底, $\{d_1,\cdots,d_m\}$ 为 W 的一个基底, 并且

$$\varphi(e_{i_1}^1,\cdots,e_{i_k}^k)=\sum_{j=1}^m c_{i_1,\cdots,i_k}^j d_j;\quad i_s=1,\cdots,n_s,\ s=1,\cdots,k.\tag{A.2.3}$$

定义 A.2.1 称 $m\times(n_1\cdots n_k)$ 矩阵

$$M_\varphi=\begin{bmatrix}c_{11\cdots1}^1&\cdots&c_{11\cdots n_k}^1&\cdots&c_{n_1n_2\cdots n_k}^1\\ \vdots&&&&\\ c_{11\cdots1}^m&\cdots&c_{11\cdots n_k}^m&\cdots&c_{n_1n_2\cdots n_k}^m\end{bmatrix}\tag{A.2.4}$$

为 φ 的结构矩阵.

设 $X_i\in V_i$, $X_i=\sum\limits_{j=1}^{n_i}a_j^ie_j^i$, $i=1,\cdots,k$. 我们用一个向量表示 X_i, 即

$$X_i=(a_1^i,a_2^i,\cdots,a_{n_i}^i)^{\mathrm{T}},\quad i=1,\cdots,k.$$

那么, $\varphi(X_1,\cdots,X_k)$ 可以用下面给出的公式计算.

命题 A.2.1

$$\varphi(X_1,\cdots,X_k)=M_\varphi\ltimes X_1\ltimes X_2\ltimes\cdots\ltimes X_k.\tag{A.2.5}$$

例 A.2.1 $\mathbb{R}^3$ 中的叉乘定义为: 设 $X=x_1\mathbf{i}+x_2\mathbf{j}+x_3\mathbf{k}$, $Y=y_1\mathbf{i}+y_2\mathbf{j}+y_3\mathbf{k}$, 则

$$X\times Y=\det\begin{bmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\x_1&x_2&x_3\\y_1&y_2&y_3\end{bmatrix}.$$

于是得到它的结构矩阵为

$$M=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&1&0&-1&0\\0&0&-1&0&0&0&1&0&0\\0&1&0&-1&0&0&0&0&0\end{bmatrix}.\tag{A.2.6}$$

设 $X=\begin{bmatrix}3&1&-1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$, $Y=\begin{bmatrix}1&2&1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$, 则

$$X\times Y=M\ltimes X\ltimes Y=\begin{bmatrix}3&-4&5\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

□

例 A.2.2 考虑四元数 (见例 7.1.9), 它的标准基底是 $\{1, I, J, K\}$. 容易算出, 它的结构矩阵是

$$M_Q = \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&-1 \\ 0&1&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&-1&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0&-1&1&0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&1&0&0&-1&0&0&1&0&0&0 \end{bmatrix}. \tag{A.2.7}$$

结构矩阵给出一个计算四元数逆元的简单方法: $X = \begin{bmatrix} a & b & c & d \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \neq 0$, 我们有

$$M_Q X = \begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{bmatrix},$$

现在 X 的逆满足

$$X \times (X^{-1}) = M_Q \ltimes X \ltimes (X^{-1}) = (1, 0, 0, 0)^{\mathrm{T}}.$$

记

$$\begin{aligned} E &:= \det(M_Q X) \\ &= a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + 2(a^2b^2 + a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 + c^2d^2) \\ &= (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 > 0. \end{aligned} \tag{A.2.8}$$

因此

$$X^{-1} = (M_Q X)^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} := \frac{1}{E} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{bmatrix},$$

其中

$$\alpha = \det \begin{bmatrix} a & -d & c \\ d & a & -b \\ -c & b & a \end{bmatrix} = a^3 + a(b^2 + c^2 + d^2);$$

$$\beta = -\det \begin{bmatrix} b & -d & c \\ c & a & -b \\ d & b & a \end{bmatrix} = -b^3 - b(a^2 + c^2 + d^2);$$

$$\gamma = \det \begin{bmatrix} b & a & c \\ c & d & -b \\ d & -c & a \end{bmatrix} = -c^3 - c(a^2 + b^2 + d^2);$$

$$\delta = -\det\begin{bmatrix} b & a & -d \\ c & d & a \\ d & -c & b \end{bmatrix} = -d^3 - d(a^2+b^2+c^2).$$

容易检验 $X^{-1} \times X = 1$. □

A.3 逻辑动态系统

作为矩阵半张量积的另一个重要应用, 本节讨论逻辑动态系统的分析与控制[63]. 实际上, 矩阵半张量积可以将一个逻辑动态系统表示成一个离散时间动态系统的形式. 这与卡尔曼的状态空间方法很类似, 它为研究逻辑动态系统的分析与控制提供了一个有力的工具. 为叙述方便, 先给出一些记号:

(1) $\mathcal{D}_k := \{1, 2, \cdots, k\}$;

(2) $\delta_n^i := \mathrm{Col}_i(I_n)$, 即, 它是单位阵 I_n 的第 i 列;

(3) $\Delta_n := \mathrm{Col}(I_n)$;

(4) $M \in M_{m\times n}$ 称为一个逻辑矩阵, 如果 $\mathrm{Col}(M) \subset \Delta_m$. $m \times n$ 的逻辑矩阵集合记作 $\mathcal{L}_{m\times n}$;

(5) 设 $L \in \mathcal{L}_{m\times n}$, 则

$$L = \left[\delta_m^{i_1}\ \delta_m^{i_2}\ \cdots\ \delta_m^{i_n}\right];$$

简记为

$$L = \delta_m\,[i_1\ i_2\ \cdots\ i_n].$$

(6) $r = (r_1, \cdots, r_k)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^k$ 称为一个概率向量, 如果 $r_i \geqslant 0, i = 1, \cdots, k$, 并且

$$\sum_{i=1}^{k} r_i = 1.$$

k 维概率向量集合记作 $\varUpsilon_k$.

(7) 如果 $M \in M_{m\times n}$ 且 $\mathrm{Col}(M) \subset \varUpsilon_m$, 则称 M 为一概率矩阵. $m \times n$ 维概率矩阵集合记作 $\varUpsilon_{m\times n}$.

定义 A.3.1 设 $x_i \in \mathcal{D}_{k_i}$, $i = 1, \cdots, n$. 一个映射 $f : \prod_{i=1}^n \mathcal{D}_{k_i} \to \mathcal{D}_{k_0}$, 记作 $f(x_1, \cdots, x_n)$, 称为一个混合值逻辑映射. 如果 $k_i = k$, $i = 0, 1, \cdots, n$, 则称 f 为一 k 值逻辑函数. 当 $k = 2$ 时, 2 值逻辑函数称为布尔函数.

在讨论逻辑函数时, 我们只关心 $\mathcal{D}_k$ 的势 k, 与它的具体元素无关. 例如, 通常考虑布尔函数时, $\mathcal{D}_2 = \{0, 1\}$, 考虑 k 值逻辑函数时, $\mathcal{D}_k = \{0, 1/(k-1), 2/(k-1), \cdots, 1\}$. 为使用矩阵半张量积, 我们将标量形式的逻辑变量转化为向量形式. 令 $i \in \mathcal{D}_k$ 与 δ_k^i 等价, 即

$$i \sim \delta_k^i, \quad i = 1, \cdots, k.$$

这个等价, 使得 $\mathcal{D}_k \sim \Delta_k$. 于是, 在向量形式下一个混合值逻辑映射 $f : \prod_{i=1}^n \mathcal{D}_{k_i} \to \mathcal{D}_{k_0}$ 就可表示为 $f : \prod_{i=1}^n \Delta_{k_i} \to \Delta_{k_0}$. 下面这个结论是基本的.

定理 A.3.1 设混合值逻辑映射 $f:\prod_{i=1}^{n}\Delta_{k_i}\rightarrow\Delta_{k_0}$, 则存在唯一的逻辑矩阵 $M_f\in\mathcal{L}_{k_0\times k}$, 使得

$$f(x_1,\cdots,x_n)=M_f\ltimes_{i=1}^{n}x_i. \tag{A.3.1}$$

这里 $k=\prod_{i=1}^{n}k_i$.

下面介绍一种新的矩阵乘法.

定义 A.3.2 设 $A\in M_{m\times r}$, $B\in M_{n\times r}$. A 与 B 的 Khatri-Rao 乘积定义为

$$A*B:=[\mathrm{Col}_1(A)\ltimes\mathrm{Col}_1(B),\mathrm{Col}_2(A)\ltimes\mathrm{Col}_2(B),\cdots,\mathrm{Col}_r(A)\ltimes\mathrm{Col}_r(B)]\in M_{mn\times r}. \tag{A.3.2}$$

现在考察一个逻辑动态系统. 利用向量形式, 有 $x_i\in\Delta_{k_i}$, $i=1,\cdots,n$. 假定演化规则如下

$$x_i(t+1)=f_i(x_1,\cdots,x_n),\quad i=1,\cdots,n. \tag{A.3.3}$$

利用定理 A.3.1, 式 (A.3.3) 可表示为

$$x_i(t+1)=M_ix(t),\quad i=1,\cdots,n, \tag{A.3.4}$$

这里 $M_i\in\mathcal{L}_{k_i\times k}$, $x(t)=\ltimes_{i=1}^{n}x_i(t)$.

定理 A.3.2 设一逻辑动态系统的每个元素的演化方程为式 (A.3.4), 则系统的演化方程为

$$x(t+1)=Mx(t), \tag{A.3.5}$$

这里

$$M=M_1*M_2*\cdots*M_n\in\mathcal{L}_{k\times k}.$$

参考文献

[1] Armstrong M A. 孙以丰 (译). 基础拓扑学. 北京: 北京大学出版社, 1981

[2] Berge C. 卜月华, 张克民 (译). 超图 — 有限集的组合学. 南京: 东南大学出版社, 2002

[3] 蔡宣三. 最优化与最优控制. 北京: 清华大学出版社, 1982

[4] 陈建功. 实函数论. 北京: 科学出版社, 1978

[5] 陈希孺. 数理统计引论. 北京: 科学出版社, 1981

[6] 陈省身, 陈维桓. 微分几何讲义. 北京: 北京大学出版社, 1983

[7] 陈翰馥. 随机递推估计. 北京: 科学出版社, 1984

[8] 陈吉象. 代数拓扑基础讲义. 北京: 高等教育出版社, 1987

[9] 陈恕行. 现代偏微分方程导论. 北京: 科学出版社, 2005

[10] 陈宗海, 董道毅, 张陈斌. 量子控制导论. 合肥: 中国科技大学出版社, 2005

[11] 程代展. 非线性系统的几何理论. 北京: 科学出版社, 1988

[12] 程代展, 齐洪胜. 矩阵的半张量积 — 理论与应用. 北京: 科学出版社, 2007

[13] 冯纯伯, 费树岷. 非线性控制系统的分析与设计. 第二版. 北京: 电子工业出版社, 1998

[14] 冯康, 秦孟兆. 哈密顿系统的辛几何算法. 杭州: 浙江科学技术出版社, 2003

[15] 冯・诺伊曼, 摩根斯顿 (著). 王宇, 王文玉 (译). 博弈论与经济行为. 生活・读书・新知三联书店, 2004

[16] Giordano F R, Wei M D, Fox W P. 叶其孝, 姜启源等 (译). 数学建模. 北京: 机械工业出版社, 2005

[17] 郭雷, 程代展, 冯德兴, 等. 控制理论导论 — 从基本概念到研究前沿. 北京: 科学出版社, 2005

[18] 关肇直. 泛函分析讲义. 北京: 高等教育出版社, 1959

[19] 洪奕光, 程代展. 非线性系统的分析与控制. 北京: 科学出版社, 2005

[20] 胡冠章. 应用近世数学. 北京: 清华大学出版社, 1998

[21] 胡寿松. 自动控制原理. 第四版. 北京: 科学出版社, 2004

[22] 胡跃明. 非线性控制系统的理论与应用. 北京: 国防工业出版社, 2002

[23] 江泽坚, 吴智泉. 实变函数论. 第二版. 北京: 高等教育出版社, 1994

[24] 赖虹建. 拟阵论. 北京: 高等教育出版社, 2010

[25] 李国祯. 实分析与泛函分析引论. 北京: 科学出版社, 2004

[26] 李文林. 数学史教程. 北京: 高等教育出版社, 1999

[27] 李克正. 代数几何初步. 北京: 科学出版社, 2004

[28] 刘嘉昆. 应用随机过程. 北京: 科学出版社, 1999

[29] 钱敏平, 龚光鲁. 应用随机过程. 北京: 北京大学出版社, 1998

[30] 钱学森. 创建系统学. 太原: 山西科学技术出版社, 2001

[31] Singh S. 薛密 (译). 费马大定理. 上海: 上海译文出版社, 1997

[32] 王萼芳. 有限群论基础. 北京: 清华大学出版社, 2002

[33] 王树和. 数学聊斋. 北京: 科学出版社, 2008

[34] 吴文俊. 世界著名数学家传记. 北京: 科学出版社, 1995

[35] 吴麒, 王诗宓. 自动控制原理. 第二版. 北京: 清华大学出版社, 2006

[36] 奚宏生. 随机过程引论. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2009

[37] 夏道行, 吴卓人, 严绍宇, 舒五昌. 实变函数与泛函分析. 北京: 人民教育出版社, 1978

[38] 谢政. 对策论导引. 北京: 科学出版社, 2010.

[39] 菲赫金哥尔茨 T M. 叶彦谦等 (译). 微积分学原理. 北京: 人民教育出版社, 1956

[40] 张恭庆, 林源渠. 泛函分析讲义. 上册. 北京: 北京大学出版社, 1987

[41] 张筑生. 微分动力系统原理. 北京: 科学出版社, 1987

[42] 郑大钟. 线性系统理论. 北京: 清华大学出版社, 1990

[43] Abraham R, Marsden J E. *Foundations of Mechanics*. 2nd Ed. London: Ben./Cum. Pub. Comp., 1978

[44] Agrachev A A, Liberzon D. Lie algebra stability criteria for switched systems. *SIAM J. Contr. Opt.*, 2001, 40(1): 253-269

[45] Agrachev A A, Sachkov Y L. *Control Theory from the Geometric Viewpoint*. Berlin: Springer, 2004

[46] Adams R A. *Sobolev Spaces*. New York: Academic Press, 1976

[47] Bates D, Watts D. Relative curvature measures of nonlinearity. *J. Royal Statistical Society*, Series B (Methodological), 1980, 42: 1-25

[48] Benoit J P, Krishna V. Finitely repeated games. *Econometrica*, 1985, 17(4): 317-320

[49] Berge C. *Graphs and Hypergraphs*. Amsterdam: North-Holland Pub., 1973

[50] Bilbao J M. *Cooperative Games on Combinatorial Structures*. Boston: Kluwer Acad. Pub., 2000

[51] Branzei R, Dimitrov D, Tijs S. *Models in Cooperative Game Theory.* 2nd Ed. Berlin: Springer-Verlag, 2008 (X. Liu, J. Liu, Chinese translation, Beijing: Science Press, 2011)

[52] Boothby W M. *An Introduction to Differential Manifold and Riemannian Geometry.* Orlando: Academic Press, 1986

[53] Brockett R W. System theory on group-manifolds and coset spaces. *SIAM J. Contr.*, 1972, 10: 265-284

[54] Brockett R W. Asumptotic stability and feedback stabilization. In: Brochett R W, Millman R S, Sussmann H, ed. *Differential Geometric Control Theory.* Birkhauser, 1983: 181-191

[55] Brzeźniak Z, Zastawniak T. *Basic Stochastic Processes.* New York: Springer-Verlag, 1999

[56] Bullo F, Lewis A D. *Geometric Control of Mechanical Systems.* Springer, 2005

[57] Casti J L. *Five Golden Rules, Great Theories of 20th-Century Mathematics and Why They Matter.* J. Wiley & Sons, 1996

[58] Chartraand G, Zhang P. *Introduction to Graph Theory.* Beijing: Posts & Telecom Press (Copyright ©2005 by the McGraw-Hill Comp. Inc.), 2006

[59] Chen H F, Cheng D. Early developments of control theory in China. *European Journal of Control*, 2007, 13(1): 25-29

[60] Cheng D, Dayawansa W P, Martin C F. Observability of systems on Lie groups and coset spaces. *SIAM J. Contr. Opt.*, 1990, 28(3): 570-581

[61] Cheng D. Generalized Hamiltonian Systems. In: Leung T P, Qin H S, ed. *Advanced Topics in Nonlinear Control Systems.* Singapore: World Scientific, 2001

[62] Cheng D, Ma J, Lu Q, Mei S. Quadratic form of stable sub-manifold for power systems. *Int. J. Robust Nonli. Sys.*, 2004, 14: 773-788

[63] Cheng D, Qi H, Li Z. *Analysis and Control of Boolean Networks: A Semitensor Product Approach.* London: Springer, 2011

[64] Cheng D, Xu T. Application of STP to cooperative games. In: *Proc. 10th IEEE ICCA.* 2013: 1680-1685

[65] Cheng D, He F, Qi H, Xu T. Modeling, analysis and control of networked evolutionary games, http://lsc.amss.ac.cn/~dcheng/preprint/NTGAME02.pdf (IEEE TAC, provisionally accepted)

[66] Chiang H D, Hirsch M, Wu F. Stability regions on nonlinear autonomous dynamical systems. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 1988, 33(1): 16-27

[67] Chow Y S, Teicher H. *Probability Theory.* New York: Springer-Verlag, 1978

[68] Clarke C. *Elementary General Relativity.* New York: John Wiley & Sons, 1979

[69] Conway J B. *A Course in Functional Analysis.* New York: Springer-Verlag, 1985

[70] Crouch P E, Van der Schaft A J. *Variational and Hamiltonian Control Systems.* Notes in Contr. Inf. Sci., 101, Springer-Verlag, 1987

[71] Dugundji J. *Topology.* Boston: Allyn Bacon Inc., 1966

[72] Falb P. *Methods of Algebraic Geometry in Control Theory: Part I.* Boston: Birkhauser, 1990

[73] Falconer K. *The Geometry of Fractal Sets.* Cambridge: Cam. Univ. Press, 1985

[74] Feng K, Wang D. Symplectic difference schemes for Hamiltonian systems in general symplectic structures, *Journal of Computation Mathematics*, 1991, 9(1): 86-96

[75] Fulton W. *Algebraic Curves.* W.A. Benjamin, 1969

[76] Hamilton A G. *Logic for Mathematicians.* Cambridge: Cambridge Univ Press, 1988

[77] Hritonenko N, Yatsenko Y. *Mathematical Modeling in Economics, Ecology and the Environment.* Kluwer Acad. Pub., 1999 (Beijing: Sciece Press, 2006)

[78] Hungerford T W. *Algebra.* New York: Springer-Verlag, 1974

[79] Isidori A. *Nonlinear Control Systems.* 3rd Ed. Berlin: Springer, 1995

[80] Jacobson N. *Basic Algebra.* Free. Comp., 1974

[81] Jazwinsky A H. *Stochastic Processes and Filtering Theory.* Academic Press, 1970

[82] Jost J. *Dynamical Systems.* Berlin: Springer-Verlag, 2005

[83] Jurdjevic V. *Geometric Control Theory.* Cambridge Univ. Press, 1997

[84] Katz V J. *A History of Mathematics.* Person Edu., 2004

[85] Kelley J L. *General Topology.* New York: Springer-Verlag, 1955

[86] Khalil H K. *Nonlinear Systems.* 2nd Ed. New Jersey: Prentice Hall, 1996

[87] Kuipers J B. *Quaternions and Rotation Sequences.* Princeton: Princeton Univ. Press, 1999

[88] Lang S. *Algebra.* 3rd Ed. New York: Springer, 2005

[89] Leitmann G. *The Calculus of Variations and Optimal Control — An Introduction.* Plenum Press, 1981

[90] Guo L, Huang L, Jin U. Some recent advances of automatic control in China. In: *Proc. 1999 IFAC World Congress.* 1999: 31-48

[91] Liberzon D, Hespamha J P, Morse A S. Stability of switched systems: A Lie algebra condition. *Sys. Contr. Lett.*, 1999, 37(3): 117-122

[92] Lions J L, Magenes E. *Nonhomogenious Boundary Value Problems and Applications*, Vol. 1, 2. New York: Springer-Verlag, 1970

[93] Loeve M. *Probability Theory*, Vol. I, Vol. II. New York: Springer-verlag, 1978

[94] Massey W S. *Algebraic Topology: An Introduction.* New York: Springer-Verlag, 1967

[95] Mcdonald J N. *Real Analysis.* Singapore: Elsevier, 2004

[96] Mcdonald J N, Weiss N A. *Real Analysis.* Singapore: Elsevier, 2004

[97] Nijmeijer H, Van der Schaft A J. *Nonlinear Dynamical Control Systems.* New York: Springer-Verlag, 1990

[98] Nowak M A, May R M. Evolutionary games and spatial chaos. *Nature*, 1992, 359: 826-829

[99] Olver P J. *Applications of Lie Groups to Differential Equations.* New York: Springer-Verlag, 1993

[100] Rasmusen E. *Games and Information: An Introduction to Game Theory.* 4th Ed. Oxford: Basil Blackwell, 2007

[101] Rudin W. *Real and Complex Analysis.* 2nd Ed. New York: McGraw-Hill, 1974

[102] Rotman J J. *An Introduction to Algebraic Topology.* Berlin: Springer-Verlag, 1988

[103] I.R. Shafarevich. *Basic Algebraic Geometry.* 2nd Ed. Berlin: Springer-Verlag, 1994

[104] Shankar S. Control theory and algebraic geometry. *Report in 21st Conference of the Ramanujan Mathematical Society*, Central Univ., Hyderabad, July, 2006

[105] Smith J M. *Evolution and the Theory of Games.* Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1982

[106] Song J, Yu J. *Population System Control.* Springer-Verlag, 1988

[107] Spivak M. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry.* 2nd Ed. Delaware: Wilmington, 1979

[108] Steen L A, Seebach J A, Jr. *Counterexamples in Topology.* 2nd Ed. New York: Springer-Verlag, 1978

[109] Sternberg S. *Group Theory and Physics.* Cambridge Univ. Press, 1994

[110] Szabo G, Toke C. Evolutionary prisoner's dilemma game on a square lattice. *Phys. Rev. E*, 1998, 58:69.

[111] Traulsen A, Nowak M A, Pacheco J M. Stochastic dynamics of invasion and fixation. *Phys. Rev., E*, 2006, 74: 011909.

[112] Tsien H S. *Engineering Cybernetics.* New York: McGraw-Hill, 1954

[113] Varadarajan V S. *Lie Groups, Lie Algebras, and Their Representations.* New York: Springer-Verlag, 1984

[114] Wiener N. *Cybernetics or Control and Communication in the Animal and the Machine.* Paris: Cambridge-Mass, 1948

[115] Wilson R J. *Introduction to Graph Theory*. 4th Ed. England: Robin Wilson, 1996

[116] Wonham W M. *Linear Multivariable Control, A Geometric Approach*. Berlin: Springer-Verlag, 1974

[117] Yao P. On the observability inequalities for exact controllability of wave equations with variable coefficients. *SIAM J. Contr. Opt.*, 1999, 37: 1568-1599

[118] Young H P. The evolution of conventions. *Econometrica*, 1993, 61: 57-84

[119] Zaborszky J G, Huang G, Zheng B, Leung T. On the phase protraits of a class of large nonlinear dynamics such as the power systems. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 1988, 33(1): 4-15

[120] Zhang F. *Matrix Theory, Basic Results and Techniques*. Springer-Verlag, 1999

名词索引

(按汉语拼音音序和英文字母顺序排序)
(括号内数字是页码)

T

W

X

Y